

Analízis 2

Andai Attila*

2026. április 3.

*andaia@math.bme.hu

Tartalomjegyzék

1. Határozott integrál.....	1
1.1. A Riemann-integrál	1
1.2. A Riemann-integrálhatóság kritériumai	3
1.3. Riemann-integrálás alaptulajdonságai	5
1.4. Newton–Leibniz-tétel	8
1.5. Az integrálfüggvény	9
2. Normált terek.....	11
2.1. Normált terek topológiája	11
2.2. Sorok és sorozatok normált terekben	12
2.3. Normák ekvivalenciája	14
2.4. Folytonos lineáris leképezések	15
2.5. Folytonos lineáris leképezések terének tulajdonságai	17
2.6. Véges dimenziós normált terek	20
3. Hilbert-terek.....	23
3.1. Skaláris szorzással ellátott terek	23
3.2. Vektor ortogonális projekciója zárt altérre	26
4. Függvénysorozatok, függvénysorok.....	29
4.1. Pontonkénti és egyenletes konvergencia	29
4.2. Korlátos folytonos függvények tere	32
4.3. Hatványsorok	34
4.4. Abel-tétel	35
4.5. Lineáris leképezés függvénye	37
4.6. Függvénysorozat és függvénysor deriválása és integrálása	39
4.7. Hatványsor tagokénti deriválása és integrálása	43
4.8. Approximáció polinomokkal	44
5. Fourier-sorok.....	47
5.1. Trigonometrikus polinomok	47
5.2. Fourier-féle ortogonális függvényrendszer	49
5.3. Függvény Fourier-sora	52
6. Komplex függvénytan.....	55
6.1. Komplex differenciálhatóság	55
6.2. Hatványsorok határértéke	57
6.3. Differenciálás műveleti tulajdonságai	59
6.4. Hatványsor differenciálhatósága	60
6.5. Görbe menti integrál	61
6.6. A Newton–Leibniz-tétel és a Goursat-lemma	63
6.7. Az indexfüggvény	64
6.8. Cauchy integráltételei	66
6.9. Cauchy transzformáció	67
6.10. Cauchy-egyenlőtlenség és Liouville tétele	68
6.11. Holomorf függvények gyökei	68
6.12. Laurent-sorfejtés	68
6.13. Reziduum-tétel, argumentum-elv és Rouché tétele	70
Tárgymutató.....	72

A BME matematikus hallgatóinak tartott Analízis és Kalkulus tárgyak motiválták a jelen jegyzet megírását. Ez oktatási segédanyag, melyben előfordulhatnak hibák. Ezért ha hibát talál a szövegben, kérem jelezze a szerzőnek.

Különböző jelölések bevezetése és definíciók során a $\triangleq$ szimbólumot fogjuk használni definiáló egyenlőségként. Az $a \triangleq b$ azt jelenti, hogy a már ismert b kifejezést a továbbiakban a jelöli.

2026. április 3.
Andai Attila

Ez a dokumentum elektronikus és nyomtatott formában szabadon használható, de csak saját célokra, nem-kereskedelmi jellegű alkalmazásokhoz, tevékenységekhez. A dokumentum internetre való feltöltése és mások által elérhetővé tétele csak a szerző engedélyével lehetséges. Minden más terjesztési és felhasználási forma esetében is a szerző engedélyét kell kérni.
Copyright, 2026 ©Andai Attila

1. Határozott integrál

1.1. A Riemann-integrál

1.1. Definíció. Az $[a, b]$ korlátos intervallum *felosztásán* egy olyan $(x_i)_{i=0, \dots, n}$ szám n -est értünk melyre $x_0 = a$, $x_n = b$ és minden $0 \leq i \leq n-1$ esetén $x_i < x_{i+1}$ teljesül. Az $[a, b]$ intervallum felosztásainak a halmazát $\mathcal{F}^{[a, b]}$ jelöli, azaz

$$\mathcal{F}^{[a, b]} = \left\{ x \in \bigcup_{n=2}^{\infty} \mathcal{F}(n, [a, b]) \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, x_0 = a, x_{n-1} = b, \forall i \in (n-1) : x_i < x_{i+1} \right\}.$$

Azt mondjuk, hogy az $x \in \mathcal{F}^{[a, b]}$ felosztás *finomabb*, mint az $y \in \mathcal{F}^{[a, b]}$ felosztás, ha $\text{Ran } y \subseteq \text{Ran } x$, melyet az $y \leq x$ szimbólummal jelölünk.

Magyarázat. Vagyis az $x = (x_0, \dots, x_n) \in \mathcal{F}^{[a, b]}$ felosztás pontosan akkor finomabb, mint az $y = (y_0, \dots, y_m) \in \mathcal{F}^{[a, b]}$ felosztás, ha

$$\{y_0, \dots, y_m\} \subseteq \{x_0, \dots, x_n\}$$

teljesül és ezt az $y \leq x$ vagy másképp a $(y_i)_{i=0, \dots, m} \leq (x_i)_{i=0, \dots, n}$ szimbólummal jelöljük.

1.2. Definíció. Legyen $x = (x_i)_{i=0, \dots, n}$ és $y = (y_i)_{i=0, \dots, m}$ az $[a, b]$ korlátos intervallum egy-egy felosztása. Legyen

$$L = \{x_i \mid 0 \leq i \leq n\} \cup \{y_i \mid 0 \leq i \leq m\}, \quad k = |L| - 1,$$

és definiáljuk a $(z_i)_{i=0, \dots, k}$ számokat az alábbi rekurzióval.

- Legyen $z_0 = a$.
- Ha z_i ismert és $i < k$, akkor legyen

$$z_{i+1} = \min(L \setminus \{z_0, \dots, z_i\}).$$

Ekkor a $z = (z_i)_{i=0, \dots, k}$ felosztást az x és az y felosztás *egyesítésének* nevezzük és a $z = x \sqcup y$ szimbólummal jelöljük.

1.3. Definíció. Legyen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény és $x = (x_i)_{i=0, \dots, n} \in \mathcal{F}^{[a, b]}$ egy felosztás. Ekkor az f függvény $(x_i)_{i=0, \dots, n}$ felosztáshoz tartozó *alsó közelítő összege*

$$s_x(f) \triangleq \sum_{i=0}^{n-1} \left(\inf_{t \in [x_i, x_{i+1}]} f(t) \right) (x_{i+1} - x_i),$$

és *felső közelítő összege*

$$S_x(f) \triangleq \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sup_{t \in [x_i, x_{i+1}]} f(t) \right) (x_{i+1} - x_i).$$

Továbbá definiáljuk az *alsó- és felső közelítő összegek értékeinek a halmazát*.

$$\begin{aligned} s(f) &= \left\{ s_x(f) \in \mathbb{R} \mid x \in \mathcal{F}^{[a, b]} \right\} \\ S(f) &= \left\{ S_x(f) \in \mathbb{R} \mid x \in \mathcal{F}^{[a, b]} \right\} \end{aligned}$$

1.4. Tétel. Legyen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény.

1. Minden $x \in \mathcal{F}^{[a, b]}$ felosztás esetén $s_x(f) \leq S_x(f)$.
2. Ha z jelöli az $[a, b]$ intervallum *triviális felosztását*, azaz $z = (a, b)$, akkor minden más $x \in \mathcal{F}^{[a, b]}$ felosztás esetén $s_z(f) \leq s_x(f)$ és $S_x(f) \leq S_z(f)$.
3. Ha az $x, y \in \mathcal{F}^{[a, b]}$ felosztásra $x \leq y$ teljesül, akkor $s_x(f) \leq s_y(f)$ és $S_y(f) \leq S_x(f)$.

4. Bármely $x, y \in \mathcal{F}^{[a,b]}$ felosztásra $s_x(f) \leq S_y(f)$ teljesül.

5. Az $s(f)$ halmaz felülről korlátos, valamint az $S(f)$ halmaz alulról korlátos.

Bizonyítás. Legyen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény, jelölje z a $z_0 = a$ és $z_1 = b$ triviális felosztást továbbá legyen $x = (x_i)_{i=0,\dots,n}$ és $y = (y_i)_{i=0,\dots,m}$ az $[a, b]$ intervallum olyan felosztása, melyre $x \leq y$ teljesül.

1. A definíció alapján nyilvánvaló.

2. Az $s_z(f) \leq s_x(f)$ egyenlőtlenséget

$$\begin{aligned} s_x(f) &= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\inf_{t \in [x_i, x_{i+1}]} f(t) \right) (x_{i+1} - x_i) \geq \sum_{i=0}^{n-1} \left(\inf_{t \in [a, b]} f(t) \right) (x_{i+1} - x_i) = \\ &= \left(\inf_{t \in [a, b]} f(t) \right) (b - a) = s_z(f) \end{aligned}$$

igazolja, ehhez hasonlóan mutatható meg, hogy $S_x(f) \leq S_z(f)$ teljesül.

3. Tegyük fel, hogy az x felosztást oly módon finomítjuk, hogy valamely $j \in \{0, \dots, n-1\}$ esetén az $[x_j, x_{j+1}]$ szakasz belsejéből hozzáveszünk még egy c osztópontot. Jelölje x' az így kapott felosztást. Mivel

$$\begin{aligned} \left(\inf_{t \in [x_j, c]} f(t) \right) (c - x_j) + \left(\inf_{t \in [c, x_{j+1}]} f(t) \right) (x_{j+1} - c) &\geq \\ &\geq \left(\inf_{t \in [x_j, x_{j+1}]} f(t) \right) ((c - x_j) + (x_{j+1} - c)) = \left(\inf_{t \in [x_j, x_{j+1}]} f(t) \right) (x_{j+1} - x_j) \\ \left(\sup_{t \in [x_j, c]} f(t) \right) (c - x_j) + \left(\sup_{t \in [c, x_{j+1}]} f(t) \right) (x_{j+1} - c) &\leq \\ &\leq \left(\sup_{t \in [x_j, x_{j+1}]} f(t) \right) ((c - x_j) + (x_{j+1} - c)) = \left(\sup_{t \in [x_j, x_{j+1}]} f(t) \right) (x_{j+1} - x_j), \end{aligned}$$

ezért $s_x(f) \leq s_{x'}(f)$ és $S_x(f) \geq S_{x'}(f)$.

Mivel az y felosztást megkaphatjuk az x felosztásból véges sok új osztópont hozzávételével, ezért $s_x(f) \leq s_y(f)$ és $S_x(f) \geq S_y(f)$ teljesül.

4. Legyen x, y tetszőleges felosztása az $[a, b]$ intervallumnak, és tekintsük a $z = x \sqcup y$ felosztást. Ekkor $x \leq z$ és $y \leq z$, amiből az előző pont alapján $s_x(f) \leq s_z(f)$ és $S_z(f) \leq S_y(f)$ adódik. Mivel az 1. pont alapján $s_z(f) \leq S_z(f)$, ezért $s_x(f) \leq S_y(f)$.

5. Mivel minden x felosztásra $z \leq x$ teljesül, ezért

$$s_z(f) \leq s_x(f) \leq S_x(f) \leq S_z(f),$$

ami igazolja, hogy az $s(f)$ halmaz felülről, az $S(f)$ halmaz pedig alulról korlátos.

1.5. Definíció. Az $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény

- alsó integráljának nevezzük a $\sup s(f)$ mennyiséget, melynek jele $\int_a^b f$;
- felső integráljának nevezzük a $\inf S(f)$ mennyiséget, melynek jele $\int_a^b f$;
- Riemann-integrálható, ha $\int_a^b f = \int_a^b f$, ekkor $\int_a^b f$ vagy $\int_a^b f(x) dx$ jelöli az $\int_a^b f = \int_a^b f$ értéket.

Továbbá bevezetjük az $\mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$ jelölést a Riemann-integrálható függvényekre, vagyis

$$\mathcal{R}([a, b], \mathbb{R}) \triangleq \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ korlátos és Riemann-integrálható}\}.$$

- Ha $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$, akkor bevezetjük a

$$\int_b^a f \triangleq - \int_a^b f$$

jelölést.

- Továbbá minden $a \in \mathbb{R}$ pontra és $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényre $a \in \text{Dom } f$ esetén legyen

$$\int_a^a f \triangleq 0.$$

- Ha $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, valamint $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$, akkor a $\int_a^b f$ és a $\int_b^a f$ mennyiséget az f függvény *határozott integráljának* nevezzük.

1.6. Definíció. Az $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ függvény *Riemann-integrálható*, ha $\text{Re} \circ f, \text{Im} \circ f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$ és ekkor a

$$\int_a^b f \triangleq \left(\int_a^b \text{Re} \circ f \right) + i \left(\int_a^b \text{Im} \circ f \right)$$

képlettel értelmezzük a komplex értékű függvény integrálját.

1.7. Tétel. Minden $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvényre

$$\int_a^b f \leq \int_a^b f$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény, $\alpha = \sup s(f)$ és $\beta = \inf S(f)$. Azt kell megmutatni, hogy $\alpha \leq \beta$. Az állítással ellentétben tegyük fel, hogy $\beta < \alpha$. Ekkor legyen $\varepsilon = \alpha - \beta$. Legyen x és y az a felosztás, melyre $\alpha - \frac{\varepsilon}{2} < s_x(f)$ és $S_y(f) < \beta + \frac{\varepsilon}{2}$. Mivel az 1.4 tétel szerint minden x, y felosztás esetén $s_x(f) \leq S_y(f)$, ezért

$$\alpha - \frac{\varepsilon}{2} < s_x(f) \leq S_y(f) < \beta + \frac{\varepsilon}{2},$$

vagyis $\alpha - \beta < \varepsilon$, ami lehetetlen, hiszen $\alpha - \beta = \varepsilon$.

1.2. A Riemann-integrálhatóság kritériumai

Magyarázat. Ebben a fejezetben először csak elégséges feltételeket adunk függvények Riemann-integrálhatóságára. A fejezet végén közelebbről is megvizsgáljuk a Riemann-integrálhatóságra vonatkozó Lebesgue-tételt, mely szükséges és elégséges feltételt ad korlátos függvény Riemann-integrálhatóságára.

1.8. Tétel. Minden $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvényre

$$f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R}) \iff \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists x \in \mathcal{F}^{[a, b]} : S_x(f) - s_x(f) < \varepsilon.$$

Bizonyítás. Legyen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény.

Tegyük fel, hogy $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$ és legyen $c = \int_a^b f$, valamint $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor létezik olyan x, y felosztása az $[a, b]$ halmaznak, melyre

$$c - \frac{\varepsilon}{2} < s_x(f) \quad S_y < c + \frac{\varepsilon}{2}$$

teljesül. Legyen $z = x \sqcup y$. Mivel $x \leq z$ és $y \leq z$, ezért $s_x(f) \leq s_z(f)$ és $S_z(f) \leq S_y(f)$, vagyis

$$c - \frac{\varepsilon}{2} < s_x(f) \leq s_z(f) \leq S_z(f) \leq S_y(f) < c + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$c \leq S_z(f) \leq S_y \leq c + \frac{\varepsilon}{2},$$

ezért

$$c - c \leq S_z(f) - s_z(f) < c + \frac{\varepsilon}{2} - \left(c - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon.$$

Ezzel igazoltuk az állítás egyik irányú következtetését.

Most tegyük fel, hogy f olyan függvény, hogy minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ létezik olyan x felosztás, melyre $S_x(f) - s_x(f) < \varepsilon$ teljesül. Legyen $\alpha = \sup s(f)$ és $\beta = \inf S(f)$. Megmutatjuk, hogy $\alpha = \beta$. Az 1.7 tétel alapján $\alpha \leq \beta$.

Tegyük fel, hogy $\alpha < \beta$. Ekkor legyen $\varepsilon = \beta - \alpha$. A feltételezésünk alapján ehhez a ε paraméterhez létezik olyan x felosztás, melyre $S_x(f) - s_x(f) < \varepsilon$ teljesül. Ekkor

$$\beta \leq S_x(f) < s_x(f) + \varepsilon \leq \alpha + \varepsilon,$$

vagyis a $\varepsilon = \beta - \alpha < \varepsilon$ ellentmondást kapjuk.

Mivel $\alpha \leq \beta$ és $\alpha < \beta$ lehetetlen, ezért $\alpha = \beta$, ami azt jelenti, hogy $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$.

1.9. Definíció. A korlátos $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény *oszcillációja*

$$\omega(f, [a, b]) \triangleq \left(\sup_{t \in [a, b]} f(t) \right) - \left(\inf_{t \in [a, b]} f(t) \right).$$

Az f függvény $x = (x_i)_{i=0, \dots, n} \in \mathcal{F}^{[a, b]}$ felosztáshoz tartozó *oszcillációs összege*

$$\Omega_x(f) \triangleq \sum_{i=0}^{n-1} \omega(f, [x_i, x_{i+1}]) (x_{i+1} - x_i).$$

Magyarázat. A definíció alapján nyilvánvaló, hogy minden korlátos $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény és $x \in \mathcal{F}^{[a, b]}$ felosztás esetén

$$\Omega_x(f) = S_x(f) - s_x(f)$$

teljesül.

1.10. Tétel. Minden $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvényre

$$f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R}) \iff \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists x \in \mathcal{F}^{[a, b]} : \Omega_x(f) < \varepsilon.$$

Bizonyítás. Az 1.8 tétel alapján nyilvánvaló.

1.11. Tétel. Legyen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény. Ekkor

$$\omega(f, [a, b]) = \sup_{u, v \in [a, b]} |f(u) - f(v)|$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $H = f([a, b])$ és $A = \{|x - y| \mid x, y \in H\}$. Mivel f korlátos, ezért a H halmaz is korlátos, vagyis létezik az $\alpha = \sup H$ és a $\beta = \inf H$ valós szám. Megmutatjuk az

$$\alpha - \beta = \sup A$$

egyenlőséget, melyből már következik a bizonyítandó állítás.

Bármely $x, y \in H$ számra $\beta \leq x, y \leq \alpha$ teljesül, ezért

$$\beta - \alpha \leq x - y \leq \alpha - \beta,$$

vagyis

$$|x - y| \leq \alpha - \beta.$$

Tehát $\alpha - \beta$ felső korlátja az A halmaznak. Tegyük fel, hogy létezik kisebb felső korlátja az A halmaznak. Legyen $\delta \in \mathbb{R}^+$ olyan felső korlát, melyre $\delta < \alpha - \beta$ teljesül. Vezessük be a pozitív $\varepsilon = \frac{\alpha - \beta - \delta}{2}$ paramétert. Ekkor létezik olyan $x, y \in H$, melyre $\alpha - \varepsilon < x$ és $y < \beta + \varepsilon$ teljesül, vagyis

$$x - y > \alpha - \varepsilon - \beta - \varepsilon = \delta > 0.$$

Tehát van olyan $x, y \in H$ elem, melyre $|x - y| > \delta$ teljesül, tehát δ nem felső korlátja az A halmaznak.

1.3. Riemann-integrálás alaptulajdonságai

1.12. Tétel. Minden $f, g \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$ és $c \in \mathbb{R}$ esetén $f + g, cf, fg \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$, vagyis az $\mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$ algebra, valamint

$$\int_a^b (cf) = c \int_a^b f \quad \int_a^b f + \int_a^b g = \int_a^b (f + g)$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $f, g \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$ és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor létezik olyan $x, y \in \mathcal{F}^{[a, b]}$ felosztás, melyre

$$\begin{aligned} \int_a^b f - \frac{\varepsilon}{4} &< s_x(f) \leq S_x(f) < \int_a^b f + \frac{\varepsilon}{4} \\ \int_a^b g - \frac{\varepsilon}{4} &< s_y(g) \leq S_y(g) < \int_a^b g + \frac{\varepsilon}{4} \end{aligned}$$

teljesül. A továbbiakban felhasználjuk, hogy bármely $z = (z_i)_{i=0, \dots, n} \in \mathcal{F}^{[a, b]}$ felosztás esetén

$$\begin{aligned} s_z(f) + s_z(g) &= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\inf_{t \in [z_i, z_{i+1}]} f(t) + \inf_{t \in [z_i, z_{i+1}]} g(t) \right) (z_{i+1} - z_i) \leq \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \left(\inf_{t \in [z_i, z_{i+1}]} (f(t) + g(t)) \right) (z_{i+1} - z_i) = s_z(f + g) \\ S_z(f) + S_z(g) &= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sup_{t \in [z_i, z_{i+1}]} f(t) + \sup_{t \in [z_i, z_{i+1}]} g(t) \right) (z_{i+1} - z_i) \geq \\ &\geq \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sup_{t \in [z_i, z_{i+1}]} (f(t) + g(t)) \right) (z_{i+1} - z_i) = S_z(f + g). \end{aligned}$$

Legyen $z = x \sqcup y$, azaz z az x és az y felosztás egyesítése, ekkor az

$$s_x(f) + s_x(g) \leq s_x(f + g) \leq s_z(f + g) \leq S_z(f + g) \leq S_y(f + g) \leq S_y(f) + S_y(g)$$

egyenlőtlenségek miatt

$$\int_a^b f + \int_a^b g - \frac{\varepsilon}{2} < s_z(f + g) \leq S_z(f + g) < \int_a^b f + \int_a^b g + \frac{\varepsilon}{2},$$

vagyis $\Omega_z(f + g) < \varepsilon$. Ez pedig az 1.10 tétel alapján azt jelenti, hogy $f + g \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$. Továbbá a fenti egyenlőtlenség alapján

$$\sup s(f + g) \leq \int_a^b f + \int_a^b g \quad \text{és} \quad \inf S(f + g) \leq \int_a^b f + \int_a^b g$$

teljesül, vagyis

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

A számmal való szorzásra vonatkozó szabály egyszerűen igazolható a definíció alapján.

Legyen $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$ és $K \in \mathbb{R}^+$ olyan szám, melyre minden $t \in [a, b]$ esetén $|f(t)| < K$ teljesül. Ekkor minden $u, v \in [a, b]$ elemre

$$|f^2(u) - f^2(v)| = |f(u) + f(v)| \cdot |f(u) - f(v)| \leq 2K \cdot |f(u) - f(v)|.$$

Vagyis bármely $x = (x_i)_{i=0, \dots, n} \in \mathcal{F}^{[a, b]}$ felosztásra az 1.11 tétel alapján

$$\Omega_x(f^2) = \sum_{i=0}^{n-1} \omega(f^2, [x_i, x_{i+1}]) \cdot (x_{i+1} - x_i) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sup_{u,v \in [x_i, x_{i+1}]} |f^2(u) - f^2(v)| \right) \cdot (x_{i+1} - x_i) \leq \\
&\leq \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sup_{u,v \in [x_i, x_{i+1}]} |f(u) - f(v)| \right) \cdot 2K \cdot (x_{i+1} - x_i) = 2K\Omega_x(f)
\end{aligned}$$

adódik, ami azt jelenti, hogy $f^2 \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$. Ha $g \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$, akkor az $fg = \frac{1}{4}((f+g)^2 - (f-g)^2)$ egyenlőség alapján $fg \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$ teljesül.

1.13. Tétel. Legyen $a, b, c \in \mathbb{R}$ olyan, melyre $a < c < b$, valamint legyen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény. Az $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$ tartalmazás pontosan akkor teljesül, ha $f \in \mathcal{R}([a, c], \mathbb{R})$ és $f \in \mathcal{R}([c, b], \mathbb{R})$, valamint ebben az esetben

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Bizonyítás. Legyen $a, b, c \in \mathbb{R}$ olyan, melyre $a < c < b$, valamint legyen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény.

1. Tegyük fel, hogy $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$. Megmutatjuk, hogy minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik az $[a, c]$ intervallumnak olyan x felosztása, melyre $\Omega_x(f) < \varepsilon$ teljesül. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Mivel $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$, ezért létezik olyan x' felosztása az $[a, b]$ intervallumnak, melyre $\Omega_{x'}(f) < \varepsilon$. Legyen x_0 az x' és az (a, c, b) felosztás egyesítése. Ekkor $x' \leq x_0$, ezért az 1.4 tétel alapján

$$s_{x'}(f) \leq s_{x_0}(f) \quad \text{és} \quad S_{x'}(f) \geq S_{x_0}(f),$$

vagyis

$$\Omega_{x_0}(f) = S_{x_0}(f) - s_{x_0}(f) \leq S_{x'}(f) - s_{x'}(f) = \Omega_{x'}(f) < \varepsilon.$$

Ha az $x_0 = (x_i)_{i=0, \dots, n}$ felosztásból csak azokat az x_i pontokat hagyjuk meg, melykerek $x_i \leq c$ teljesül, akkor az $[a, c]$ intervallumnak kapjuk x egy felosztását, melyre $\Omega_x(f) \leq \Omega_{x'}(f) < \varepsilon$ teljesül.

A fenti gondolatmenethez hasonlóan igazolható, hogy az f függvény Riemann-integrálható a $[c, b]$ intervallumon is.

2. Tegyük fel, hogy $f \in \mathcal{R}([a, c], \mathbb{R})$ és $f \in \mathcal{R}([c, b], \mathbb{R})$. Legyen $\alpha = \int_a^c f$ és $\beta = \int_c^b f$. Megmutatjuk, hogy minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik az $[a, b]$ intervallumnak olyan x felosztása, melyre

$$\alpha + \beta - \frac{\varepsilon}{2} < s_x(f) \leq S_x(f) < \alpha + \beta + \frac{\varepsilon}{2}$$

teljesül.

Ebből ugyanis egyrészt $\Omega_I(f) < \varepsilon$ következik, vagyis $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$, másrészt $\int_a^b f = \alpha + \beta$ adódik, ami a bizonyítandó egyenlőség.

Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Mivel $f \in \mathcal{R}([a, c], \mathbb{R})$, ezért létezik olyan x_1 felosztása az $[a, c]$ intervallumnak, melyre

$$\alpha - \frac{\varepsilon}{4} < s_{x_1}(f) \leq S_{x_1}(f) < \alpha + \frac{\varepsilon}{4}$$

teljesül és mivel $f \in \mathcal{R}([c, b], \mathbb{R})$, ezért létezik olyan x_2 felosztása a $[c, b]$ intervallumnak, melyre

$$\beta - \frac{\varepsilon}{4} < s_{x_2}(f) \leq S_{x_2}(f) < \beta + \frac{\varepsilon}{4}.$$

Legyen x az x_1 és x_2 felosztások osztópontjainak az egyesítéséből nyert felosztása az $[a, b]$ intervallumnak. Ekkor a közelítő összegek definíciója alapján

$$s_x(f) = s_{x_1}(f) + s_{x_2}(f) \quad \text{és} \quad S_x(f) = S_{x_1}(f) + S_{x_2}(f),$$

vagyis a fenti egyenlőtlenségek összeadásából

$$\alpha + \beta - \frac{\varepsilon}{2} < s_x(f) \leq S_x(f) < \alpha + \beta + \frac{\varepsilon}{2}$$

adódik.

1.14. Tétel. Minden $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ számra $C([a, b], \mathbb{R}) \subseteq \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$ teljesül.

Bizonyítás. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f \in C([a, b], \mathbb{R})$. Megmutatjuk, hogy minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ paraméterhez létezik olyan $x = (x_i)_{i=0, \dots, n}$ felosztása az $[a, b]$ intervallumnak, melyre $\Omega_I(f) < \varepsilon$ teljesül. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Mivel f folytonos függvény és $[a, b]$ kompakt halmaz, ezért a Heine-tétel alapján létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $u, v \in [a, b]$ számra

$$|u - v| < \delta \rightarrow |f(u) - f(v)| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Legyen $n = \left\lceil \frac{b - a}{\delta} \right\rceil + 1$ és minden $k \in \{0, \dots, n\}$ esetén legyen

$$x_k = a + \frac{k}{n}(b - a),$$

és jelölje x az $(x_i)_{i=0, \dots, n}$ felosztást. Ekkor az 1.11 tétel alapján

$$\begin{aligned} \Omega_x(f) &= \sum_{i=0}^{n-1} \omega(f, [x_i, x_{i+1}]) \cdot (x_{i+1} - x_i) = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sup_{u, v \in [x_i, x_{i+1}]} |f(u) - f(v)| \right) \cdot (x_{i+1} - x_i) < \\ &< \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\varepsilon}{b - a} \cdot \frac{b - a}{n} = \varepsilon. \end{aligned}$$

1.15. Tétel. Ha $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény monoton, akkor $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$.

Bizonyítás. Legyen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monoton növekvő függvény és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Megmutatjuk, hogy létezik olyan $x = (x_i)_{i=0, \dots, n}$ felosztása az $[a, b]$ intervallumnak, melyre $\Omega_I(f) < \varepsilon$ teljesül. Ha $f(b) = f(a)$, akkor a függvény állandó, tehát folytonossága miatt integrálható. Ezért feltesszük, hogy $f(a) < f(b)$.

Legyen $c \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter és vegyünk egy olyan $x = (x_i)_{i=0, \dots, n}$ felosztást, melyre minden $i \in \{0, \dots, n-1\}$ esetén $x_{i+1} - x_i < c$ teljesül. (Ilyen felosztás létezik, hiszen ehhez hasonló konstrukciót az 1.14 tétel bizonyításában.) Ekkor

$$\begin{aligned} \Omega_x(f) &= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sup_{t \in [x_i, x_{i+1}]} f(t) - \inf_{t \in [x_i, x_{i+1}]} f(t) \right) \cdot (x_{i+1} - x_i) \leq \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_{i+1}) - f(x_i)) \cdot c = c(f(b) - f(a)) \end{aligned}$$

teljesül, vagyis ha $c = \frac{\varepsilon}{2(f(b) - f(a))}$ paraméterhez választjuk meg a felosztást, akkor $\Omega_x(f) < \varepsilon$.

1.16. Tétel. Ha $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$, akkor $|f| \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$.

Bizonyítás. Legyen $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$, ezért létezik olyan $x = (x_i)_{i=0, \dots, n}$ felosztása az $[a, b]$ intervallumnak, melyre $\Omega_x(f) < \varepsilon$ teljesül. Mivel minden $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén

$$||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha - \beta|,$$

ezért minden $i \in \{0, \dots, n-1\}$ indexre az 1.11 tétel alapján

$$\omega(|f|, [x_i, x_{i+1}]) = \sup_{u, v \in [x_i, x_{i+1}]} ||f(u)| - |f(v)|| \leq \sup_{u, v \in [x_i, x_{i+1}]} |f(u) - f(v)| = \omega(f, [x_i, x_{i+1}]).$$

Ebből pedig

$$\Omega_x(|f|) = \sum_{i=0}^{n-1} \omega(|f|, [x_i, x_{i+1}]) \cdot (x_{i+1} - x_i) \leq \sum_{i=0}^{n-1} \omega(f, [x_i, x_{i+1}]) \cdot (x_{i+1} - x_i) = \Omega_x(f) < \varepsilon$$

adódik, amiből $|f| \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$ következik.

1.17. Tétel. Minden $f, g \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$ függvényre

1. ha $f \geq 0$, akkor $\int_a^b f \geq 0$;
2. ha $f \geq g$, akkor $\int_a^b f \geq \int_a^b g$;
3. $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$.

Bizonyítás. Legyen $f, g \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$.

1. Ha $f \geq 0$, akkor az $[a, b]$ intervallum bármely I felosztása esetén $s_I(f), S_I(f) \geq 0$, ezért a közös határértékekre is $\int_a^b f \geq 0$ teljesül.
2. Ha $f \geq g$, akkor a $h = f - g$ függvényre $h \geq 0$ teljesül, valamint h az 1.12 tétel értelmében szintén Riemann-integrálható és

$$\int_a^b h = \int_a^b f - \int_a^b g.$$

A tétel 1. pontja alapján $\int_a^b h \geq 0$, ezért $\int_a^b f \geq \int_a^b g$.

3. Mivel $f \leq |f|$, ezért a 2. pont alapján $\int_a^b f \leq \int_a^b |f|$. Továbbá a $-|f| \leq f$ egyenlőtlenség miatt $-\int_a^b |f| \leq \int_a^b f$. Ezek alapján $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$.

1.4. Newton–Leibniz-tétel

1.18. Tétel. (Newton–Leibniz-tétel.) Legyen $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$ és $F \in C([a, b], \mathbb{R})$ olyan függvény, mely differenciálható az $]a, b[$ intervallumon és itt $F' = f$. Ekkor

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Bizonyítás. Legyen $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$, $F \in C([a, b], \mathbb{R})$ legyen olyan függvény, mely differenciálható az $]a, b[$ intervallumon, és itt $F' = f$ teljesül rá, valamint tekintsük az $[a, b]$ intervallum egy tetszőleges $x = (x_i)_{i=0, \dots, n}$ felosztását. Minden $i \in \{0, \dots, n-1\}$ esetén alkalmazzuk az F függvényre a Lagrange-féle középértéktételt az $[x_i, x_{i+1}]$ intervallumon. Ekkor azt kapjuk, hogy létezik olyan $c_i \in]x_i, x_{i+1}[$ szám, melyre

$$F(x_{i+1}) - F(x_i) = F'(c_i)(x_{i+1} - x_i) = f(c_i)(x_{i+1} - x_i)$$

teljesül. Ezeket az egyenleteket összeadva

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} F(x_{i+1}) - F(x_i) &= \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)(x_{i+1} - x_i) \\ F(b) - F(a) &= \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)(x_{i+1} - x_i) \end{aligned}$$

adódik. Mivel $i \in \{0, \dots, n-1\}$ esetén

$$\inf_{t \in [x_i, x_{i+1}]} f(t) \leq f(c_i) \leq \sup_{t \in [x_i, x_{i+1}]} f(t),$$

ezért

$$\begin{aligned} s_x(f) &= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\inf_{t \in [x_i, x_{i+1}]} f(t) \right) (x_{i+1} - x_i) \leq \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i) (x_{i+1} - x_i) = \\ &= F(b) - F(a) \leq \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sup_{t \in [x_i, x_{i+1}]} f(t) \right) (x_{i+1} - x_i) = S_x(f). \end{aligned}$$

Tehát minden x felosztásra

$$s_x(f) \leq F(b) - F(a) \leq S_x(f)$$

teljesül, amiből f integrálhatósága miatt $\int_a^b f = F(b) - F(a)$ következik.

1.19. Tétel. Ha $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olyan függvény mely folytonosan differenciálható az $[a, b]$ halmazon, akkor

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'.$$

Bizonyítás. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olyan függvény mely folytonosan differenciálható az $[a, b]$ halmazon. Ekkor f' folytonos az $[a, b]$ halmazon, tehát $f' \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$ és innen már az 1.18 Newton–Leibniz-tétel alapján következik az állítás.

1.5. Az integrálfüggvény

1.20. Definíció. Az $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$ függvény *integrálfüggvénye*

$$I_f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \int_a^x f.$$

1.21. Tétel. Legyen $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$.

1. Az I_f függvény folytonos.
2. Ha f folytonos az $x_0 \in]a, b[$ pontban, akkor I_f differenciálható az x_0 pontban és $I'_f(x_0) = f(x_0)$.
3. Ha $f \in C([a, b], \mathbb{R})$, akkor létezik primitív függvénye.

Bizonyítás. Legyen $f \in \mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$, $x_0 \in]a, b[$ és jelölje I_f az f integrálfüggvényét. Mivel f korlátos, ezért létezik olyan $K \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in [a, b]$ esetén $|f(x)| < K$.

1. Legyen $x, y \in [a, b]$. Ekkor az 1.13 tétel alapján

$$I_f(x) - I_f(y) = \int_a^x f - \int_a^y f = \int_y^x f,$$

vagyis felhasználva az 1.17 tételt

$$|I_f(x) - I_f(y)| < K |x - y|$$

adódik, amiből az $y \rightarrow x$ határértékkel kapjuk az

$$\lim_x I_f = I_x$$

egyenletet, ami az I_f függvény x pontbeli folytonosságát garantálja.

2. Tegyük fel, hogy f folytonos az x_0 pontban és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor az f függvény x_0 pontbeli folytonossága miatt létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, melyre

$$\forall z \in [a, b] : |z - x_0| < \delta \rightarrow |f(z) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Tegyük fel, hogy $z \in]x_0, x_0 + \delta[\cap [a, b]$. Ekkor az 1.13 tétel és a fenti egyenlőtlenség alapján

$$I_f(z) - I_f(x_0) = \int_a^z f - \int_a^{x_0} f = \int_{x_0}^z f$$

$$(f(x_0) - \varepsilon)(z - x_0) \leq \int_{x_0}^z f \leq (f(x_0) + \varepsilon)(z - x_0),$$

melyek kombinációjából

$$f(x_0) - \varepsilon \leq \frac{I_f(z) - I_f(x_0)}{z - x_0} \leq f(x_0) + \varepsilon$$

adódik. Vagyis

$$\lim_{z \rightarrow x_0 + 0} \frac{I_f(z) - I_f(x_0)}{z - x_0} = f(x_0).$$

Teljesen hasonlóan igazolható, hogy az x_0 pontban vett bal oldali határérték is létezik és értéke $f(x_0)$. Tehát

$$I'_f(x_0) = \lim_{z \rightarrow x_0} \frac{I_f(z) - I_f(x_0)}{z - x_0} = f(x_0).$$

3. Ha f folytonos, akkor a 2. pont alapján I_f az f egy primitív függvénye.

2. Normált terek

2.1. Normált terek topológiája

2.1. Definíció. A V valós vagy komplex vektortéren értelmezett

$$\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \quad x \mapsto \|x\|$$

függvényt *normának* nevezzük, ha az alábbiak teljesülnek rá.

- $\forall x \in V : \|x\| = 0 \iff x = 0$
- $\forall x \in V, \forall \lambda \in \mathbb{K} : \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
- $\forall x, y \in V : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Az $(V, \|\cdot\|)$ párt *normált térnek* nevezzük, ha V valós vagy komplex vektortér és $\|\cdot\|$ norma a V vektortéren.

Magyarázat. Az állítások teljesen precíz kimondását néha megnehezíti az egyetlen nullvektorból álló $V = \{0\}$ normált tér speciális esete. Ezért a továbbiakban hallgatólágon mindig feltesszük, hogy nem az egyetlen pontból álló normált térrel foglalkozunk.

2.2. Tétel. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér. Minden $x, y \in V$ esetén

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér és $x, y \in V$ tetszőleges. A norma tulajdonsága alapján

$$\|x\| = \|(x - y) + y\| \leq \|x - y\| + \|y\| \quad \rightarrow \quad \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|,$$

az x és y szerepét felcserélve és kihasználva, hogy $\|x - y\| = \|y - x\|$

$$\|y\| - \|x\| \leq \|x - y\|$$

adódik. Vagyis

$$\pm (\|x\| - \|y\|) \leq \|x - y\|,$$

amiből következik a bizonyítandó állítás.

2.3. Tétel. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér. Ekkor a

$$d_{\|\cdot\|} : V \times V \rightarrow \mathbb{R} \quad (x, y) \mapsto \|x - y\|$$

leképezés metrika, így $(V, d_{\|\cdot\|})$ metrikus tér.

Bizonyítás. A norma definíciójából rögtön adódnak a metrikára megkövetelt tulajdonságok.

Magyarázat. Tehát minden normált tér egyben metrikus tér is, így értelmezhető rajta minden olyan fogalom melyet metrikus téren értelmeztünk. Most a metrikus tereken bevezetett fogalmak jellemzését adjuk meg a norma segítségével.

2.4. Tétel. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér.

1. Legyen $x \in V$ és $r \in \mathbb{R}^+$. Az x középpontú r sugarú nyílt gömb

$$B_r(x) = \{y \in V \mid \|x - y\| < r\}.$$

2. Az $X \subseteq V$ halmaz nyílt, ha minden $x \in X$ ponthoz létezik $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(x) \subseteq X$ teljesül.
3. Az $X \subseteq V$ halmaz zárt, ha $V \setminus X$ nyílt.
4. Az $X \subseteq V$ halmaz korlátos, ha létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$ és $x \in V$, hogy $X \subseteq B_r(x)$ teljesül.

Bizonyítás. A normált téren bevezetett metrika definíciója alapján nyilvánvaló.

2.5. Tétel. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és $p \in [1, \infty[$. A $\mathbb{K}^n$ téren a

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_p : \mathbb{K}^n &\rightarrow \mathbb{R}_0^+ & x &\mapsto \|x\|_p \triangleq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ \|\cdot\|_\infty : \mathbb{K}^n &\rightarrow \mathbb{R}_0^+ & x &\mapsto \|x\|_\infty \triangleq \max\{|x_k| \mid k \in \{1, \dots, n\}\} \end{aligned}$$

leképezések normák (melyet p -normának, illetve sup-normának vagy maximum-normának nevezünk).

Bizonyítás. Egyedül a normákra vonatkozó háromszög-egyenlőtlenség nem adódik rögtön a definícióból. Legyen $x, y \in \mathbb{K}^n$ tetszőleges. Adott $p \in [1, \infty[$ esetén

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

a Minkowski-egyenlőtlenség következménye. Mivel az x, y vektor minden $k \in \{1, \dots, n\}$ komponensére $|x_k + y_k| \leq |x_k| + |y_k|$ teljesül, ezért

$$\begin{aligned} \|x + y\|_\infty &= \max\{|x_k + y_k| \mid k \in \{1, \dots, n\}\} \leq \max\{|x_k| + |y_k| \mid k \in \{1, \dots, n\}\} \leq \\ &\leq \max\{|x_k| \mid k \in \{1, \dots, n\}\} + \max\{|y_k| \mid k \in \{1, \dots, n\}\} = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty. \end{aligned}$$

2.2. Sorok és sorozatok normált terekben

2.6. Tétel. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, $c \in \mathbb{K}$, $a, b : \mathbb{N} \rightarrow V$ és $\lambda : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$ konvergens sorozat.

1. Az $a + b$ sorozat konvergens és $\lim(a + b) = (\lim a) + (\lim b)$.
2. A ca sorozat konvergens és $\lim(ca) = c(\lim a)$.
3. A λa sorozat konvergens és $\lim(\lambda a) = (\lim \lambda)(\lim a)$.
4. Az $\|a\|$ sorozat konvergens és $\lim \|a\| = \|\lim a\|$.

Bizonyítás. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, $a, b : \mathbb{N} \rightarrow V$ és $\lambda : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$ konvergens sorozat az $A = \lim a$, $B = \lim b$ és $\Lambda = \lim \lambda$ határértékekkel, valamint legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges szám.

1. A $\frac{\varepsilon}{2}$ számhoz létezik olyan $N_a, N_b \in \mathbb{N}$ küszöbindex, melyre minden $n > N_a$ számra $\|a_n - A\| < \frac{\varepsilon}{2}$ és minden $n > N_b$ számra $\|b_n - B\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ekkor az $N = \max\{N_a, N_b\}$ küszöbindexre teljesül az, hogy minden $n > N$ esetén

$$\|(a_n + b_n) - (A + B)\| \leq \|a_n - A\| + \|b_n - B\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

2. A $c = 0$ számra nyilván igaz az állítás, ezért feltehető, hogy $c \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Az a sorozat konverenciája miatt létezik olyan $N_a \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > N_a$ esetén $\|a_n - A\| < \frac{\varepsilon}{|c|}$. Ekkor minden $n > N_a$ számra

$$\|ca_n - cA\| = |c| \cdot \|a_n - A\| < |c| \cdot \frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon.$$

3. Mivel a λ sorozat korlátos ezért létezik olyan $K \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra $|\lambda_n| < K$. Tegyük fel, hogy $A \neq 0$. Legyen $N_a \in \mathbb{N}$ olyan küszöbindex, hogy minden $n > N_a$ esetén $\|a_n - A\| < \frac{\varepsilon}{2K}$ és legyen $N_\lambda \in \mathbb{N}$ olyan küszöbindex, hogy minden $n > N_\lambda$ esetén $|\lambda_n - \Lambda| < \frac{\varepsilon}{2\|A\|}$. Ekkor az $N = \max\{N_a, N_b\}$ küszöbindexre teljesül az, hogy minden $n > N$ esetén

$$\begin{aligned} \|\lambda_n a_n - \Lambda A\| &= \|\lambda_n a_n - \lambda_n A + \lambda_n A - \Lambda A\| \leq |\lambda_n| \cdot \|a_n - A\| + \|A\| \cdot |\lambda_n - \Lambda| < \\ &< K \cdot \frac{\varepsilon}{2K} + \|A\| \cdot \frac{\varepsilon}{2\|A\|} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Ha $A = 0$, akkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ olyan küszöbindex, hogy minden $n > N$ esetén $\|a_n\| < \frac{\varepsilon}{K}$. Ekkor

$$\|\lambda_n a_n - 0\| \leq K \cdot \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon.$$

4. Ha $N_a \in \mathbb{N}$ olyan küszöbindex, hogy minden $n > N_a$ esetén $\|a_n - A\| < \varepsilon$, akkor minden $n > N_a$ számra

$$\| \|a_n\| - \|A\| \| \leq \|a_n - A\| < \varepsilon.$$

2.7. Definíció. A teljes normált tereket *Banach-tereknek* nevezzük.

2.8. Definíció. (*Sorok.*) Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér és legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow V$ tetszőleges sorozat.

- Azt a jól meghatározott $\sum a : \mathbb{N} \rightarrow V$ sorozatot, melyet $n \in \mathbb{N}$ esetén $\left(\sum a\right)_n = \sum_{i=0}^n a_i$ definiál, az a sorozathoz rendelt sornak vagy röviden csak *sornak* nevezzük és olykor a $\sum_n a_n$ szimbólummal jelöljük.
- Azt mondjuk, hogy az a sorozat által meghatározott sor *konvergens*, ha a $\sum a$ sorozat konvergens. Ekkor a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \triangleq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k$ jelölést használjuk.
- Azt mondjuk, hogy az a sorozat által meghatározott sor *divergens*, ha a $\sum a$ sorozat divergens.
- Azt mondjuk, hogy a $\sum a$ sor *abszolút konvergens*, ha a $\sum \|a\|$ sor konvergens.

2.9. Tétel. (*A konvergencia szükséges feltétele.*) Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér és $a : \mathbb{N} \rightarrow V$ olyan sorozat, melyre a $\sum a$ sor konvergens. Ekkor $\lim a = 0$ teljesül.

Bizonyítás. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, $a : \mathbb{N} \rightarrow V$ olyan sorozat, melyre a $\sum a$ sor konvergens. Legyen $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $\alpha_n = \sum_{k=0}^n a_k$. Ekkor az $n \mapsto \alpha_n$ és az $n \mapsto \alpha_{n+1}$ sorozatok konvergensnek és határértékük A . Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$a_{n+1} = \alpha_{n+1} - \alpha_n,$$

ezért

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_{n+1} - \alpha_n) = A - A = 0.$$

Amiből $\lim a = 0$ következik.

2.10. Tétel. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér és $a : \mathbb{N} \rightarrow V$ olyan sorozat, melyre a $\sum a$ sor abszolút konvergens.

1. Ha V Banach-tér, akkor a $\sum a$ sor konvergens.
2. Ha a $\sum a$ sor konvergens, akkor

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|a_k\|.$$

Bizonyítás. 1. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ Banach-tér, $a : \mathbb{N} \rightarrow V$ olyan sorozat, melyre a $\sum a$ sor abszolút konvergens és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Továbbá minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $\alpha_n = \sum_{k=0}^n a_k$. Mivel a $\sum a$ sor abszolút konvergens, ezért létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ természetes számra $\sum_{k=n}^{\infty} \|a_k\| < \varepsilon$. Ekkor minden $m, n > N$ természetes számra $m > n$ mellett

$$\|\alpha_m - \alpha_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^m a_k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^m \|a_k\| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|a_k\| < \varepsilon.$$

Vagyis az $n \mapsto \alpha_n$ sorozat Cauchy-sorozat, ezért létezik $A = \lim \alpha$, vagyis létezik a $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ határérték.

2. Tegyük fel, hogy a $\sum a$ sor konvergens. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left\| \sum_{k=0}^n a_k \right\| \leq \sum_{k=0}^n \|a_k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|a_k\|,$$

amiből az $n \rightarrow \infty$ határátmenettel adódik a bizonyítandó állítás.

2.3. Normák ekvivalenciája

2.11. Tétel. Legyen $\|\cdot\|'$ és $\|\cdot\|$ norma a V vektortéren. Az alábbi állítások ekvivalensek.

1. Minden $\|\cdot\|$ norma szerinti $X \subseteq V$ nyílt halmaz nyílt a $\|\cdot\|'$ norma szerint is.
2. Minden $x \in V$ és $r \in \mathbb{R}^+$ paraméterekhez létezik olyan $R \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_R^{\|\cdot\|'}(x) \subseteq B_r^{\|\cdot\|}(x)$.
3. Létezik olyan $K \in \mathbb{R}^+$ szám, hogy minden $x \in V$ vektorra $\|x\| \leq K \|x\|'$.

Bizonyítás. Legyen $\|\cdot\|'$ és $\|\cdot\|$ norma a V vektortéren.

$1 \Rightarrow 2$ Minden $x \in V$ és $r \in \mathbb{R}^+$ esetén $B_r^{\|\cdot\|}(x)$ nyílt a $\|\cdot\|$ norma szerint, ezért a $\|\cdot\|'$ norma szerint is nyílt. Mivel x belső pontja a $B_r^{\|\cdot\|}(x)$ halmaznak a $\|\cdot\|'$ norma szerint, ezért létezik olyan $R \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_R^{\|\cdot\|'}(x) \subseteq B_r^{\|\cdot\|}(x)$ teljesül.

$2 \Rightarrow 3$ Az $x = 0$ vektorhoz és az $r = 1$ számhoz létezik olyan $R \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_R^{\|\cdot\|'}(0) \subseteq B_1^{\|\cdot\|}(0)$. Vagyis minden $y \in V$ vektor esetén ha $\|y\|' < R$, akkor $\|y\| < 1$. Legyen $z \in V$ tetszőleges vektor. Ha $z \neq 0$, akkor $Z = \frac{R}{2\|z\|'} \cdot z$ olyan vektor, melyre $\|Z\|' = \frac{R}{2} < R$, vagyis $\|Z\| = \frac{R}{2\|z\|'} \cdot \|z\| < 1$, amiből $\|z\| \leq \frac{2}{R} \cdot \|z\|'$ adódik. Ha $z = 0$, akkor is teljesül a $\|z\| \leq \frac{2}{R} \cdot \|z\|'$ egyenlőtlenség. Vagyis a

$K = \frac{2}{R}$ jelöléssel az adódik, hogy minden $x \in V$ esetén $\|x\| \leq K \|x\|'$.

$3 \Rightarrow 1$ Legyen $K \in \mathbb{R}^+$ olyan szám, hogy minden $x \in V$ vektorra $\|x\| \leq K \|x\|'$ teljesül és legyen $X \subseteq V$ a $\|\cdot\|$ norma szerint nyílt halmaz. Ha $z \in X$, akkor létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r^{\|\cdot\|}(z) \subseteq X$. Megmutatjuk, hogy $R = \frac{r}{K}$ esetén $B_R^{\|\cdot\|'}(z) \subseteq B_r^{\|\cdot\|}(z)$ teljesül, vagyis z belső pontja az X halmaznak a $\|\cdot\|'$ norma szerint is. Ha $y \in B_R^{\|\cdot\|'}(z)$, akkor nyilván $\|y - z\|' < R$ és azt kell igazolni, hogy $\|y - z\| < r$ teljesül. Ez rögtön adódik a

$$\|y - z\| \leq K \cdot \|y - z\|' < K \cdot R = K \cdot \frac{r}{K} = r$$

egyenlőtlenségből.

2.12. Tétel. Legyen $\|\cdot\|'$ és $\|\cdot\|$ norma a V vektortéren. A $\|\cdot\|'$ és $\|\cdot\|$ normák pontosan akkor ekvivalensek, ha léteznek olyan $K_1, K_2 \in \mathbb{R}^+$ paraméterek, hogy minden $x \in V$ vektorra $\|x\| \leq K_1 \|x\|'$ és $\|x\|' \leq K_2 \|x\|$ teljesül, melyet úgy is megfogalmazhatunk, hogy léteznek olyan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ paraméterek, hogy minden $x \in V$ vektorra $\alpha \|x\| \leq \|x\|' \leq \beta \|x\|$.

Bizonyítás. Az előző állítás közvetlen következménye.

2.13. Tétel. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén a $\mathbb{K}^n$ vektortéren bármely két norma ekvivalens.

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén a $\mathbb{K}^n$ téren a végtelen norma ekvivalens bármely más normával. Legyen $\|\cdot\|$ tetszőleges norma. Legyen továbbá $(e_i)_{i=1, \dots, n}$ a $\mathbb{K}^n$ tér kanonikus bázisa, azaz minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén e_i legyen az a vektor, melynek az i -edik komponense 1,

minden más komponense 0. Definiáljuk még a $K_1 = \max \{\|e_i\| \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$ számot. Ekkor minden $x \in \mathbb{K}^n$ esetén

$$\|x\| = \left\| \sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \cdot \|e_i\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \cdot K_1 \leq K_1 n \cdot \|x\|_\infty.$$

Most megmutatjuk, hogy a $\|\cdot\| : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvény folytonos a $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ térben. Ehhez igazolni kell, hogy minden $x \in \mathbb{K}^n$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ elemekhez létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $y \in \mathbb{K}^n$ vektorra

$$\|x - y\|_\infty < \delta \quad \Rightarrow \quad \|\|x\| - \|y\|\| < \varepsilon$$

teljesül. A $\delta = \frac{\varepsilon}{nK_1}$ választás jó lesz, ugyanis ebben az esetben ha $\|x - y\|_\infty < \delta$, akkor

$$\|\|x\| - \|y\|\| \leq \|x - y\| \leq K_1 n \|x - y\|_\infty < \varepsilon.$$

Most tekintsük az $S = \{x \in \mathbb{K}^n \mid \|x\|_\infty = 1\}$ halmazt. Mivel a $\|\cdot\|_\infty$ függvény nyilván folytonos a $\|\cdot\|_\infty$ norma szerint és $S = \|\cdot\|_\infty^{-1}(\{1\})$, ezért S egy zárt halmaz folytonos függvény általi ősképe, tehát zárt a $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ térben. Továbbá S nyilván korlátos, ezért S kompakt a $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ térben. Mivel $\|\cdot\|$ folytonos függvény, ezért a Weierstrass-tétel miatt léteznek olyan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ számok, hogy minden $x \in S$ vektorra

$$\alpha \leq \|x\| \leq \beta$$

teljesül. Ha $x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ tetszőleges vektor, akkor $\frac{x}{\|x\|_\infty} \in S$, ezért $\alpha \leq \left\| \frac{x}{\|x\|_\infty} \right\| = \frac{\|x\|}{\|x\|_\infty}$. Vagyis

$x \in \mathbb{K}^n$ esetén $\|x\|_\infty \leq \frac{1}{\alpha} \cdot \|x\|$ teljesül.

Mivel a normák ekvivalenciája tranzitív, ezért megmutattuk, hogy a $\mathbb{K}^n$ téren bármely két norma ekvivalens.

2.4. Folytonos lineáris leképezések

2.14. Tétel. Legyen $(V_1, \|\cdot\|_1)$ és $(V_2, \|\cdot\|_2)$ normált tér, valamint $A : V_1 \rightarrow V_2$ lineáris leképezés. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.

1. Az A leképezés folytonos.
2. Az A leképezés folytonos a 0 pontban.
3. $\sup_{\|x\|_1 \leq 1} \|Ax\|_2 < \infty$
4. Az A leképezés egyenletesen folytonos.

Bizonyítás. Legyen $(V_1, \|\cdot\|_1)$ és $(V_2, \|\cdot\|_2)$ normált tér, valamint $A : V_1 \rightarrow V_2$ lineáris leképezés.

$1 \Rightarrow 2$ Ha A folytonos, akkor minden pontban folytonos.

$2 \Rightarrow 3$ Ha A folytonos a 0 pontban, akkor létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $\|x - 0\|_1 < \delta$ esetén $\|Ax - A0\|_2 < 1$. Mivel A lineáris, ezért $A0 = 0$. Ha $x \in V_1$ olyan vektor, melyre $\|x\|_1 \leq 1$ teljesül, akkor $\left\| \frac{\delta}{2} \cdot x \right\|_1 < \delta$, ezért $\left\| A \left(\frac{\delta}{2} \cdot x \right) \right\|_2 < 1$, vagyis $\|Ax\|_2 < \frac{2}{\delta}$. Tehát minden $x \in V_1$, $\|x\|_1 \leq 1$ esetén $\|Ax\|_2 < \frac{2}{\delta}$, ezért

$$\sup_{\|x\|_1 \leq 1} \|Ax\|_2 \leq \frac{2}{\delta} < \infty.$$

$3 \Rightarrow 4$ Legyen $K = \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \|Ax\|_2$, valamint legyen $z \in V_1$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméterek.

Megmutatjuk, hogy ha $\delta = \frac{\varepsilon}{K+1}$ és a $z \in V$ vektorra $\|y - z\|_1 < \delta$ teljesül, akkor $\|Ay - Az\|_2 < \varepsilon$. Ez az alábbiakból következik $y \neq z$ esetén.

$$\|Ay - Az\|_2 = \|A(y - z)\|_2 = \|y - z\|_1 \cdot \left\| A \left(\frac{y - z}{\|y - z\|_1} \right) \right\|_2 \leq \|y - z\|_1 \cdot K \leq \delta \cdot K = \varepsilon \cdot \frac{K}{K+1} < \varepsilon$$

Ezek alapján az A leképezés egyenletesen folytonos.

$4 \Rightarrow 1$ Minden egyenletesen folytonos leképezés folytonos.

Jelölés. Legyen $(V_1, \|\cdot\|_1)$ és $(V_2, \|\cdot\|_2)$ normált tér. A $V_1 \rightarrow V_2$ folytonos lineáris leképezések halmaza a továbbiakban a $\mathcal{L}(V_1, V_2)$ jelölést fogjuk használni.

2.15. Definíció. Adott $(V, \|\cdot\|)$ normált tér esetén a folytonos lineáris $V \rightarrow \mathbb{K}$ leképezéseket *folytonos lineáris funkcionáloknak*, vagy röviden csak *funkcionáloknak* nevezzük. Bevezetjük még a $V' \triangleq \mathcal{L}(V, \mathbb{K})$ jelölést a funkcionálok halmazára. A V' teret a V normált tér topologikus duálisának nevezzük.

Magyarázat. A következő állításokban összefoglaljuk az $\mathcal{L}(V_1, V_2)$ tér főbb jellemzőit.

2.16. Tétel. Legyen $(V_1, \|\cdot\|_1)$ és $(V_2, \|\cdot\|_2)$ normált tér. Az $\mathcal{L}(V_1, V_2)$ tér vektortér, melyen a

$$\|\cdot\| : \mathcal{L}(V_1, V_2) \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \quad A \mapsto \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \|Ax\|_2$$

leképezés norma.

Bizonyítás. Legyen $(V_1, \|\cdot\|_1)$ és $(V_2, \|\cdot\|_2)$ normált tér, valamint legyen $A, B \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ és $\lambda \in \mathbb{K}$. Mivel A és B folytonos, ezért a 2.14 tétel alapján $\|A\|, \|B\| < \infty$. Ekkor

$$\begin{aligned} \|A + B\| &= \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \|(A + B)x\|_2 = \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \|Ax + Bx\|_2 \leq \sup_{\|x\|_1 \leq 1} (\|Ax\|_2 + \|Bx\|_2) \leq \\ &\leq \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \|Ax\|_2 + \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \|Bx\|_2 = \|A\| + \|B\|; \\ \|\lambda A\| &= \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \|\lambda Ax\|_2 = |\lambda| \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \|Ax\|_2 = |\lambda| \cdot \|A\| \end{aligned}$$

teljesül, vagyis $\|A + B\|, \|\lambda A\| < \infty$, ezért a 2.14 tétel alapján $A + B, \lambda A \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$, vagyis $\mathcal{L}(V_1, V_2)$ vektortér. Továbbá a fenti egyenletek igazolják az $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ és a $\|\lambda A\| = |\lambda| \cdot \|A\|$ egyenleteket.

Tegyük fel, hogy valamely $A \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ elemre $\|A\| = 0$ teljesül. Ekkor minden $x \in V_1$ vektorra $\|x\|_1 \leq 1$ esetén $\|Ax\|_2 = 0$, vagyis $Ax = 0$. Mivel minden $x \in V_1 \setminus \{0\}$ vektor esetén az $x' = \frac{x}{\|x\|_1}$ vektorra $\|x'\|_1 \leq 1$, ezért $Ax' = \frac{1}{\|x\|_1} Ax = 0$, vagyis $Ax = 0$. Ebből $A = 0$ következik. Továbbá $\|0\| = 0$ nyilvánvaló módon teljesül.

Magyarázat. Későbbi számolások és bizonyítások során számtalanszor fogjuk használni hivatkozás nélkül az alábbi tételben foglalt egyenlőtlenséget.

2.17. Tétel. Legyen $(V_1, \|\cdot\|_1)$ és $(V_2, \|\cdot\|_2)$ normált tér, valamint legyen $A \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ és $x \in V_1$. Ekkor

$$\|Ax\|_2 \leq \|A\| \cdot \|x\|_1.$$

Bizonyítás. Mivel minden $x \in V_1 \setminus \{0\}$ vektor esetén az $x' = \frac{x}{\|x\|_1}$ vektorra $\|x'\|_1 \leq 1$, ezért $\|Ax'\|_2 \leq \|A\|$, amiből átrendezéssel adódik a bizonyítandó egyenlőtlenség.

2.18. Tétel. Legyen $(V_1, \|\cdot\|_1)$, $(V_2, \|\cdot\|_2)$ és $(V_3, \|\cdot\|_3)$ normált tér, valamint legyen $A \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ és $B \in \mathcal{L}(V_2, V_3)$. Ekkor $BA \in \mathcal{L}(V_1, V_3)$, továbbá

$$\|BA\| \leq \|B\| \cdot \|A\|$$

teljesül, mely tulajdonságot a norma szubmultiplikativitásának nevezzük.

Bizonyítás. Legyen $(V_1, \|\cdot\|_1)$, $(V_2, \|\cdot\|_2)$ és $(V_3, \|\cdot\|_3)$ normált tér, valamint legyen $A \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ és $B \in \mathcal{L}(V_2, V_3)$. Mivel minden $x \in V_1$ vektor esetén

$$\|BAx\|_3 \leq \|B\| \cdot \|Ax\|_2 \leq \|B\| \cdot \|A\| \cdot \|x\|_1,$$

ezért

$$\|BA\| = \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \|BAx\|_3 \leq \sup_{\|x\|_1 \leq 1} (\|B\| \cdot \|A\| \cdot \|x\|_1) = \|B\| \cdot \|A\|.$$

Mivel $\|BA\| < \infty$, ezért BA folytonos lineáris leképezés.

2.5. Folytonos lineáris leképezések terének tulajdonságai

2.19. Tétel. Ha $(V_1, \|\cdot\|_1)$ normált tér és $(V_2, \|\cdot\|_2)$ Banach-tér, akkor $(\mathcal{L}(V_1, V_2), \|\cdot\|)$ is Banach-tér.

Bizonyítás. Legyen $(V_1, \|\cdot\|_1)$ normált tér, $(V_2, \|\cdot\|_2)$ Banach-tér és $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{L}(V_1, V_2)$ Cauchy-sorozat. Legyen $x \in V_1$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Mivel a Cauchy-sorozat, ezért létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n, m > N$ természetes számra $\|a_n - a_m\| < \varepsilon$, vagyis az

$$\|a_n(x) - a_m(x)\| \leq \|x\| \cdot \|a_n - a_m\| < \|x\| \cdot \varepsilon$$

egyenlőtlenség alapján $n \mapsto a_n(x)$ Cauchy-sorozat a V_2 teljes térben, ezért létezik a $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(x)$ határérték minden $x \in V_1$ esetén. Ennek a segítségével definiáljuk a

$$A : V_1 \rightarrow V_2 \quad x \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} a_n(x)$$

függvényt.

Megmutatjuk, hogy A lineáris leképezés. Legyen $x, y \in V_1$ és $\lambda \in \mathbb{K}$ tetszőleges. Ekkor az

$$\begin{aligned} A(x+y) &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n(x+y) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n(x) + a_n(y)) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n(x) + \lim_{n \rightarrow \infty} a_n(y) = Ax + Ay \\ A(\lambda x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n(\lambda x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda a_n(x)) = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} a_n(x) = \lambda \cdot Ax \end{aligned}$$

egyenlőségek igazolják A linearitását.

Megmutatjuk, hogy A folytonos lineáris leképezés. Mivel a Cauchy-sorozat, ezért korlátos is, vagyis létezik olyan $K \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\|a_n\| < K$. Ekkor minden $x \in V_1$, $\|x\|_1 \leq 1$ vektorra

$$\|a_n x\|_2 \leq \|a_n\|_1 \cdot \|x\| < K$$

egyenlőtlenség teljesül, amiből

$$\begin{aligned} \|A\| &= \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \|Ax\|_2 = \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} a_n(x) \right\|_2 = \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \lim_{n \rightarrow \infty} \|a_n(x)\|_2 \leq \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \limsup_{n \rightarrow \infty} \|a_n(x)\|_2 \leq \\ &\leq \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \limsup_{n \rightarrow \infty} \|a_n\| \|x\|_1 \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|a_n\| \leq K \end{aligned}$$

következik, ami a 2.14 tétel alapján azt jelenti, hogy A folytonos lineáris leképezés. Vagyis $A \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$.

Azt kell még igazolni, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ teljesül a $\mathcal{L}(V_1, V_2)$ normált térben. Ennek igazolásához legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Mivel a Cauchy-sorozat, ezért létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n, m > N$ természetes számra $\|a_n - a_m\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ekkor a

$$\sup_{\|x\|_1 \leq 1} \|a_n x - a_m x\|_2 \leq \sup_{\|x\|_1 \leq 1} \|a_n - a_m\| \cdot \|x\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}$$

egyenlőtlenségen végrehajtva az $n \rightarrow \infty$ határátmenetet

$$\|A - a_m\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

adódik. Így minden $m > N$ számra $\|A - a_m\| < \varepsilon$ teljesül, vagyis $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$.

2.20. Tétel. Legyen $(V_1, \|\cdot\|_1)$ és $(V_2, \|\cdot\|_2)$ normált tér és legyen $A : V_1 \rightarrow V_2$ lineáris leképezés. Ha $\dim V_1 < \infty$, akkor A folytonos. Azaz minden véges dimenziós vektortéren értelmezett lineáris leképezés folytonos.

Bizonyítás. Legyen $(V_1, \|\cdot\|_1)$ és $(V_2, \|\cdot\|_2)$ normált tér, valamint tegyük fel, hogy V_1 véges dimenziós. Legyen $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ egy bázisa a V_1 vektortérnek és a V_1 téren tekintsük a

$$\|\cdot\|'_1 : V_1 \rightarrow \mathbb{R} \quad \sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i \mapsto \left\| \sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i \right\|'_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

normát. Legyen továbbá $(V_2, \|\cdot\|_2)$ normált tér és $A : V_1 \rightarrow V_2$ lineáris leképezés. Definiáljuk a $K = \max \{\|Ae_i\|_2 \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$ számot. Ekkor minden $x \in V_1$ esetén

$$\|Ax\|_2 = \left\| \sum_{i=1}^n x_i \cdot Ae_i \right\|_2 \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \cdot \|Ae_i\|_2 \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \cdot K = K \cdot \|x\|'_1,$$

vagyis

$$\|A\| = \sup_{\|x\|'_1 \leq 1} \|Ax\|_2 \leq \sup_{\|x\|'_1 \leq 1} (K \cdot \|x\|'_1) = K < \infty,$$

ezért A folytonos a $(V_1, \|\cdot\|'_1)$ téren. Mivel V_1 véges dimenziós, ezért a 2.24 tétel alapján a $\|\cdot\|_1$ és a $\|\cdot\|'_1$ normák ekvivalensek egymással ezért A a $(V_1, \|\cdot\|_1)$ téren is folytonos.

2.21. Tétel. (Carl Neumann-féle sor.) Legyen $(V, \|\cdot\|_V)$ Banach-tér és legyen $A \in \mathcal{L}(V, V)$. Ha $\|A\| < 1$, akkor a $\sum_{n=0}^{\infty} A^n$ sor konvergens, az $1 - A$ elem invertálható, inverze folytonos lineáris leképezés és

$$\sum_{n=0}^{\infty} A^n = (1 - A)^{-1}$$

teljesül, ahol 1 jelöli a $V \rightarrow V$ identitásfüggvényt.

Bizonyítás. Legyen $(V, \|\cdot\|_V)$ Banach-tér és legyen $A \in \mathcal{L}(V, V)$ olyan, hogy $\|A\| < 1$. A norma szubmultiplikativitása miatt minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\|A^n\| \leq \|A\|^n$. Ebből $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\| = 0$ adódik, melynek következménye, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = 0$. Továbbá a $\sum_n A^n$ sor abszolút konvergens, mert $\sum_n \|A^n\| \leq \sum_n \|A\|^n < \infty$, hiszen $\|A\| < 1$. A minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén érvényes

$$(1 - A) \cdot \sum_{k=0}^n A^k = \left(\sum_{k=0}^n A^k \right) \cdot (1 - A) = 1 - A^{n+1}$$

képletnél az $n \rightarrow \infty$ határátmenetet véve az eddigi megállapítások alapján

$$(1 - A) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} A^k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} A^k \right) \cdot (1 - A) = 1$$

adódik, vagyis $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ az $1 - A$ elem inverze.

2.22. Tétel. Legyen V Banach-tér és legyen

$$G(\mathcal{L}(V, V)) \triangleq \{a \in \mathcal{L}(V, V) \mid \exists a^{-1} \in \mathcal{L}(V, V)\}.$$

(Vagyis $G(\mathcal{L}(V, V))$ jelöli a azon invertálható lineáris leképezések halmazát, melyek inverze is folytonos.) Ekkor

1. minden $a \in G(\mathcal{L}(V, V))$ elemre $B_{\frac{1}{\|a^{-1}\|}}(a) \subseteq G(\mathcal{L}(V, V))$;
2. a $G(\mathcal{L}(V, V))$ halmaz nyílt;
3. az $i : G(\mathcal{L}(V, V)) \rightarrow G(\mathcal{L}(V, V))$, $i(a) = a^{-1}$ leképezés folytonos.

Bizonyítás. Legyen V Banach-tér és legyen

$$G(\mathcal{L}(V, V)) \stackrel{\Delta}{=} \{a \in \mathcal{L}(V, V) \mid \exists a^{-1} \in \mathcal{L}(V, V)\}.$$

1. Legyen $a \in G(\mathcal{L}(V, V))$ és legyen $b \in B_{\frac{1}{\|a^{-1}\|}}(a)$ tetszőleges elem. Ekkor $\|a - b\| < \frac{1}{\|a^{-1}\|}$, vagyis $\|a - b\| \cdot \|a^{-1}\| < 1$. A norma szubmultiplikativitása miatt

$$\|\text{id}_V - ba^{-1}\| = \|(a - b)a^{-1}\| \leq \|a - b\| \cdot \|a^{-1}\| < 1,$$

ami a Carl Neumann-féle sorfejtés miatt azt jelenti, hogy az $\text{id}_V - (ba^{-1})$ elem invertálható és az inverze is folytonos lineáris leképezés, vagyis $ba^{-1} \in G(\mathcal{L}(V, V))$. Legyen $b' = a^{-1}(ba^{-1})^{-1}$. Ekkor $bb' = 1$ nyilván teljesül, valamint ha a

$$(ba^{-1})^{-1}(ba^{-1}) = 1$$

egyenletet megszorozzuk jobbról az a , balról az a^{-1} mennyiségekkel, akkor $b'b = 1$ adódik. Tehát b' a b inverze, vagyis $b \in G(\mathcal{L}(V, V))$.

2. Mivel a $G(\mathcal{L}(V, V))$ halmaz minden pontja belső pont, ezért nyílt halmaz.
3. Legyen $a \in G(\mathcal{L}(V, V))$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Megmutatjuk, hogy létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $x \in \mathcal{L}(V, V)$ elemre

$$\|a - x\| < \delta \quad \rightarrow \quad x \in G(\mathcal{L}(V, V)) \quad \wedge \quad \|a^{-1} - x^{-1}\| < \varepsilon$$

teljesül, ami azt jelenti, hogy az i leképezés folytonos az a pontban. Legyen $\delta_1 = \frac{1}{2\|a^{-1}\|}$ és $x \in B_{\delta_1}(a)$. Ekkor az 1. pont alapján $x \in G(\mathcal{L}(V, V))$. Tekintsük a következő átalakításokat.

$$\begin{aligned} & ((x^{-1} - a^{-1}) + a^{-1}) \cdot ((x - a) + a) = \text{id}_V \\ & (x^{-1} - a^{-1})(x - a) + (x^{-1} - a^{-1})a + a^{-1}(x - a) = 0 \\ & (x^{-1} - a^{-1})a = -a^{-1}(x - a) - (x^{-1} - a^{-1})(x - a) \\ & x^{-1} - a^{-1} = -a^{-1}(x - a)a^{-1} - (x^{-1} - a^{-1})(x - a)a^{-1} \\ & \|x^{-1} - a^{-1}\| \leq \|a^{-1}\|^2 \cdot \|x - a\| + \|x^{-1} - a^{-1}\| \cdot \|x - a\| \cdot \|a^{-1}\| \\ & \|x^{-1} - a^{-1}\| (1 - \|x - a\| \cdot \|a^{-1}\|) \leq \|a^{-1}\|^2 \cdot \|x - a\| \\ & \|x^{-1} - a^{-1}\| \leq \frac{\|a^{-1}\|^2}{1 - \|x - a\| \cdot \|a^{-1}\|} \cdot \|x - a\| < \frac{\|a^{-1}\|^2}{1 - \frac{1}{2}} \cdot \|x - a\| \end{aligned}$$

Itt az utolsó lépésben felhasználtuk az

$$\|x - a\| < \delta_1 \quad \rightarrow \quad \|x - a\| \cdot \|a^{-1}\| < \frac{1}{2}$$

egyenlőtlenséget. Vagyis ha $\delta_2 = \frac{\varepsilon}{2\|a^{-1}\|^2}$ és $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, akkor minden $x \in B_\delta(a)$ elemre

$$\|x^{-1} - a^{-1}\| < \varepsilon$$

teljesül.

2.6. Véges dimenziós normált terek

2.23. Tétel. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ véges dimenziós normált tér a $\mathbb{K}$ számtest felett és legyen $(e_k)_{k=1,\dots,n}$ ennek egy bázisa. Tekintsük a

$$\varphi : \mathbb{K}^n \rightarrow V \quad (a_1, \dots, a_n) \mapsto \sum_{k=1}^n a_k e_k$$

leképezést.

1. A φ lineáris homeomorfizmus a $(V, \|\cdot\|)$ és a $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ terek között.
2. Az $U \subseteq V$ halmaz pontosan akkor nyílt, ha a $\varphi^{-1}(U) \subseteq \mathbb{K}^n$ halmaz nyílt.
3. Az $U \subseteq V$ halmaz pontosan akkor korlátos, ha a $\varphi^{-1}(U) \subseteq \mathbb{K}^n$ halmaz korlátos.

Bizonyítás. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ véges dimenziós normált tér és legyen $(e_k)_{k=1,\dots,n}$ ennek egy bázisa. Ekkor a

$$\varphi : \mathbb{K}^n \rightarrow V \quad (a_1, \dots, a_n) \mapsto \sum_{k=1}^n a_k e_k$$

leképezés nyilvánvalóan lineáris bijekció és az inverze is lineáris.

1. Mivel

$$\|\cdot\|' : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \quad x \mapsto \|\varphi(x)\|$$

norma a $\mathbb{K}^n$ téren, ahol bármely két norma ekvivalens, ezért léteznek olyan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ paraméterek, hogy minden $x \in \mathbb{K}^n$ esetén

$$\|x\|' = \|\varphi(x)\| \leq \alpha \|x\|_\infty \quad \text{és} \quad \|x\|_\infty \leq \beta \|x\|' = \beta \|\varphi(x)\|. \quad (2.1)$$

Az első egyenlőtlenségből

$$\sup_{\|x\|_\infty \leq 1} \|\varphi(x)\| \leq \alpha < \infty$$

adódik, vagyis φ folytonos. A második egyenletbe minden $y \in V$ esetén az $x = \varphi^{-1}(y)$ elemet írva

$$\|\varphi^{-1}(y)\|_\infty \leq \beta \|y\|$$

adódik, vagyis

$$\sup_{\|y\| \leq 1} \|\varphi^{-1}(y)\|_\infty \leq \beta < \infty$$

teljesül, tehát φ^{-1} is folytonos.

2. Legyen $U \subseteq V$. Ha U nyílt, akkor a φ leképezés folytonossága miatt a $\varphi^{-1}(U) \subseteq \mathbb{K}^n$ halmaz is nyílt. Ha az $U' \subseteq \mathbb{K}^n$ halmaz nyílt, akkor a φ^{-1} leképezés folytonossága miatt a $(\varphi^{-1})^{-1}(U') = \varphi(U') \subseteq V$ halmaz is nyílt. Ezt alkalmazva az $U' = \varphi^{-1}(U)$ halmazra azt kapjuk, hogy ha $\varphi^{-1}(U) \subseteq \mathbb{K}^n$ nyílt, akkor $U \subseteq V$ is nyílt.

3. Ha $U \subseteq V$ korlátos halmaz, akkor létezik $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $U \subseteq B_r(0)$ teljesül. Megmutatjuk, hogy létezik olyan $R \in \mathbb{R}^+$, melyre $\varphi^{-1}(U) \subseteq B_R(0)$. Ha $x \in \varphi^{-1}(U)$, akkor $\|\varphi(x)\| < r$ és a (2.1) egyenlet alapján

$$\|x\|_\infty \leq \beta \|\varphi(x)\| < \beta r,$$

vagyis az $R = \beta r$ jelöléssel élve $x \in B_R(0)$.

Ha az $U \subseteq \mathbb{K}^n$ halmaz korlátos, akkor létezik $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $U \subseteq B_r(0)$ teljesül. Megmutatjuk, hogy létezik olyan $R \in \mathbb{R}^+$, melyre $\varphi(U) \subseteq B_R(0)$. Ha $x \in \varphi(U)$, akkor $\|\varphi^{-1}(x)\|_\infty < r$ és a (2.1) egyenlet alapján

$$\|x\| = \|\varphi(\varphi^{-1}(x))\| \leq \alpha \|\varphi^{-1}(x)\|_\infty < \alpha r,$$

vagyis az $R = \alpha r$ jelöléssel élve $x \in B_R(0)$.

2.24. Tétel. Minden V véges dimenziós vektortéren bármely két norma ekvivalens.

Bizonyítás. Legyen V véges dimenziós vektortér, valamint legyen $\|\cdot\|$ norma a V vektortéren. Legyen továbbá $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ a V egy bázisa és tekintsük a

$$\varphi : \mathbb{K}^n \rightarrow V \quad (a_1, \dots, a_n) \mapsto \sum_{k=1}^n a_k e_k$$

leképezést, mely a 2.23 tétel értelmében homeomorfizmus, a V téren értelmezett normától függetlenül. Tegyük fel, hogy $U \subseteq V$ nyílt halmaz a $\|\cdot\|$ norma szerint. Mivel φ homeomorfizmus a $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ és a $(V, \|\cdot\|)$ terek között, ezért $\varphi^{-1}(U)$ nyílt a $\mathbb{K}^n$ térben. Továbbá φ homeomorfizmus a $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ és a $(V, \|\cdot\|')$ terek között is, ezért $\varphi(\varphi^{-1}(U)) = U$ nyílt a $(V, \|\cdot\|')$ térben.

Ezután a $\|\cdot\|'$ és a $\|\cdot\|$ norma felcserélésével kapjuk az állítást.

3. Hilbert-terek

3.1. Skaláris szorzással ellátott terek

3.1. Definíció. Legyen V vektortér a $\mathbb{K}$ számtest felett. Azt mondjuk, hogy a

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K} \quad (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$$

leképezés *skaláris szorzás*, ha

- $\forall x \in V : \langle x, x \rangle \in \mathbb{R}_0^+$;
- $\forall x \in V : \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$;
- $\forall x, y, z \in V : \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$;
- $\forall x, y \in V \forall \lambda \in \mathbb{K} : \langle \lambda x, y \rangle = \bar{\lambda} \langle x, y \rangle$;
- $\forall x, y \in V : \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.

Azt mondjuk, hogy V *skalárszorozatos vektortér*, ha a V vektortéren adott egy skaláris szorzás.

3.2. Tétel. Legyen V skalárszorozatos vektortér $\mathbb{K}$ felett. Ekkor minden $x, y, z \in V$ vektorra és $\lambda \in \mathbb{K}$ skalárra

$$\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle \quad \langle x, \lambda y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen V skalárszorozatos vektortér $\mathbb{K}$ felett, $x, y, z \in V$ és $\lambda \in \mathbb{K}$. Ekkor

$$\begin{aligned} \langle x, y + z \rangle &= \overline{\langle y + z, x \rangle} = \overline{\langle y, x \rangle + \langle z, x \rangle} = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle \\ \langle x, \lambda y \rangle &= \overline{\langle \lambda y, x \rangle} = \overline{\lambda \langle y, x \rangle} = \lambda \langle x, y \rangle. \end{aligned}$$

3.3. Tétel. (Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség.) Legyen V skalárszorozatos vektortér $\mathbb{K}$ felett. Ekkor minden $x, y \in V$ vektorra

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen V skalárszorozatos vektortér $\mathbb{K}$ felett és legyen $x, y \in V$. Ha $x = y = 0$, akkor nyilván teljesül az egyenlőtlenség, ezért tegyük fel, hogy $y \neq 0$. Tekintsük minden $t \in \mathbb{K}$ esetén a $z = x - ty$ vektort. Ekkor a skaláris szorzás alaptulajdonsága miatt

$$0 \leq \langle z, z \rangle = \langle x - ty, x - ty \rangle = \langle x, x \rangle - \bar{t} \langle y, x \rangle - t \langle x, y \rangle + |t|^2 \langle y, y \rangle.$$

Behelyettesítve a fenti egyenlőtlenségbe a $t = \frac{\langle y, x \rangle}{\langle y, y \rangle}$ értéket

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle x, x \rangle - \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} \langle y, x \rangle - \frac{\langle y, x \rangle}{\langle y, y \rangle} \langle x, y \rangle + \frac{\langle y, x \rangle \langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle \langle y, y \rangle} \langle y, y \rangle = \\ &= \frac{1}{\langle y, y \rangle} \left(\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle - |\langle x, y \rangle|^2 \right) \end{aligned}$$

adódik.

3.4. Tétel. Legyen V vektortér és $\langle \cdot, \cdot \rangle$ skaláris szorzás a V vektortéren. Ekkor

$$\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \quad x \mapsto \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

norma.

Bizonyítás. A skaláris szorzás definíciója alapján minden $x \in V$ vektorra és $c \in \mathbb{K}$ számra

$$\|cx\| = \sqrt{\langle cx, cx \rangle} = \sqrt{\overline{c} \langle x, cx \rangle} = \sqrt{\overline{c} (\langle cx, x \rangle)} = \sqrt{\overline{c} (c \langle x, x \rangle)} = \sqrt{\overline{c} c \langle x, x \rangle} = |c| \cdot \|x\|$$

teljesül.

Ha $x = 0$, akkor $\|x\| = \sqrt{0} = 0$. Ha valamilyen $x \in V$ vektorra $\|x\| = 0$, akkor $\langle x, x \rangle = 0$, vagyis $x = 0$.

Legyen $x, y \in V$ tetszőleges. Azt kell igazolni, hogy

$$\sqrt{\langle x + y, x + y \rangle} \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} + \sqrt{\langle y, y \rangle}$$

teljesül. Mivel a bizonyítandó egyenlőtlenség minden tagja pozitív, ezért elég az egyenlőtlenség négyzetét igazolni, vagyis, hogy

$$\begin{aligned} \langle x + y, x + y \rangle &\leq \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle + 2 \cdot \|x\| \cdot \|y\| \\ \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle &\leq 2 \cdot \|x\| \cdot \|y\| \\ \operatorname{Re} \langle x, y \rangle &\leq \|x\| \cdot \|y\| \end{aligned}$$

teljesül. Ez viszont rögtön adódik a 3.3 Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenségből és a komplex számokra vonatkozó $\operatorname{Re} \langle x, y \rangle \leq |\langle x, y \rangle|$ egyenlőtlenségből.

3.5. Tétel. (Parallelogramma-egyenlőség.) Ha V skalárszorozatos vektortér, akkor minden $x, y \in V$ vektorra

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen V skalárszorozatos vektortér és $x, y \in V$. Ekkor

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle + \langle x - y, x - y \rangle = \\ &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle + \langle x, x \rangle - \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle = \\ &= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2. \end{aligned}$$

3.6. Definíció. Legyen V vektortér és $\langle \cdot, \cdot \rangle$ skaláris szorzás a V téren.

- Ekkor a $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ párt *prehilbert-térnek* nevezzük.
- A $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ párt *Hilbert-térnek* nevezzük, ha a skaláris szorzásból származtatott normára nézve teljes normált tér.

Jelölés. A (pre-) Hilbert-tereket a továbbiakban csak az alaphalmaz szimbólumával jelöljük és a térhez tartozó skaláris szorzást csak akkor írjuk ki, ha annak elhagyása félrevezető lenne. Továbbá adott $\mathcal{H}$ Hilbert-tér esetén a $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ térre a $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ vagy a $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ jelölést fogjuk használni.

3.7. Definíció. Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, I nem üres halmaz és minden $i \in I$ esetén legyen $0 \neq e_i \in \mathcal{H}$. Azt mondjuk, hogy az $(e_i)_{i \in I}$ vektorrendszer

- *ortogonális rendszer*, ha minden $i, j \in I$ elemre, ha $i \neq j$, akkor $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ teljesül;
- *normált rendszer*, ha minden $i \in I$ elemre $\langle e_i, e_i \rangle = 1$ teljesül;
- *ortonormált rendszer*, ha normált ortogonális rendszer;
- *teljes rendszer*, ha

$$\forall x \in \mathcal{H} \left((\forall i \in I : \langle e_i, x \rangle = 0) \rightarrow x = 0 \right)$$

teljesül;

- *Schauder-bázis*, ha teljes lineárisan független vektorrendszer.

3.8. Tétel. Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér és $z \in \mathcal{H}$ tetszőleges vektor. Ekkor a

$$\begin{aligned} \langle \cdot, z \rangle : \mathcal{H} &\rightarrow \mathbb{K} & x &\mapsto \langle x, z \rangle \\ \langle z, \cdot \rangle : \mathcal{H} &\rightarrow \mathbb{K} & x &\mapsto \langle z, x \rangle \end{aligned}$$

leképezések folytonosak.

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér és $z \in \mathcal{H}$ tetszőleges vektor. Mivel a $\langle z, \cdot \rangle$ leképezés a skaláris szorzás definíciója alapján lineáris és a 3.3 Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség alapján

$$\|\langle z, \cdot \rangle\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle z, x \rangle| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \|x\| \cdot \|z\| \leq \|z\| < \infty,$$

ezért a lineáris leképezések folytonosságára vonatkozó 2.14 tétel alapján $\langle z, \cdot \rangle$ folytonos lineáris leképezés.

Mivel a konjugálás művelete folytonos és $\langle \cdot, z \rangle = \overline{\langle z, \cdot \rangle}$, ezért $\langle \cdot, z \rangle$ két folytonos leképezés kompozíciója, így folytonos.

3.9. Tétel. Legyen $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ teljes ortonormált rendszer a $\mathcal{H}$ Hilbert-térben. Ekkor az alábbiak teljesülnek.

1. (Bessel-egyenlőtlenség.) Minden $x \in \mathcal{H}$ vektorra és $J \subseteq \mathbb{N}$ halmazra

$$\sum_{n \in J} |\langle e_n, x \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

2. Minden $x \in \mathcal{H}$ vektorra

$$x = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle e_n, x \rangle e_n.$$

3. (Parseval-egyenlőség.) Minden $x \in \mathcal{H}$ vektorra

$$\|x\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle e_n, x \rangle|^2.$$

Bizonyítás. Legyen $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ teljes ortonormált rendszer a $\mathcal{H}$ Hilbert-térben és legyen $x \in \mathcal{H}$ tetszőleges vektor.

1. Mivel minden $N \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left\| x - \sum_{n=0}^N \langle e_n, x \rangle e_n \right\|^2 = \left\langle x - \sum_{i=0}^N \langle e_i, x \rangle e_i, x - \sum_{j=0}^N \langle e_j, x \rangle e_j \right\rangle = \\ &= \|x\|^2 - \sum_{i=0}^N \overline{\langle e_i, x \rangle} \langle e_i, x \rangle - \sum_{j=0}^N \langle e_j, x \rangle \langle x, e_j \rangle + \sum_{i,j=0}^N \overline{\langle e_i, x \rangle} \langle e_j, x \rangle \langle e_i, e_j \rangle = \\ &= \|x\|^2 - 2 \sum_{i=0}^N |\langle e_i, x \rangle|^2 + \sum_{i=0}^N \overline{\langle e_i, x \rangle} \langle e_i, x \rangle = \|x\|^2 - \sum_{i=0}^N |\langle e_i, x \rangle|^2 \end{aligned}$$

teljesül, ezért minden $N \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sum_{n=0}^N |\langle e_n, x \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Tehát

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle e_n, x \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

is teljesül, valamint ha az összegzés csak egy $J \subseteq \mathbb{N}$ halmazra végezzük el, azzal csak csökkenteni tudjuk a bal oldalon álló kifejezés értékét, vagyis minden $J \subseteq \mathbb{N}$ esetén

$$\sum_{n \in J} |\langle e_n, x \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

2. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $\alpha_n = \sum_{k=0}^n \langle e_k, x \rangle e_k$. Minden $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$ számra

$$\|\alpha_m - \alpha_n\|^2 = \left\| \sum_{k=n+1}^m \langle e_k, x \rangle e_k \right\|^2 = \left\langle \sum_{i=n+1}^m \langle e_i, x \rangle e_i, \sum_{j=n+1}^m \langle e_j, x \rangle e_j \right\rangle = \quad (3.1)$$

$$= \sum_{i,j=n+1}^m \overline{\langle e_i, x \rangle} \langle e_j, x \rangle \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{i=n+1}^m |\langle e_i, x \rangle|^2.$$

Az 1. pont alapján $\sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle e_n, x \rangle|^2 < \infty$, tehát minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $n > N$ számra

$$\sum_{k=n}^{\infty} |\langle e_k, x \rangle|^2 < \varepsilon^2$$

teljesül, vagyis a (3.1) egyenlőtlenség alapján minden $n, m \in \mathbb{N}$ számra $N < n, m$ esetén

$$\|\alpha_m - \alpha_n\| < \varepsilon$$

teljesül, vagyis az $n \mapsto \alpha_n$ sorozat Cauchy-sorozat, ezért konvergens is, vagyis létezik a Hilbert-térben a $z = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle e_n, x \rangle e_n$ vektor.

Legyen $k \in \mathbb{N}$ tetszőleges. A skaláris szorzás folytonossága miatt

$$\begin{aligned} \left\langle e_k, x - \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle e_n, x \rangle e_n \right\rangle &= \langle e_k, x \rangle - \left\langle e_k, \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \langle e_n, x \rangle e_n \right\rangle = \\ &= \langle e_k, x \rangle - \lim_{N \rightarrow \infty} \left\langle e_k, \sum_{n=0}^N \langle e_n, x \rangle e_n \right\rangle = \langle e_k, x \rangle - \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \langle e_n, x \rangle \langle e_k, e_n \rangle = \\ &= \langle e_k, x \rangle - \langle e_k, x \rangle = 0 \end{aligned}$$

teljesül. Mivel az $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vektorrendszer teljes, ezért

$$x - \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle e_n, x \rangle e_n = 0.$$

3. A 2. pontban bizonyított egyenlőséget skalárisan szorozva az x vektorral

$$\begin{aligned} \langle x, x \rangle &= \left\langle x, \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle e_n, x \rangle e_n \right\rangle \\ \|x\|^2 &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle e_n, x \rangle \langle x, e_n \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle e_n, x \rangle|^2 \end{aligned}$$

adódik.

Kiegészítés. Az alábbi tétel segítségével könnyen eldönthető, hogy egy normált tér normája skaláris szorzásból származik-e vagy sem.

3.10. Tétel. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér. Pontosan akkor létezik a V vektortéren olyan skaláris szorzás mely V normáját generálja, ha minden $x, y \in V$ vektorra

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

teljesül.

◇

3.2. Vektor ortogonális projekciója zárt altérre

3.11. Tétel. Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, $W \subseteq \mathcal{H}$ nem üres, konvex, zárt halmaz és $x \in \mathcal{H}$. Ekkor létezik egyetlen olyan $y \in W$, melyre

$$\text{dist}_W(x) = \inf_{z \in W} \|z - x\| = \|x - y\|$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, $W \subseteq \mathcal{H}$ nem üres, konvex, zárt halmaz és $x \in \mathcal{H}$. Vezessük be a $d = \text{dist}_W(x)$ jelölést. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén létezik olyan $w_n \in W$ vektor, melyre

$$\|w_n - x\| < d + \frac{1}{n+1}$$

teljesül. Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $d \leq \|w_n - x\|$ ezért $\lim_{n \rightarrow \infty} \|w_n - x\| = d$ teljesül. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor a $\lim_{n \rightarrow \infty} \|w_n - x\|^2 = d^2$ határérték miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$, $N < n$ természetes számra $\|w_n - x\|^2 < d^2 + \frac{\varepsilon}{4}$. Ha $n, m \in \mathbb{N}$ olyanok, hogy $N < n, m$, akkor W konvexitása miatt $\frac{w_n + w_m}{2} \in W$ és parallelogramma-egyenlőség szerint

$$\begin{aligned} \|w_n - w_m\|^2 &= \|(w_n - x) - (w_m - x)\|^2 = 2\|w_n - x\|^2 + 2\|w_m - x\|^2 - \|(w_n - x) + (w_m - x)\|^2 = \\ &= 2\|w_n - x\|^2 + 2\|w_m - x\|^2 - 4\left\|\frac{w_n + w_m}{2} - x\right\|^2 \leq \\ &\leq 2\|w_n - x\|^2 + 2\|w_m - x\|^2 - 4d^2 = 2\left(\|w_n - x\|^2 - d^2\right) + 2\left(\|w_m - x\|^2 - d^2\right) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Tehát a $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat Cauchy-sorozat. Mivel $\mathcal{H}$ teljes, ezért létezik a $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = y$ határérték, valamint W zártsága miatt $y \in W$. Erre az y vektorra

$$\|x - y\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x - w_n\| = d$$

teljesül.

Az y vektor egyértelműségének a bizonyításához tegyük fel, hogy léteznek olyan $y_1, y_2 \in W$, melyekre $\|x - y_1\| = \|x - y_2\| = d$. Ekkor a parallelogramma-egyenlőség szerint

$$\begin{aligned} \|y_1 - y_2\|^2 &= \|(y_1 - x) - (y_2 - x)\|^2 = 2\|y_1 - x\|^2 + 2\|y_2 - x\|^2 - \|(y_1 - x) + (y_2 - x)\|^2 \leq \\ &= 2\|y_1 - x\|^2 + 2\|y_2 - x\|^2 - 4\left\|\frac{y_1 + y_2}{2} - x\right\|^2 \leq \\ &\leq 2d^2 + 2d^2 - 4d^2 = 0, \end{aligned}$$

tehát $\|y_1 - y_2\| = 0$ miatt $y_1 = y_2$.

3.12. Definíció. Legyen V skalárszorzatos vektortér.

- Az $x, y \in V$ vektorok *ortogonálisak* vagy *merőlegesek egymásra*, ha $\langle x, y \rangle = 0$.
- Az $x \in V$ vektor *ortogonális* vagy *merőleges a* $W \subseteq V$ *halmazra*, ha minden $y \in W$ esetén $\langle x, y \rangle = 0$.
- Az $L, W \subseteq V$ *halmazok ortogonálisak*, ha minden $x \in L$ és $y \in W$ esetén $\langle x, y \rangle = 0$.

3.13. Tétel. Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, $W \subseteq \mathcal{H}$ zárt lineáris altér és $x \in \mathcal{H}$. Legyen $x_W \in W$ az az egyértelműen meghatározott vektor, melyre $\inf_{z \in W} \|z - x\| = \|x - x_W\|$. Ekkor x_W az egyetlen olyan vektora a W lineáris altérnek, melyre $x - x_W$ ortogonális a W altérre.

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, $W \subseteq \mathcal{H}$ zárt lineáris altér, $x \in \mathcal{H}$ és $x_W \in W$ az az egyértelműen meghatározott vektor, melyre $\inf_{z \in W} \|z - x\| = \|x - x_W\|$. Legyen $z \in W$ tetszőleges vektor és $t \in \mathbb{K}$ paraméter. Mivel W lineáris altér, ezért $x_W + tz \in W$. Ebben az esetben viszont

$$\|x - x_W\|^2 \leq \|x - x_W - tz\|^2 = \|x - x_W\|^2 + |t|^2 \|z\|^2 - 2 \operatorname{Re}(t \langle x - x_W, z \rangle)$$

alapján

$$0 \leq |t|^2 \|z\|^2 - 2 \operatorname{Re}(t \langle x - x_W, z \rangle).$$

Tehát minden $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén a $t = \lambda$ választással élve $0 \leq \lambda^2 \|z\|^2 - 2\lambda \operatorname{Re}(\langle x - x_W, z \rangle)$, amiből $\operatorname{Re}(\langle x - x_W, z \rangle) = 0$ következik. Továbbá minden $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén a $t = i\lambda$ választással élve $0 \leq$

$\lambda^2 \|z\|^2 + 2t \operatorname{Im}(\langle x - x_W, z \rangle)$, amiből $\operatorname{Im}(\langle x - x_W, z \rangle) = 0$ következik. Vagyis $\langle x - x_W, z \rangle = 0$ teljesül minden $z \in W$ vektorra, tehát $x - x_W$ ortogonális a W altérre.

Tegyük fel, hogy $y \in W$ olyan vektor, hogy $x - y$ ortogonális a W altérre, tehát minden $z \in W$ esetén $\langle z, x - y \rangle = 0$. Mivel $x_W - y \in W$, ezért $\langle x_W - y, x - y \rangle = 0$, amiből pedig

$$\begin{aligned} \|x_W - y\|^2 &= \langle x_W - y, x_W - y \rangle = \langle x_W - y, (x_W - x) + (x - y) \rangle = \\ &= \langle x_W - y, x_W - x \rangle + \langle x_W - y, x - y \rangle = 0 \end{aligned}$$

következik, tehát $y = x_W$.

3.14. Definíció. Legyen $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, $W \subseteq \mathcal{H}$ zárt lineáris altér és $x \in \mathcal{H}$. Legyen $x_W \in W$ az az egyértelműen meghatározott vektor, melyre $\inf_{z \in W} \|z - x\| = \|x - x_W\|$. Ekkor az x_W vektort az x vektor W altérre való ortogonális vetületének vagy projekciójának nevezzük.

4. Függvénysorozatok, függvénysorok

4.1. Pontonkénti és egyenletes konvergencia

4.1. Definíció. Legyen T nem üres halmaz, $A \subseteq T$, (M, d) metrikus tér, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in \mathcal{F}(T, M)$.

Ekkor az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ rendszert *függvénysorozatnak* nevezzük, melynek *pontonkénti határfüggvénye*

$$f : \left\{ t \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{Dom } f_n \mid \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) \right\} \rightarrow M \quad t \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) .$$

A pontonkénti határfüggvényre a $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ jelölést használjuk.

Azt mondjuk, hogy az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat

- *pontonként konvergál az f függvényhez az A halmazon*, ha $A \subseteq \text{Dom } f$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n|_A = f|_A$ teljesül;
- *pontonként konvergens az A halmazon*, ha van olyan függvény, melyhez pontonként konvergál az A halmazon;
- *pontonként konvergál az f függvényhez*, ha az egész T halmazon konvergál az f függvényhez;
- *pontonként konvergens*, ha van olyan függvény, melyhez pontonként konvergál;
- *egyenletesen konvergál az f függvényhez az A halmazon*, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \forall t \in A : (N < n \rightarrow d(f_n(t), f(t)) < \varepsilon)$$

teljesül;

- *egyenletesen konvergens az A halmazon*, ha van olyan függvény, melyhez egyenletesen konvergál az A halmazon;
- *egyenletesen konvergál az f függvényhez*, ha az egész T halmazon egyenletesen konvergál az f függvényhez;
- *egyenletesen konvergens*, ha létezik olyan függvény, melyhez egyenletesen konvergál;
- *lokálisan egyenletesen konvergens*, ha a T halmazon adott egy d_T metrika és minden $t \in \text{Dom } f$ pontnak van olyan környezete, ahol az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens.

4.2. Definíció. Legyen T nem üres halmaz, $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in \mathcal{F}(T, V)$.

- Az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozathoz rendelt *függvénysort* a

$$\sum_n f_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{F}(T, V) \quad k \mapsto \left(t \mapsto \sum_{j=0}^k f_j(t) \right)$$

képlettel definiáljuk.

- A $\sum_n f_n$ függvénysor *pontonkénti összefüggvénye*

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n : \left\{ t \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{Dom } f_n \mid \exists \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(t) \right\} \rightarrow V \quad t \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(t) .$$

- Azt mondjuk, hogy a $\sum_n f_n$ függvénysor az A halmazon *pontonként abszolút konvergens*, ha $A \subseteq \text{Dom } \sum_n f_n$ és minden $t \in A$ esetén $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|f_n(t)\| < \infty$ teljesül.
- Azt mondjuk, hogy a $\sum_n f_n$ függvénysor *pontonként abszolút konvergens*, ha a T halmazon pontonként abszolút konvergens.

Megjegyzés. Legyen T nem üres halmaz, $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in \mathcal{F}(T, V)$. Defináljuk minden $n \in \mathbb{N}$ számra a

$$g_n : T \rightarrow V \quad t \mapsto \sum_{j=0}^n f_j(t)$$

függvényt. Ekkor a $\sum_n f_n$ függvénysor pontonkénti összegfüggvénye megegyezik a $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat pontonkénti határfüggvényével. A definíció szerint az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozathoz rendelt függvénysor éppen a $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat. Így beszélhetünk a $\sum_n f_n$ függvénysor egyenletes konvergenciájáról. Tehát a $\sum_n f_n$ függvénysor pontosan akkor egyenletesen konvergens az $A \subseteq T$ halmazon, ha létezik olyan $F \in \mathcal{F}(T, V)$ függvény, hogy

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \forall t \in A : \left(N < n \rightarrow \left\| F(t) - \sum_{j=0}^n f_j(t) \right\| < \varepsilon \right)$$

teljesül.

◇

4.3. Tétel. Legyen T nem üres halmaz, (M, d) metrikus tér, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in \mathcal{F}(T, M)$ olyan függvénysorozat, mely pontonként konvergál az $f \in \mathcal{F}(T, M)$ függvényhez. Ekkor az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat pontosan akkor egyenletesen konvergens, ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} \forall t \in T : (N < n, m \rightarrow d(f_n(t), f_m(t)) < \varepsilon)$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen T nem üres halmaz, (M, d) metrikus tér, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in \mathcal{F}(T, M)$ olyan függvénysorozat, mely pontonként konvergál az $f \in \mathcal{F}(T, M)$ függvényhez. Tegyük fel, hogy az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Az egyenletes konvergencia miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $N < n \in \mathbb{N}$ számra

$$\forall t \in T : d(f_n(t), f(t)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ekkor minden $N < n, m \in \mathbb{N}$ számra

$$\forall t \in T : d(f_n(t), f_m(t)) \leq d(f_n(t), f(t)) + d(f(t), f_m(t)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

teljesül, ami bizonyítja az egyik irányú következtetést.

Most tegyük fel, hogy az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozatra

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} \forall t \in T : (N < n, m \rightarrow d(f_n(t), f_m(t)) < \varepsilon)$$

teljesül és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor a feltevés miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $N < n, m \in \mathbb{N}$ számra

$$\forall t \in T : d(f_n(t), f_m(t)) < \varepsilon$$

teljesül, amiből a d metrika folytonossága miatt

$$\forall t \in T : \lim_{m \rightarrow \infty} d(f_n(t), f_m(t)) = d\left(f_n(t), \lim_{m \rightarrow \infty} f_m(t)\right) = d(f_n(t), f(t)) \leq \varepsilon$$

adódik.

4.4. Tétel. Legyen (M, d) és (M', d') metrikus tér, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in C(M, M')$. Tegyük fel, hogy létezik az $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ határfüggvény, $\text{Dom } f = M$ és az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál az f függvényhez. Ekkor $f \in C(M, M')$.

Bizonyítás. Azt kell megmutatni, hogy az f függvény minden $x \in M$ pontban folytonos. Legyen $x \in M$ tetszőleges pont és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor az $\frac{\varepsilon}{3}$ számhoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > N$ természetes számra

$$\sup_{t \in M} d'(f_n(t), f(t)) \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Mivel az f_{N+1} függvény folytonos az x pontban, ezért létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $t \in B_\delta(x)$ pontra $f_{N+1}(t) \in B_{\frac{\varepsilon}{3}}(f_{N+1}(x))$ teljesül. Ekkor

$$t \in B_\delta(x) \Rightarrow d'(f(t), f(x)) \leq d'(f(t), f_{N+1}(t)) + d'(f_{N+1}(t), f_{N+1}(x)) + d'(f_{N+1}(x), f(x)) < \varepsilon,$$

vagyis az f függvény folytonos az x pontban.

4.5. Tétel. Legyen (M, d) metrikus tér és $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in C(M, V)$. Tegyük fel, hogy létezik az $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ összegfüggvény, $\text{Dom } f = M$ és a $\sum_n f_n$ függvénysor egyenletesen konvergál az f függvényhez. Ekkor $f \in C(M, V)$.

Bizonyítás. Legyen (M, d) metrikus tér és $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in C(M, V)$. Minden $n \in \mathbb{N}$ természetes számra definiáljuk a $g_n = \sum_{k=0}^n f_k$ függvényt. Ekkor a $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénytárhelyre alkalmazva a 4.4 tételt adódik az állítás.

4.6. Tétel. Legyen (M, d) és (M', d') metrikus tér, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in \mathcal{F}(M, M')$. Tegyük fel, hogy létezik az $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ határfüggvény, $\text{Dom } f = M$ és az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénytárhely lokálisan egyenletesen konvergál az f függvényhez. Ekkor minden $K \subseteq M$ kompakt halmaz esetén az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénytárhely egyenletesen konvergál az f függvényhez a K halmazon.

Bizonyítás. Legyen (M, d) és (M', d') metrikus tér, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n \in \mathcal{F}(M, M')$. Tegyük fel, hogy létezik az $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ határfüggvény, $\text{Dom } f = M$ és az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénytárhely lokálisan egyenletesen konvergál az f függvényhez. Legyen továbbá $K \subseteq M$ kompakt halmaz és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter.

Ekkor a lokálisan egyenletes konvergencia miatt minden $x \in K$ ponthoz létezik olyan $r(x) \in \mathbb{R}^+$, hogy az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénytárhely egyenletesen konvergens a $B_{r(x)}(x)$ halmazon. A K halmaznak természetes módon adott a

$$K \subseteq \bigcup_{x \in K} B_{r(x)}(x)$$

nyílt halmazokkal való befedése, amiből a K halmaz kompaktsága miatt az következik, hogy létezik olyan $n \in \mathbb{N}$ és $x_0, \dots, x_n \in K$, hogy

$$K \subseteq \bigcup_{k=0}^n B_{r(x_k)}(x_k)$$

teljesül. Mivel minden $k \in \{0, \dots, n\}$ esetén az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénytárhely egyenletesen konvergens a $B_{r(x_k)}(x_k)$ halmazon, ezért létezik olyan $m_k \in \mathbb{N}$ szám, hogy minden $m_k < l \in \mathbb{N}$ számra

$$\sup_{z \in B_{r(x_k)}(x_k)} d'(f_l(z), f_l(z)) < \varepsilon$$

teljesül. Legyen $N = \max\{m_k \mid k \in \{0, \dots, n\}\}$, valamint legyen $N < l \in \mathbb{N}$ és $z \in K$ tetszőleges. Ekkor létezik olyan $k \in \{0, \dots, n\}$, hogy $z \in B_{r(x_k)}(x_k)$. Továbbá $m_k \leq N < l$ miatt

$$d'(f_l(z), f_l(z)) < \varepsilon$$

teljesül. Tehát minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $N < l \in \mathbb{N}$ számra és $z \in K$ pontra $d'(f_l(z), f_l(z)) < \varepsilon$ teljesül, ami éppen a K halmazon való egyenletes konvergenciát jelenti.

4.2. Korlátos folytonos függvények tere

4.7. Definíció. Legyen T nem üres halmaz, (M, d) metrikus tér és $f : T \rightarrow M$ tetszőleges függvény. Azt mondjuk, hogy az f függvény korlátos, ha $\text{Ran } f \subseteq M$ korlátos halmaz. A $T \rightarrow M$ korlátos függvények halmazát jelölje $\mathcal{F}^b(T, M)$. Ha (T, d_T) metrikus tér, akkor a $T \rightarrow M$ folytonos korlátos függvények halmazát pedig jelölje $C^b(T, M)$.

4.8. Tétel. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér és (M, d) metrikus tér. A

$$\|\cdot\|_{\text{sup}} : C^b(M, V) \rightarrow \mathbb{R} \quad f \mapsto \sup_{t \in M} \|f(t)\|$$

leképezés norma az $C^b(M, V)$ vektortéren, így $(C^b(M, V), \|\cdot\|_{\text{sup}})$ normált tér.

Bizonyítás. A $\|\cdot\|_{\text{sup}}$ függvény nyilvánvaló módon teljesíti a norma tulajdonságait.

4.9. Tétel. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér és (M, d) metrikus tér. Legyen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a $C^b(M, V)$ halmazban haladó pontonként konvergens függvénysorozat, melyre $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \in C^b(M, V)$ teljesül. Ebben az esetben az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat pontosan akkor egyenletesen konvergens, ha az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat konvergens a $(C^b(M, V), \|\cdot\|_{\text{sup}})$ normált térben.

Bizonyítás. Legyen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a $C^b(M, V)$ halmazban haladó pontonként konvergens függvénysorozat, melyre $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \in C^b(M, V)$ teljesül.

Tegyük fel, hogy az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor az egyenletes konvergencia miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in M : (N < n \rightarrow \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon),$$

vagyis minden $N < n$ természetes számra

$$\|f_n - f\|_{\text{sup}} = \sup_{x \in M} \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon.$$

Tehát az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat konvergens a $(C^b(M, V), \|\cdot\|_{\text{sup}})$ normált térben.

Most tegyük fel, hogy az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat konvergens a $(C^b(M, V), \|\cdot\|_{\text{sup}})$ normált térben és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor a létezik $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $N < n$ természetes számra

$$\|f_n - f\|_{\text{sup}} < \varepsilon,$$

vagyis

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in M : (N < n \rightarrow \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon),$$

tehát az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens.

4.10. Tétel. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ Banach-tér, valamint (M, d) metrikus tér. Ekkor $(C^b(M, V), \|\cdot\|_{\text{sup}})$ Banach-tér.

Bizonyítás. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ Banach-tér, (M, d) metrikus tér, és legyen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat a $(C^b(M, V), \|\cdot\|_{\text{sup}})$ térben. Ha $x \in M$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, akkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n, m > N$ természetes számra

$$\varepsilon > \|f_n - f_m\|_{\text{sup}} = \sup_{t \in M} \|f_n(t) - f_m(t)\| \geq \|f_n(x) - f_m(x)\|$$

teljesül. Vagyis minden $x \in M$ pont esetén az $n \mapsto f_n(x)$ sorozat Cauchy-sorozat a V Banach-térben, ezért létezik a $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ határérték. Defináljuk az alábbi függvényt.

$$f : M \rightarrow V \quad x \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

Először megmutatjuk, hogy az f függvény korlátos. Mivel $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat, ezért létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $N < n$ természetes számra $\|f_{N+1} - f_n\|_{\text{sup}} < 1$ teljesül. Mivel f_{N+1} korlátos

függvény, ezért létezik olyan $K \in \mathbb{R}^+$ paraméter, hogy minden $x \in M$ pontra $\|f_{N+1}(x)\| < K$ teljesül. Ezek alapján minden $N < n$ természetes számra és $x \in M$ pontra

$$\|f_{N+1}(x) - f_n(x)\| \leq \|f_{N+1} - f_n\|_{\text{sup}} < 1,$$

vagyis

$$\|f_n(x)\| < 1 + \|f_{N+1}(x)\| < 1 + K$$

adódik, ebből pedig $\|f(x)\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n(x)\| < K + 1$. Tehát az f függvény korlátos.

A 4.3 tétel alapján az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénytípus sorozat egyenletesen konvergál az f függvényhez. Mivel az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénytípus sorozat elemei folytonos függvények, ezért az egyenletes konvergencia miatt az f függvény is folytonos, vagyis $f \in C^b(M, V)$.

A 4.9 tétel alapján $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ egyenletes konvergenciája éppen a $(C^b(M, V), \|\cdot\|_{\text{sup}})$ térbeli $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ konvergenciát jelenti.

4.11. Tétel. Legyen T nem üres halmaz, $(V, \|\cdot\|)$ Banach-tér és $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ az $\mathcal{F}(T, V)$ halmazban haladó függvénytípus sorozat. Ha a $\sum_n f_n$ függvénytípus sor pontonként abszolút konvergens, akkor pontonként konvergens is.

Bizonyítás. Legyen T halmaz, $(V, \|\cdot\|)$ Banach-tér és $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ az $\mathcal{F}(T, V)$ halmazban haladó függvénytípus sorozat. Tegyük fel, hogy a $\sum_n f_n$ függvénytípus sor pontonként abszolút konvergens. Ekkor minden $t \in T$ esetén a $\sum_n f_n(t)$ sor abszolút konvergens a V Banach-térben, ezért konvergens is. Tehát a függvénytípus sor minden pontban konvergens.

4.12. Tétel. (Weierstrass-tétel.) Legyen T egy nem üres halmaz, $(V, \|\cdot\|)$ Banach-tér és $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ az $\mathcal{F}(T, V)$ halmazban haladó függvénytípus sorozat. Ha a $\sum_n f_n$ függvénytípus sorra

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \sup_{t \in T} \|f_n(t)\| < \infty$$

teljesül, akkor egyenletesen is konvergens.

Bizonyítás. Legyen T nem üres halmaz, $(V, \|\cdot\|)$ Banach-tér és $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ az $\mathcal{F}(T, V)$ halmazban haladó függvénytípus sorozat. Tegyük fel, hogy a $\sum_n f_n$ függvénytípus sorra

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \sup_{t \in T} \|f_n(t)\| < \infty.$$

Ekkor a $\sum_n f_n$ függvénytípus sor pontonként abszolút konvergens, tehát konvergens is. Legyen $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$. Defináljuk az

$$a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \quad n \mapsto \sup_{t \in T} \|f_n(t)\|$$

sorozatot. Ekkor $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$,

hogy minden $N < n \in \mathbb{N}$ számra $\sum_{k=n}^{\infty} a_k < \varepsilon$ teljesül. Ekkor minden $N < n$ természetes számra és $t \in T$ pontra

$$\left\| f(t) - \sum_{k=0}^n f_k(t) \right\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(t) \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k(t)\| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k < \varepsilon$$

teljesül, ami éppen azt jelenti, hogy a $\sum_n f_n$ függvénytípus sor egyenletesen konvergens.

4.3. Hatványsorok

4.13. Definíció. (Hatványsorok.)

- Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, $a : \mathbb{N} \rightarrow V$ tetszőleges sorozat. Ekkor értelmezzük a P_a függvényt az alábbi módon.

$$P_a : \left\{ x \in \mathbb{K} \mid \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ konvergens} \right\} \rightarrow V \quad x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

A P_a függvényt *a együtthatójú 0 középpontú hatványsornak* nevezzük.

- Az $a : \mathbb{N} \rightarrow V$ sorozat esetén értelmezzük az alábbi mennyiséget.

$$R_a \triangleq \begin{cases} \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|a_n\|}}, & \text{ha } 0 < \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|a_n\|} < \infty; \\ 0, & \text{ha } \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|a_n\|} = \infty; \\ \infty, & \text{ha } \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|a_n\|} = 0. \end{cases}$$

Ezt az R_a számot a P_a hatványsor *konvergenciasugarának* nevezzük.

4.14. Tétel. (Cauchy–Hadamard-tétel.) Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, $a : \mathbb{N} \rightarrow V$ tetszőleges sorozat és $x \in \mathbb{K}$.

1. Ha $|x| < R_a$, akkor az x pontban a P_a hatványsor abszolút konvergens.
2. Ha $|x| > R_a$, akkor az x pontban a P_a hatványsor divergens.
3. Ha $r \in [0, R_a[$, akkor

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \sup_{t \in B_r(0)} \|a_n t^n\| < \infty.$$

4. Ha $(V, \|\cdot\|)$ Banach-tér, akkor a P_a hatványsor a $B_{R_a}(0)$ halmazon lokálisan egyenletesen konvergens.
5. Ha $(V, \|\cdot\|)$ Banach-tér, akkor a P_a hatványsor a $B_{R_a}(0)$ halmazon folytonos függvény.

Bizonyítás. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, $a : \mathbb{N} \rightarrow V$ tetszőleges sorozat, továbbá legyen R_a az a sorozat által meghatározott hatványsor konvergenciasugara.

3. Legyen $r \in [0, R_a[$. Ekkor

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{x \in B_r(0)} \|a_n x^n\| = \sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\| \cdot \sup_{x \in B_r(0)} |x|^n = \sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\| \cdot r^n = \sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\| \cdot r^n < \infty,$$

ahol az utolsó egyenlőtlenségnél az elemi Cauchy–Hadamard-tételt használtuk.

1. Ha $x \in V$ és $|x| < R_a$, akkor legyen $r \in]|x|, R_a[$ tetszőleges paraméter. A 3. pont alapján a hatványsor nomálisan konvergens a $B_r(0)$ halmazon, ezért ott abszolút konvergens is.
2. Legyen $|x| > R_a$ és tegyük fel, hogy a $\sum_n a_n x^n$ sor konvergens. Ekkor a 2.9 tétel alapján

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n x^n = 0$ teljesül. Tehát létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $N < k \in \mathbb{N}$ számra $\|a_k x^k\| < 1$, azaz

$$\sqrt[k]{\|a_k\|} < \frac{1}{|x|}.$$

Vagyis

$$\frac{1}{R_a} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup \left\{ \sqrt[k]{\|a_k\|} \mid k \geq n \right\} \leq \sup \left\{ \sqrt[k]{\|a_k\|} \mid k \geq N+1 \right\} \leq \frac{1}{|x|},$$

amiből az $|x| \leq R_a$ ellentmondás adódik.

4. Legyen $x \in B_{R_a}(0)$ tetszőleges pont. Válasszunk egy $r \in]|x|, R_a[$ paramétert. A 3. pont alapján a hatványsorra a $B_r(0)$ halmazon alkalmazható a 4.12 Weierstrass-tétel, tehát itt egyenletesen is konvergens a hatványsor. Vagyis az x pontnak a $B_r(0)$ halmaz olyan környezete ahol a hatványsor egyenletesen konvergens.
5. Mivel a függvénysor bármely véges összege folytonos függvény és a $B_{R_a}(0)$ halmazon lokálisan egyenletes a konvergencia, ezért a 4.4 tétel alapján az összegfüggvény is folytonos.

4.4. Abel-tétel

4.15. Tétel. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, $a : \mathbb{N} \rightarrow V$ olyan sorozat, hogy a $\sum_n a_n$ sor konvergens és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $C_n = \sup_{m \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{k=n}^{n+m} a_k \right\|$. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ számra $C_n < \infty$ és $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = 0$ teljesül.

Bizonyítás. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ normált tér, $a : \mathbb{N} \rightarrow V$ olyan sorozat, hogy a $\sum_n a_n$ sor konvergens és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $C_n = \sup_{m \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{k=n}^{n+m} a_k \right\|$. Legyen $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ számra legyen $\alpha_n = A - \sum_{k=0}^n a_k$. Ekkor $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, valamint minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\begin{aligned} C_n &= \sup_{m \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{k=n}^{n+m} a_k \right\| = \sup_{m \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{k=0}^{n+m} a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \right\| = \\ &= \sup_{m \in \mathbb{N}} \|(A - \alpha_{n+m}) - (A - \alpha_{n-1})\| = \sup_{m \in \mathbb{N}} \|\alpha_{n-1} - \alpha_{n+m}\|. \end{aligned}$$

Mivel az $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat konvergens, ezért korlátos is, tehát létezik olyan $K \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\|\alpha_n\| < K$. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$C_n = \sup_{m \in \mathbb{N}} \|\alpha_{n-1} - \alpha_{n+m}\| \leq \|\alpha_{n-1}\| + \sup_{m \in \mathbb{N}} \|\alpha_{n+m}\| \leq K + K < \infty.$$

Tegyük fel, hogy a $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat nem tart a nullához. Ekkor létezik olyan $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $N \in \mathbb{N}$ esetén van olyan $N < n \in \mathbb{N}$, hogy $\varepsilon_0 \leq C_n$. Vagyis minden $N \in \mathbb{N}$ esetén van olyan $N < n \in \mathbb{N}$, hogy

$$\varepsilon_0 \leq C_n = \sup_{m \in \mathbb{N}} \|\alpha_{n-1} - \alpha_{n+m}\|$$

teljesül. Mivel $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, ezért létezik olyan $N_1 \in \mathbb{N}$, hogy minden $N_1 < n \in \mathbb{N}$ számra $\|\alpha_n\| < \frac{\varepsilon_0}{4}$, vagyis minden $N_1 + 1 < n \in \mathbb{N}$ számra

$$C_n = \sup_{m \in \mathbb{N}} \|\alpha_{n-1} - \alpha_{n+m}\| \leq \|\alpha_{n-1}\| + \sup_{m \in \mathbb{N}} \|\alpha_{n+m}\| \leq \frac{\varepsilon_0}{4} + \frac{\varepsilon_0}{4} = \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Ezek alapján az $N_1 + 1$ számhoz létezik olyan $N_1 + 1 < n \in \mathbb{N}$, hogy $\varepsilon_0 \leq C_n$, ugyanakkor minden $N_1 + 1 < n \in \mathbb{N}$ számra $C_n \leq \frac{\varepsilon_0}{2}$, ami nyilvánvalóan ellentmondás, ezért $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = 0$.

Magyarázat. A következő állítás előtt célszerű bevezetni az alábbi jelöléseket.

4.16. Definíció. Ha V vektortér és $a, b \in V$, akkor a

$$[a, b] \triangleq \{ta + (1-t)b \mid t \in [0, 1]\}, \quad]a, b[\triangleq \{ta + (1-t)b \mid t \in]0, 1[\}$$

halmazokat az a és b végpontú szakasznak, illetve nyílt szakasznak nevezzük.

4.17. Tétel. (Abel-tétel.) Legyen $(V, \|\cdot\|)$ Banach-tér, $a : \mathbb{N} \rightarrow V$ olyan sorozat, melyre $0 < R_a < \infty$ és legyen $z \in \mathbb{K}$ olyan pont, hogy $|z| = R_a$ és a P_a hatványsor konvergens a z pontban. Ekkor a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hatványsor egyenletesen konvergens a $[0, z]$ szakaszon és a $P_a|_{[0, z]}$ függvény folytonos.

Bizonyítás. Legyen $(V, \|\cdot\|)$ Banach-tér, $a : \mathbb{N} \rightarrow V$ olyan sorozat, melyre $0 < R_a < \infty$ és legyen $z \in \mathbb{K}$ olyan pont, hogy $|z| = R_a$ és a P_a hatványsor konvergens a z pontban. Ha $x \in [0, z[$, akkor a hatványsor konvergens az x pontban és minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\left\| P_a(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \right\| = \lim_{m \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=n}^{n+m} a_k x^k \right\|$$

teljesül. Az $m \in \mathbb{N}^+$ változó szerinti teljes indukcióval igazolható az alábbi Abel-féle átrendezés.

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{n+m} a_k x^k &= \sum_{k=n}^{n+m} a_k z^k \left(\frac{x}{z} \right)^k = \\ &= \sum_{k=n}^{n+m-1} \left(\left(\frac{x}{z} \right)^k - \left(\frac{x}{z} \right)^{k+1} \right) \left(\sum_{j=n}^k a_j z^j \right) + \left(\frac{x}{z} \right)^{n+m} \sum_{j=n}^{n+m} a_j z^j \end{aligned}$$

Mivel a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ sor konvergens, ezért a 4.15 tétel alapján minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$C_n = \sup_{m \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{k=n}^{n+m} a_k z^k \right\| < \infty,$$

valamint $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = 0$. Mivel $\frac{x}{z} \in [0, 1[$, ezért minden $m \in \mathbb{N}^+$ számra

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=n}^{n+m} a_k x^k \right\| &\leq \sum_{k=n}^{n+m-1} \left| \left(\frac{x}{z} \right)^k - \left(\frac{x}{z} \right)^{k+1} \right| \left\| \sum_{j=n}^k a_j z^j \right\| + \left| \frac{x}{z} \right|^{n+m} \left\| \sum_{j=n}^{n+m} a_j z^j \right\| \leq \\ &\leq \sum_{k=n}^{n+m-1} \left| \left(\frac{x}{z} \right)^k - \left(\frac{x}{z} \right)^{k+1} \right| C_n + \left| \frac{x}{z} \right|^{n+m} C_n \leq \\ &\leq C_n \sum_{k=n}^{n+m-1} \left(\left(\frac{x}{z} \right)^k - \left(\frac{x}{z} \right)^{k+1} \right) + \left(\frac{x}{z} \right)^{n+m} C_n \leq \\ &\leq C_n \left(\left(\frac{x}{z} \right)^n - \left(\frac{x}{z} \right)^{n+m} \right) + \left(\frac{x}{z} \right)^{n+m} C_n = C_n \left(\frac{x}{z} \right)^n \end{aligned}$$

teljesül, vagyis

$$\left\| P_a(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \right\| = \lim_{m \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=n}^{n+m} a_k x^k \right\| \leq \lim_{m \rightarrow \infty} C_n \left(\frac{x}{z} \right)^n = C_n \left(\frac{x}{z} \right)^n \leq C_n.$$

A z pontban

$$\left\| P_a(z) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k \right\| = \lim_{m \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=n}^{n+m} a_k z^k \right\| \leq \sup_{m \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{k=n}^{n+m} a_k z^k \right\| = C_n$$

teljesül. Tehát minden $x \in [0, z]$ esetén

$$\left\| P_a(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \right\| \leq C_n,$$

vagyis

$$\sup_{x \in [0, z]} \left\| P_a(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \right\| \leq C_n.$$

Mivel a 4.15 tétel alapján a $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat a nullához tart, ezért a hatványsor egyenletesen konvergens a $[0, z]$ intervallumon.

4.5. Lineáris leképezés függvénye

4.18. Tétel. Legyen V Banach-tér, $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ és jelölje R_a az a sorozat által meghatározott hatványsor konvergenciasugarát. Ekkor minden $A \in \mathcal{L}(V, V)$, elemre $\|A\| < R_a$ esetén a

$$\sum_n a_n A^n$$

sor konvergens.

Bizonyítás. Legyen V Banach-tér, $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ és jelölje R_a az a sorozat által meghatározott hatványsor konvergenciasugarát. Legyen $A \in \mathcal{L}(V, V)$ olyan elem, melyre $\|A\| < R_a$. Legyen $n \in \mathbb{N}$ tetszőleges. Ekkor

$$\sum_{k=0}^n \|a_k A^k\| \leq \sum_{k=0}^n |a_k| \cdot \|A\|^k.$$

A $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \cdot \|A\|^k$ sor konvergens a Cauchy–Hadamard-tétel miatt, hiszen a $k \mapsto |a_k|$ sorozat által meghatározott hatványsor konvergenciasugara is R_a , továbbá az $\|A\|$ számra $\|A\| < R_a$ teljesül. Ez azt mutatja, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számra

$$\sum_{k=0}^n \|a_k A^k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \cdot \|A\|^k,$$

vagyis a $\sum_n a_n A^n$ sor abszolút konvergens a $\mathcal{L}(V, V)$ Banach-térben, ezért konvergens is.

4.19. Definíció. Legyen V Banach-tér és legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olyan függvény, melynek a 0 körüli Taylor-sora mindenhol konvergens és megegyezik a függvénnyel, vagyis minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

teljesül. Ekkor minden $A \in \mathcal{L}(V, V)$ elemre legyen

$$f(A) \triangleq \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} A^n.$$

4.20. Definíció. Legyen T tetszőleges nem üres halmaz. A

$$\delta : T \times T \rightarrow \{0, 1\} \quad (i, j) \mapsto \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{ha } i \neq j; \\ 1, & \text{ha } i = j \end{cases}$$

függvény a Kronecker-féle delta-függvény.

4.21. Tétel. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineáris leképezés és $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olyan függvény, melynek a 0 körüli Taylor-sora mindenhol konvergens és megegyezik a függvénnyel.

1. Ha A diagonalizálható, azaz létezik olyan invertálható S mátrix és diagonális D mátrix, melyre $A = SDS^{-1}$, akkor $f(A) = Sf(D)S^{-1}$, ahol

$$f(D) = \begin{pmatrix} f(D_{11}) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(D_{22}) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & f(D_{nn}) \end{pmatrix}.$$

Vagyis, ha $D_{ij} = \delta_{ij} \lambda_i$, akkor $f(D)_{ij} = \delta_{ij} f(\lambda_i)$.

2. Ha az A mátrix Jordan-felbontása egyetlen Jordan-blokkból áll, vagyis létezik olyan invertálható S mátrix és J mátrix, melyre $A = SJS^{-1}$, ahol

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

akkor $f(A) = Sf(J)S^{-1}$, ahol

$$f(J) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda) & \frac{f^{(2)}(\lambda)}{2!} & \cdots & \frac{f^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!} \\ 0 & f(\lambda) & f'(\lambda) & \cdots & \frac{f^{(n-2)}(\lambda)}{(n-2)!} \\ 0 & 0 & f(\lambda) & \cdots & \frac{f^{(n-3)}(\lambda)}{(n-3)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & f(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Vagyis

$$ha \quad J_{ij} = \begin{cases} 0, & ha \quad i > j \text{ vagy } j - i > 1; \\ \lambda, & ha \quad i = j; \\ 1, & ha \quad j - i = 1, \end{cases} \quad akkor \quad f(J_{ij}) = \begin{cases} 0, & ha \quad i > j; \\ \frac{f^{(j-i)}(\lambda)}{(j-i)!}, & ha \quad i \leq j. \end{cases}$$

3. Ha A tetszőleges mátrix, melynek Jordan-felbontása $A = SPS^{-1}$ alakú, ahol S invertálható mátrix és P blokkdiagonális mátrix, melynek a főátlójában a $(J_i)_{i=1,\dots,k}$ Jordan-blokkok állnak, akkor $f(A) = Sf(P)S^{-1}$, ahol $f(P)$ az a blokkdiagonális mátrix, melynek a főátlójában az $(f(J_i))_{i=1,\dots,k}$ blokkok állnak.

Bizonyítás. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineáris leképezés és $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olyan analitikus függvény, melynek a 0 körüli Taylor-sora mindenhol konvergens és megegyezik a függvénnyel. Ekkor az $m \mapsto a_m = \frac{f^{(m)}(0)}{m!}$ olyan sorozat, melyre minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$$

teljesül, továbbá az a sorozat által meghatározott hatványsor konvergenciasugara végtelen. A 4.18 tétel alapján minden $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ leképezésre az

$$f(A) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m A^m$$

sor konvergens.

Mivel az f függvény mindenhol konvergens hatványsorral van meghatározva, ezért az f függvény minden $k \in \mathbb{N}$ esetén k -szor deriválható és minden $k \in \mathbb{N}$ és $x \in \mathbb{R}$ számra

$$f^{(k)}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \left(\prod_{i=0}^{k-1} (m-i) \right) x^{m-k} = \sum_{m=k}^{\infty} a_m \frac{m!}{(m-k)!} x^{m-k}$$

teljesül.

Legyen S invertálható mátrix és legyen $B = S^{-1}AS$. Ekkor $A = SBS^{-1}$ teljesül, valamint minden $m \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sum_{k=0}^m a_k A^k = \sum_{k=0}^m a_k S B^k S^{-1} = S \left(\sum_{k=0}^m a_k B^k \right) S^{-1}.$$

Mivel a mátrixszal való szorzás folytonos művelet, ezért

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(S \left(\sum_{k=0}^m a_k B^k \right) S^{-1} \right) = S \left(\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^m a_k B^k \right) \right) S^{-1} = \\ &= S \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k B^k \right) S^{-1} = S f(B) S^{-1}.\end{aligned}$$

1. Ha B diagonális mátrix, akkor hatványaira teljes indukcióval egyszerűen igazolható, hogy minden $m \in \mathbb{N}$ kitevőre és $i, j \in \{1, \dots, n\}$ indexre

$$B_{ij}^m = \begin{cases} B_{ii}^m, & \text{ha } i = j; \\ 0, & \text{ha } i \neq j \end{cases}$$

teljesül, amiből adódik az állítás.

2–3. Tegyük fel, hogy B olyan mátrix, mely egyetlen Jordan-blokkból áll, vagyis (4.1) alakú. Ekkor teljes indukcióval igazolható, hogy minden $m \in \mathbb{N}$ kitevőre és $i, j \in \{1, \dots, n\}$ indexre

$$B_{ij}^m = \begin{cases} 0, & \text{ha } j - i < 0; \\ \lambda^m, & \text{ha } j - i = 0; \\ \binom{m}{j-i} \lambda^{k-j+i}, & \text{ha } 0 < j - i \leq m; \\ 0, & \text{ha } j - i > m \end{cases}$$

teljesül. Ekkor az $f(B)$ mátrix $i, j \in \{1, \dots, n\}$ elemeire

$j < i$ esetén $f(B)_{ij} = 0$;

$j = i$ esetén $f(B)_{ii} = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \lambda^m = f(\lambda)$;

$j > i$ esetén

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m \binom{m}{j-i} \lambda^{k-j+i} = \frac{1}{(j-i)!} \sum_{m=0}^{\infty} a_m \frac{m!}{(m-(j-i))!} \lambda^{k-(j-i)} = \frac{1}{(j-i)!} f^{(j-i)}(\lambda)$$

teljesül.

4.22. Definíció. Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és tekintsünk egy $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineáris leképezést, legyen $\text{Sp}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ az A lineáris leképezés sajátértékeinek a halmaza és $f : \text{Sp}(A) \rightarrow \mathbb{C}$ függvény. Ha létezik olyan invertálható S mátrix és diagonális D mátrix, melyre $A = SDS^{-1}$, akkor $f(A) \triangleq Sf(D)S^{-1}$, ahol

$$f(D) = \begin{pmatrix} f(D_{11}) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(D_{22}) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & f(D_{nn}) \end{pmatrix}.$$

Vagyis, ha $D_{ij} = \delta_{ij} \lambda_i$, akkor $f(D)_{ij} = \delta_{ij} f(\lambda_i)$.

4.6. Függvénysorozat és függvénytörvény deriválása és integrálása

4.23. Definíció. Adott $x, y \in \mathbb{R}^n$ esetén a

$$\{tx + (1-t)y \mid t \in [0, 1]\}$$

halmazt *szakasznak* nevezzük. Az $n > 1$ esetben $[a, b]$ fogja jelölni a fenti halmazt, az $n = 1$ esetben, pedig $[a, b]$.

4.24. Tétel. Legyen $r \in \mathbb{R}^+$, $a \in \mathbb{R}$, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n : B_r(a) \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Ha létezik a $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a)$ határérték és az $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénytörvény egyenletesen konvergens a $B_r(a)$ halmazon, akkor

1. minden $x \in B_r(a)$ esetén létezik a $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ határérték;
2. az $f : B_r(a) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ függvényhez egyenletesen konvergál az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénytípus;
3. minden $x \in B_r(a)$ esetén

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x).$$

Bizonyítás. Legyen $r \in \mathbb{R}^+$, $a \in \mathbb{R}$, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n : B_r(a) \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Tegyük fel, hogy létezik a $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a)$ határérték és az $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénytípus egyenletesen konvergál a $g : B_r(a) \rightarrow \mathbb{R}$ függvényhez a $B_r(a)$ halmazon.

Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel az $(f_n(a))_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat konvergens, ezért Cauchy-sorozat, vagyis létezik olyan $N_1 \in \mathbb{N}$, hogy minden $N_1 < m, n \in \mathbb{N}$ számra

$$|f_n(a) - f_m(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

teljesül. Mivel az $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénytípus egyenletesen konvergens a $B_r(a)$ halmazon ezért a 4.3 tétel alapján létezik olyan $N_2 \in \mathbb{N}$, hogy minden $N_2 < m, n \in \mathbb{N}$ számra

$$\sup_{y \in B_r(a)} |f'_n(y) - f'_m(y)| < \frac{\varepsilon}{2r}$$

teljesül. Legyen $N = \max\{N_1, N_2\}$.

Legyen $m, n \in \mathbb{N}$ és $x \in B_r(a) \setminus \{a\}$ tetszőleges pont. Ekkor az $f_n - f_m$ függvényre és az $[a, x]$ szakaszra alkalmazva a véges növekmények formuláját

$$|f_n(x) - f_m(x) - (f_n(a) - f_m(a))| \leq \left(\sup_{y \in]a, x[} |(f_n - f_m)'(y)| \right) \cdot |x - a|$$

adódik. Ekkor minden $N < n, m$ természetes számra

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(a) - f_m(a)| + \left(\sup_{y \in]a, x[} |(f_n - f_m)'(y)| \right) \cdot |x - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2r} \cdot r = \varepsilon.$$

Vagyis $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ valós Cauchy-sorozat, tehát létezik a $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ határérték.

Az eddigiek szerint minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan N , hogy minden $N < n, m$ esetén minden $x \in B_r(a)$ pontra

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

teljesül, amiből a 4.3 tétel alapján adódik, hogy az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénytípus egyenletesen konvergens. Legyen $t \in B_r(a)$ tetszőleges pont. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen

$$\varphi_n : B_r(a) \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \begin{cases} \frac{f_n(x) - f_n(t) - f'_n(t)(x - t)}{|x - t|}, & \text{ha } x \neq t; \\ 0, & \text{ha } x = t, \end{cases}$$

továbbá legyen

$$\varphi : B_r(a) \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \begin{cases} \frac{f(x) - f(t) - g(t)(x - t)}{|x - t|}, & \text{ha } x \neq t; \\ 0, & \text{ha } x = t. \end{cases}$$

Az f_n függvény t pontbeli differenciálhatósága miatt a φ_n függvény folytonos a $B_r(a)$ halmazon. Ha a $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénytípus egyenletesen konvergálna a φ függvényhez az $B_r(a)$ halmazon, akkor a 4.4 tétel miatt a φ függvény is folytonos lenne a $B_r(a)$ halmazon, vagyis az f függvény differenciálható lenne a t pontban, és teljesülne a bizonyítandó

$$f'(t) = g(t)$$

egyenlőség.

Most megmutatjuk, hogy a $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál a φ függvényhez a $B_r(a)$ halmazon.

Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel az $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a $B_r(a)$ halmazon ezért a 4.3 tétel alapján létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $N < n, m \in \mathbb{N}$ számra

$$\sup_{y \in B_r(a)} |f'_n(y) - f'_m(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

teljesül. Legyen $x \in B_r(a)$ tetszőleges pont. Ekkor a

$$B_r(a) \rightarrow \mathbb{R} \quad u \mapsto f_n(u) - f_m(u) - (f'_n(t) - f'_m(t))u$$

függvényre és az $[t, x]$ szakaszra alkalmazva a véges növekmények formuláját

$$\begin{aligned} & |f_n(x) - f_m(x) - (f_n(t) - f_m(t)) - (f'_n(t)(x - t) - f'_m(t)(x - t))| \leq \\ & \left(\sup_{y \in [t, x]} |(f_n - f_m)'(y) - (f'_n(t) - f'_m(t))| \right) \cdot |x - t| \end{aligned}$$

adódik, vagyis ha $N < m, n \in \mathbb{N}$, akkor

$$\begin{aligned} & |f_n(x) - f_m(x) - (f_n(t) - f_m(t)) - (f'_n(t)(x - t) - f'_m(t)(x - t))| \leq \\ & \leq \left(\sup_{y \in [t, x]} (|(f_n - f_m)'(y)| + |f'_n(t) - f'_m(t)|) \right) \cdot |x - t| \leq \\ & \leq \left(\left(\sup_{y \in B_r(a)} |(f_n - f_m)'(y)| \right) + \frac{\varepsilon}{2} \right) \cdot |x - t| \leq \\ & \leq \left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \right) \cdot |x - t| = \varepsilon |x - t|. \end{aligned}$$

Ezek alapján minden $N < n, m$ természetes számra $x \neq t$ esetén

$$|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| \leq \frac{\varepsilon \cdot |x - t|}{|x - t|} = \varepsilon,$$

valamint $x = t$ esetén is $|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| = 0 < \varepsilon$. Ezzel megmutattuk, hogy a $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozatra

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N} \forall x \in B_r(a) : (N < n, m \rightarrow |\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| \leq \varepsilon)$$

teljesül, amiből a 4.3 tétel értelmében következik, hogy a $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál a pontonkénti határfüggvényhez, a φ függvényhez a $B_r(a)$ halmazon.

4.25. Tétel. (Függvénysorozat differenciálhatósága.) Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Ha az $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens az Ω halmazon és létezik olyan $a \in \Omega$ pont, melyre létezik a $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a)$ határérték, akkor

1. minden $x \in \Omega$ esetén létezik a $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ határérték;
2. az $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ függvényhez lokálisan egyenletesen konvergál az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat;
3. minden $x \in \Omega$ esetén

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x).$$

Bizonyítás. Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Tegyük fel, hogy az $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens az Ω halmazon és létezik olyan $a \in \Omega$ pont, melyre létezik a $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a)$ határérték.

Definiáljuk az

$$\Omega' = \left\{ x \in \Omega \mid \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right\}$$

halmazt. Megmutatjuk, hogy Ω' nyílt halmaz. Legyen $x \in \Omega'$. Mivel az $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens, ezért létezik olyan $r \in \mathbb{R}$, hogy $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ egyenletesen konvergens a $B_r(x)$ halmazon. Az előző, 4.24, tétel alapján ekkor $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ egyenletesen konvergens a $B_r(x)$ halmazon, tehát $B_r(x) \subseteq \Omega'$.

Tegyük fel, hogy $\Omega' \neq \Omega$. Vegyünk egy $x \in \Omega \setminus \Omega'$ elemet. Legyen

$$H = \{t \in [0, 1] \mid [a, a + t(x - a)] \subseteq \Omega'\},$$

$c = \sup H$ és $p = a + c(x - a)$. Az a pontra és olyan $B_r(a)$ környezetére alkalmazva a 4.24 tételt, ahol az $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens, az adódik, hogy $c > 0$. Az Ω' halmaz nyíltsága miatt pedig $p \notin \Omega'$. Mivel $p \in \Omega$, ezért létezik olyan $r > 0$, hogy a $B_r(p)$ halmazon egyenletesen konvergens az $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat.

A c szám konstrukciója folytán létezik olyan $t_0 \in H$, melyre $c - \frac{r}{4|x - a|} < t_0$, ezért a $q = a + t_0(x - a) \in \Omega'$ elemre

$$|p - q| = |a + c(x - a) - a - t_0(x - a)| = |c - t_0| \cdot |x - a| < \frac{r}{4}.$$

Ekkor viszont alkalmazható a 4.24 tétel a $B_{\frac{r}{2}}(q)$ halmazon, mely szerint az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat konvergens ezen a halmazon, tehát a $p \in B_{\frac{r}{2}}(q)$ pontban is konvergens. Ez azonban ellentmond a $p \notin \Omega'$ feltevésnek. Tehát $\Omega' = \Omega$.

Legyen $x \in \Omega$. Mivel az $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens, ezért létezik olyan $r \in \mathbb{R}$, hogy $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ egyenletesen konvergens a $B_r(x)$ halmazon. Az előző, 4.24, tétel alapján ekkor $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ egyenletesen konvergens a $B_r(x)$ halmazon, tehát $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lokálisan egyenletesen konvergens.

4.26. Tétel. (Függvénysor határfüggvényének differenciálhatósága.) Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ nyílt intervallum és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Ha a $\sum_{n=0}^{\infty} f'_n$ függvénysor lokálisan egyenletesen konvergens az Ω halmazon és létezik olyan $a \in \Omega$ pont, melyre konvergens a $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(a)$ sor, akkor

1. minden $x \in \Omega$ esetén konvergens a $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ sor;
2. az $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ függvényhez lokálisan egyenletesen konvergál a $\sum_n f_n$ függvénysor;
3. minden $x \in \Omega$ esetén

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x).$$

Bizonyítás. Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{R}$, nyílt intervallum és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Legyen $a \in \Omega$ olyan pont, ahol konvergens a $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(a)$ sor, és tegyük fel, hogy az

$\sum_n f'_n$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $g_n = \sum_{k=0}^n f_k$.

Ekkor a $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozatra alkalmazva a 4.25 állítást adódik a tétel.

4.27. Tétel. (Függvénysorozat határfüggvényének integrálhatósága.) A $C([a, b], \mathbb{R})$ halmazban haladó $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a függvénysorozatról tegyük fel, hogy egyenletesen konvergál a határfüggvényéhez az $[a, b]$ intervallumon. Ekkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a $C([a, b], \mathbb{R})$ halmazban haladó függvénysorozat, mely egyenletesen konvergál az $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvényhez. Ekkor a 4.4 tétel miatt f folytonos függvény, tehát Riemann-integrálható. Legyen $\varepsilon' \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Az egyenletes konvergencia miatt létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $N < n \in \mathbb{N}$ számra $\|f_n - f\|_{\sup} < \varepsilon'$. Ekkor minden $N < n$ természetes számra

$$\left| \int_a^b f - \int_a^b f_n \right| = \left| \int_a^b (f - f_n) \right| \leq \int_a^b |f - f_n| \leq \int_a^b \varepsilon' = (b - a)\varepsilon'$$

teljesül. Vagyis minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $N < n \in \mathbb{N}$ számra

$$\left| \int_a^b f - \int_a^b f_n \right| < \varepsilon$$

teljesül, ami éppen a bizonyítandó

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f$$

határértéket jelenti.

4.28. Tétel. (Függvénysor határfüggvényének integrálhatósága.) Legyen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a $C([a, b], \mathbb{R})$ halmazban haladó függvénysorozat. Tegyük fel, hogy a $\sum_n f_n$ függvénysor egyenletesen konvergál az összegfüggvényéhez az $[a, b]$ intervallumon. Ekkor

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a $C([a, b], \mathbb{R})$ halmazban haladó függvénysorozat. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $g_n = \sum_{k=0}^n f_k$. Ekkor a $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozatra alkalmazva a 4.27 tételt adódik az állítás.

4.7. Hatványsor tagokénti deriválása és integrálása

4.29. Tétel. (Hatványsor tagonkénti differenciálhatósága.) Tekintsük az $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozat által meghatározott $P_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ hatványsort, melynek konvergenciasugarát jelölje R_a . Minden $x \in \mathbb{R}$, $|x| < R_a$ esetén a hatványsor tagonként differenciálható az x pontban, azaz

$$P'_a(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1}.$$

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozat, $P_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a sorozat által meghatározott hatványsor R_a konvergenciasugárral. Tekintsük a

$$b : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \quad k \mapsto (k+1)a_{k+1}$$

sorozatot és az általa meghatározott P_b hatványsort. A P_b hatványsor konvergenciasugarára $R_b = R_a$ teljesül. Ekkor a Cauchy–Hadamard-tétel alapján a P_b hatványsor lokálisan egyenletesen konvergens az $I =]-R_a, R_a[$ intervallumon, valamint $x_0 = 0$ olyan pont az I intervallumban, ahol a P_a hatványsor konvergens. Ezért a 4.26 tétel alapján a P_a hatványsort lehet tagonként deriválni az I intervallum minden pontjában.

4.30. Tétel. (Hatványsor tagonkénti integrálhatósága.) Tekintsük az $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozat által meghatározott $P_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ hatványsort, melynek konvergenciasugarát jelölje R_a . Minden $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$, $[\alpha, \beta] \subseteq]-R_a, R_a[$ esetén a hatványsor tagonként integrálható az $[\alpha, \beta]$ intervallumon, azaz

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} a_k x^k dx.$$

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozat, $P_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a sorozat által meghatározott hatványsor R_a konvergenciasugárral. Legyen továbbá $[\alpha, \beta]$ olyan korlátos intervallum, melyre $[\alpha, \beta] \subseteq]-R_a, R_a[$ teljesül. A Cauchy–Hadamard-tétel alapján a P_a hatványsor lokálisan egyenletesen konvergens az $[\alpha, \beta]$ kompakt halmazon, azonban a 4.6 tétel miatt egyenletesen is itt. Figyelembe véve, hogy a hatványsor minden részletösszeg függvénye folytonos és egyenletesen konvergens az $[\alpha, \beta]$ véges intervallumon, a 4.28 tétel alapján a hatványsor tagonként integrálható.

4.8. Approximáció polinomokkal

Magyarázat. A továbbiakban a folytonos függvények polinomokkal való közelítéséről szóló alaptételt tárgyaljuk.

4.31. Definíció. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ és $n \in \mathbb{N}^+$. Az f függvény n -edik Bernstein-polinomjának nevezzük az

$$B_n^f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K} \quad t \mapsto \frac{1}{(b-a)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) (t-a)^k (b-t)^{n-k}$$

polinomot.

4.32. Tétel. (Approximáció Bernstein-polinomokkal.) Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ folytonos függvény. Ekkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{t \in [a, b]} |B_n^f(t) - f(t)| \right) = 0.$$

Bizonyítás. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ folytonos függvény, valamint legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Mivel $[a, b]$ kompakt halmaz és f folytonos, ezért: f korlátos, vagyis létezik olyan $C \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $t \in [a, b]$ pontra $\|f(t)\| < C$; valamint a Heine-tétel miatt f egyenletesen folytonos, vagyis a később rögzítendő $\varepsilon' \in \mathbb{R}^+$ paraméterhez létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $t, t' \in [a, b]$, $|t - t'| < \delta$ esetén $\|f(t) - f(t')\| < \varepsilon'$ teljesül. Legyen $t \in [a, b]$ és $n \in \mathbb{N}$ rögzített. Ekkor

$$|B_n^f(t) - f(t)| = \left| \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) - f(t) \right) \left(\frac{t-a}{b-a} \right)^k \left(\frac{b-t}{b-a} \right)^{n-k} \right|. \quad (4.2)$$

Tekintsük az

$$I_n = \left\{ k \in \{0, \dots, n\} \mid \left| a + \frac{k}{n}(b-a) - t \right| < \delta \right\}$$

$$J_n = \left\{ k \in \{0, \dots, n\} \mid \left| a + \frac{k}{n}(b-a) - t \right| \geq \delta \right\}$$

halmazokat. Ekkor $I_n \cap J_n = \emptyset$ és $I_n \cup J_n = \{0, \dots, n\}$, vagyis a (4.2) egyenlet alapján

$$\begin{aligned} |B_n^f(t) - f(t)| &\leq \sum_{k \in I_n} \binom{n}{k} \left| f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) - f(t) \right| \left(\frac{t-a}{b-a} \right)^k \left(\frac{b-t}{b-a} \right)^{n-k} + \\ &+ \sum_{k \in J_n} \binom{n}{k} \left\| f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) - f(t) \right\| \left(\frac{t-a}{b-a} \right)^k \left(\frac{b-t}{b-a} \right)^{n-k} \leq \\ &\leq \sum_{k \in I_n} \binom{n}{k} \cdot \varepsilon' \cdot \left(\frac{t-a}{b-a} \right)^k \left(\frac{b-t}{b-a} \right)^{n-k} + \sum_{k \in J_n} \binom{n}{k} \cdot 2C \cdot \left(\frac{t-a}{b-a} \right)^k \left(\frac{b-t}{b-a} \right)^{n-k} \leq \\ &\leq \varepsilon' \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{t-a}{b-a} \right)^k \left(\frac{b-t}{b-a} \right)^{n-k} + 2C \sum_{k \in J_n} \binom{n}{k} \left(\frac{t-a}{b-a} \right)^k \left(\frac{b-t}{b-a} \right)^{n-k} = \end{aligned}$$

$$= \varepsilon' + 2C \sum_{k \in J_n} \binom{n}{k} \left(\frac{t-a}{b-a} \right)^k \left(\frac{b-t}{b-a} \right)^{n-k}.$$

Ha $k \in J_n$, akkor definíció szerint

$$\left| a + \frac{k}{n}(b-a) - t \right| \geq \delta,$$

amiből

$$\frac{(b-a)^2}{\delta^2 n^2} \cdot \left(k - \frac{t-a}{b-a} \cdot n \right)^2 \geq 1$$

adódik. Ezért

$$\begin{aligned} \sum_{k \in J_n} \binom{n}{k} \left(\frac{t-a}{b-a} \right)^k \left(\frac{b-t}{b-a} \right)^{n-k} &\leq \frac{(b-a)^2}{\delta^2 n^2} \sum_{k \in J_n} \binom{n}{k} \left(k - \frac{t-a}{b-a} \cdot n \right)^2 \left(\frac{t-a}{b-a} \right)^k \left(\frac{b-t}{b-a} \right)^{n-k} \leq \\ &\leq \frac{(b-a)^2}{\delta^2 n^2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (k - nx)^2 x^k (1-x)^{n-k}, \end{aligned}$$

ahol $x = \frac{t-a}{b-a}$. Minden $y, z \in \mathbb{R}$ esetén

$$(y+z)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} y^k z^{n-k},$$

melynek y szerinti első és második deriváltjából

$$\begin{aligned} ny(y+z)^{n-1} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k y^k z^{n-k} \\ n(n-1)y^2(y+z)^{n-2} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k(k-1)y^k z^{n-k} \end{aligned}$$

adódik. Ha $z = 1 - y$, akkor ezekből

$$\begin{aligned} ny &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k y^k (1-y)^{n-k} \\ n(n-1)y^2 + ny &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k^2 y^k (1-y)^{n-k} \end{aligned}$$

következik, vagyis

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (k - nx)^2 x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x).$$

Figyelembe véve, hogy $|x|, |1-x| \leq 1$

$$\|B_n^f(t) - f(t)\| \leq \varepsilon' + \frac{2C(b-a)^2}{\delta^2 n}$$

adódik. Vagyis ha $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$ és $N \in \mathbb{N}$ tetszőleges természetes szám, melyre $N > \frac{4C(b-a)^2}{\delta^2 \varepsilon}$ teljesül, akkor minden $n > N$ és $t \in [a, b]$ esetén

$$|B_n^f(t) - f(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2C(b-a)^2}{\delta^2 n} \leq \varepsilon,$$

ezért

$$\sup_{t \in [a, b]} |B_n^f(t) - f(t)| \leq \varepsilon.$$

4.33. Tétel. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ folytonos függvény. Ekkor minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén létezik olyan $p : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ polinom, hogy minden $x \in [a, b]$ számra

$$|f(x) - p(x)| < \varepsilon$$

teljesül.

Bizonyítás. A 4.32 Bernstein-polinomokkal való approximációs tétel közvetlen következménye.

5. Fourier-sorok

5.1. Trigonometrikus polinomok

5.1. Definíció. Az $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ függvények

$$\mathcal{T}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \triangleq \left\{ t \mapsto \sum_{k=0}^n (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \mid n \in \mathbb{N}, \forall k \in \{0, \dots, n\} : a_k, b_k \in \mathbb{C} \right\}$$

részalmazát *trigonometrikus polinomoknak* nevezzük.

5.2. Tétel. (*A trigonometrikus polinomok alaptulajdonságai.*)

1. A pontonkénti műveletekkel $\mathcal{T}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ algebrát alkot.
2. Minden $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ polinom esetén $P \circ \cos \in \mathcal{T}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
3. Minden $f \in \mathcal{T}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ és $x \in \mathbb{R}$ esetén a $t \mapsto f(t+x)$ függvény is trigonometrikus polinom.

Bizonyítás.

1. A trigonometrikus polinomok halmaza az összeadásra és a számmal való szorzásra nyilván zárt, a szorzásra pedig a minden $k, l \in \mathbb{N}$ és $t \in \mathbb{R}$ számra érvényes

$$\begin{aligned} \sin(kt) \sin(lt) &= \frac{1}{2} \cos((k-l)t) - \frac{1}{2} \cos((k+l)t) \\ \sin(kt) \cos(lt) &= \frac{1}{2} \sin((k-l)t) + \frac{1}{2} \sin((k+l)t) \\ \cos(kt) \cos(lt) &= \frac{1}{2} \cos((k-l)t) + \frac{1}{2} \cos((k+l)t) \end{aligned}$$

addíciós formulák miatt zárt.

2. Megmutatjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\cos^n$ trigonometrikus polinom. Az $n = 0$ és $n = 1$ esetekben igaz az állítás. Tegyük fel, hogy $\cos^n$ trigonometrikus polinom. Ekkor a $\cos^n$ trigonometrikus polinomot megszorozva a $\cos$ trigonometrikus polinommal, az 1. pont értelmében megint trigonometrikus polinomot kapunk, tehát $\cos^{n+1}$ is trigonometrikus polinom. Ebből az 1. pont alkalmazásával adódik, hogy minden P polinomra $P \circ \cos$ trigonometrikus polinom.

3. A minden $t, x \in \mathbb{R}$ és $k \in \mathbb{N}$ számra fennálló

$$\begin{aligned} \sin(k(t+x)) &= \cos(kx) \sin(kt) + \sin(kx) \cos(kt) \\ \cos(k(t+x)) &= \cos(kx) \cos(kt) - \sin(kx) \sin(kt) \end{aligned}$$

azonosságokból következik az állítás.

5.3. Tétel. (*Weierstrass approximációs tétele.*) Minden $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ függvényhez és minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\varphi \in \mathcal{T}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, melyre $\|f - \varphi\|_\infty < \varepsilon$ teljesül.

Bizonyítás. Több lépésben bizonyítjuk a tételt.

1. Legyen $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ páros függvény, és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Ekkor az $f \circ \arccos : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény folytonos és a 4.33 tétel szerint létezik olyan $p : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ polinom, hogy

$$\sup_{t \in [-1, 1]} |f(\arccos(t)) - p(t)| < \varepsilon$$

teljesül. A trigonometrikus polinomok alaptulajdonságairól szóló tétel alapján a $\varphi = p \circ \cos$ függvény trigonometrikus polinom. Mivel az f és a φ függvény 2π szerint periodikus, ezért

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - \varphi(x)| = \sup_{x \in [-\pi, \pi]} |f(x) - \varphi(x)|,$$

valamint mivel az f és a φ függvény páros, ezért

$$\sup_{x \in [-\pi, \pi]} |f(x) - \varphi(x)| = \sup_{x \in [0, \pi]} |f(x) - \varphi(x)|.$$

Minden $x \in [0, \pi]$ esetén $\arccos \cos x = x$ és minden $t \in [-1, 1]$ esetén $\cos \arccos t = t$, ezért

$$\begin{aligned} \sup_{x \in [0, \pi]} |f(x) - \varphi(x)| &= \sup_{x \in [0, \pi]} |(f \circ \arccos)(\cos x) - ((p \circ \cos) \circ \arccos)(\cos x)| = \\ &= \sup_{t \in [-1, 1]} |(f \circ \arccos)(t) - p(t)| < \varepsilon, \end{aligned}$$

vagyis $\|f - \varphi\|_\infty < \varepsilon$.

2. Legyen $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tetszőleges függvény, és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Most megmutatjuk, hogy létezik olyan $\varphi \in \mathcal{T}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, melyre $\|f \sin^2 - \varphi\|_\infty < \varepsilon$ teljesül. Legyen

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} & x &\mapsto \frac{f(x) + f(-x)}{2} \\ f_2 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} & x &\mapsto \frac{f(x) - f(-x)}{2} \sin x. \end{aligned}$$

Ekkor $f \sin^2 = f_1 \sin^2 + f_2 \sin$, valamint $f_1, f_2 \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ páros 2π szerint periodikus függvények, vagyis az 1. pont alapján létezik olyan φ_1, φ_2 trigonometrikus polinom, melyre $\|f_1 - \varphi_1\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$ és $\|f_2 - \varphi_2\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$ teljesül. A trigonometrikus polinomok alaptulajdonságairól szóló tétel alapján a $\varphi = \varphi_1 \sin^2 + \varphi_2 \sin$ függvény trigonometrikus polinom. Ekkor

$$\begin{aligned} \|f \sin^2 - \varphi\|_\infty &= \|f_1 \sin^2 + f_2 \sin - (\varphi_1 \sin^2 + \varphi_2 \sin)\|_\infty \leq \\ &\leq \|f_1 \sin^2 - \varphi_1 \sin^2\|_\infty + \|f_2 \sin - \varphi_2 \sin\|_\infty \leq \\ &\leq \|f_1 - \varphi_1\|_\infty + \|f_2 - \varphi_2\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

teljesül.

3. Legyen $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tetszőleges függvény, és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. Megmutatjuk, hogy létezik olyan φ trigonometrikus polinom, melyre $\|f \cos^2 - \varphi\|_\infty < \varepsilon$ teljesül. Legyen

$$f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto f\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Ekkor $f_1 \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 2π szerint periodikus függvény, vagyis az 2. pont alapján létezik olyan φ_1 trigonometrikus polinom, melyre $\|f_1 \sin^2 - \varphi_1\|_\infty < \varepsilon$ teljesül. A trigonometrikus polinomok alaptulajdonságairól szóló tétel alapján a

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \varphi_1\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

függvény trigonometrikus polinom. Ekkor

$$\begin{aligned} \|f \cos^2 - \varphi\|_\infty &= \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) \cos^2 x - \varphi(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cos^2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \varphi\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \right| = \\ &= \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_1(x) \sin^2(x) - \varphi_1(x)| = \|f_1 \sin^2 - \varphi_1\|_\infty < \varepsilon \end{aligned}$$

teljesül.

4. Legyen $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tetszőleges függvény, és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. A 2. pont alapján létezik olyan φ_1 trigonometrikus polinom, melyre $\|f \sin^2 - \varphi_1\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$; a 3. pont alapján létezik olyan φ_2 trigonometrikus polinom, melyre $\|f \cos^2 - \varphi_2\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$ teljesül. Legyen $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$. Ekkor

$$\|f - \varphi\|_\infty = \|f \sin^2 + f \cos^2 - \varphi_1 - \varphi_2\|_\infty \leq \|f \sin^2 - \varphi_1\|_\infty + \|f \cos^2 - \varphi_2\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

5. Végül legyen $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ tetszőleges függvény, és legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges paraméter. A 4. pont alapján létezik olyan φ_1 és φ_2 trigonometrikus polinom, melyre $\|\operatorname{Re} f - \varphi_1\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$ és $\|\operatorname{Im} f - \varphi_2\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$ teljesül. Legyen $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$. Ekkor

$$\|f - \varphi\|_\infty = \|(\operatorname{Re} f - \varphi_1) + i(\operatorname{Im} f - \varphi_2)\|_\infty < \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4} + \frac{\varepsilon^2}{4}} < \varepsilon.$$

5.2. Fourier-féle ortogonális függvényrendszer

5.4. Tétel. Legyen $a \in \mathbb{R}$, $k, l, m \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $0 \neq k \neq l \neq m$. Ekkor az alábbiak teljesülnek.

$$\begin{aligned} \int_a^{a+2\pi} \cos(kx) \, dx &= 0 & \int_a^{a+2\pi} \sin(kx) \, dx &= 0 \\ \int_a^{a+2\pi} \cos^2(kx) \, dx &= \pi & \int_a^{a+2\pi} \sin^2(kx) \, dx &= \pi \\ \int_a^{a+2\pi} \cos(mx) \cos(lx) \, dx &= 0 & \int_a^{a+2\pi} \sin(mx) \sin(lx) \, dx &= 0 \\ \int_a^{a+2\pi} \cos(mx) \sin(kx) \, dx &= 0 \end{aligned}$$

Bizonyítás. Legyen $a \in \mathbb{R}$, $k, l, m \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $0 \neq k \neq l \neq m$.

1. Ekkor kihasználva, hogy a $\sin$ függvény 2π szerint periodikus

$$\int_a^{a+2\pi} \cos(kx) \, dx = \left[\frac{\sin(kx)}{k} \right]_a^{a+2\pi} = \frac{\sin(ka) - \sin(ka + k2\pi)}{k} = 0$$

adódik. Hasonlóan igazolható, hogy $\int_a^{a+2\pi} \sin(kx) \, dx = 0$.

2. A minden $x \in \mathbb{R}$ és $k \in \mathbb{N}^+$ számra érvényes $\cos(2kx) = \cos^2(kx) - \sin^2(kx)$ és $\sin^2(kx) + \cos^2(kx) = 1$ formulából az 1. pont eredményének a felhasználásával

$$\begin{aligned} \int_a^{a+2\pi} \cos^2(kx) \, dx &= \frac{1}{2} \int_a^{a+2\pi} 1 + \cos(2kx) \, dx = \pi \\ \int_a^{a+2\pi} \sin^2(kx) \, dx &= \frac{1}{2} \int_a^{a+2\pi} 1 - \cos(2kx) \, dx = \pi \end{aligned}$$

adódik.

3. A trigonometrikus függvényekre vonatkozó addíciós tételek és az 1. pont alapján

$$\begin{aligned} \int_a^{a+2\pi} \cos(mx) \cos(lx) \, dx &= \frac{1}{2} \int_a^{a+2\pi} \cos((k+l)x) + \cos((k-l)x) \, dx = 0 \\ \int_a^{a+2\pi} \sin(mx) \sin(lx) \, dx &= \frac{1}{2} \int_a^{a+2\pi} \cos((m-l)x) - \cos((l+m)x) \, dx = 0 \\ \int_a^{a+2\pi} \cos(mx) \sin(kx) \, dx &= \frac{1}{2} \int_a^{a+2\pi} \sin((m+k)x) + \sin((k-m)x) \, dx = 0 \end{aligned}$$

adódik.

5.5. Tétel. Legyen $a, b : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ olyan sorozat, hogy az

$$S_n : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R} \quad t \mapsto a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kt) + b_n \sin(kt)$$

függvénysorozat egyenletesen konvergál az f határfüggvényhez a $[-\pi, \pi]$ intervallumon. Ekkor minden $k \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f, \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) \, dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) \, dt$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $a, b : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ olyan sorozat, hogy az $S_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kt) + b_n \sin(kt)$ függvénysorozat egyenletesen konvergál a $[0, 2\pi]$ intervallumon az f határfüggvényhez, azaz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, 2\pi]} |S_n(t) - f(t)| = 0$$

teljesül. Legyen $k \in \mathbb{N}$ tetszőleges. Ekkor

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, 2\pi]} |S_n(t) \sin(kt) - f(t) \sin(kt)| &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, 2\pi]} |S_n(t) - f(t)| |\sin(kt)| \leq \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, 2\pi]} |S_n(t) - f(t)| = 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, 2\pi]} |S_n(t) \cos(kt) - f(t) \cos(kt)| &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, 2\pi]} |S_n(t) - f(t)| |\cos(kt)| \leq \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, 2\pi]} |S_n(t) - f(t)| = 0, \end{aligned}$$

vagyis a $t \mapsto S_n(t) \sin(kt)$ és a $t \mapsto S_n(t) \cos(kt)$ függvénysorozat is egyenletesen konvergál a $t \mapsto f(t) \sin(kt)$ és a $t \mapsto f(t) \cos(kt)$ függvényhez. Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén az $S_n(t) \sin(kt)$ illetve az $S_n(t) \cos(kt)$ függvény folytonos, ezért a függvénysorozat tagonkénti integrálhatóságáról szóló tétel értelmében

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) \, dt &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} S_n(t) \cos(kt) \, dt \\ \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) \, dt &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} S_n(t) \sin(kt) \, dt, \end{aligned}$$

továbbá a trigonometrikus függvények integráljáról szóló 5.4 tétel miatt

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} S_n(t) \cos(kt) \, dt &= \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{cases} 0, & \text{ha } n < k; \\ \pi a_k & \text{ha } n \geq k; \end{cases} = \pi a_k \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} S_n(t) \sin(kt) \, dt &= \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{cases} 0, & \text{ha } n < k; \\ \pi b_k & \text{ha } n \geq k; \end{cases} = \pi b_k \end{aligned}$$

amiből következik az állítás.

5.6. Tétel. A $C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ vektortéren tekintsük a

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : C_{2\pi}([-\pi, \pi], \mathbb{C}) \times C_{2\pi}([-\pi, \pi], \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R} \quad (f, g) \mapsto \int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}g$$

leképezést.

1. A fent definiált művelet skaláris szorzás.

2. A

$$\left\{ x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$$

vektorrendszer ortonormált és teljes.

3. A

$$\left\{ x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, x \mapsto \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, x \mapsto \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} \mid n \in \mathbb{N}^+ \right\}$$

vektorrendszer ortonormált és teljes.

Bizonyítás. 1. Egyszerűen ellenőrizhető, hogy a definiált művelet teljesíti a skaláris szorzás kritériumait.

2. Legyen $k, l \in \mathbb{Z}$. Ha $k \neq l$, akkor az 5.4 tétel alapján

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ilx} \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(kx) - i \sin(kx))(\cos(lx) + i \sin(lx)) \, dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cos(lx) + \sin(kx) \sin(lx) \, dx + \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \sin(lx) - \sin(kx) \cos(lx) \, dx = 0$$

ami mutatja, hogy a függvényrendszer ortogonális. A minden $k \in \mathbb{Z}$ esetén fennálló

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ilx} \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikx} e^{ilx} \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 1 \, dx = 1$$

egyenlet pedig mutatja, hogy a függvényrendszer normált.

3. Legyen $k, l \in \mathbb{N}^+$. Ha $k \neq l$, akkor az 5.4 tétel alapján

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(kx) \right\rangle &= 0 \\ \left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(kx) \right\rangle &= 0 \\ \left\langle \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(lx), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(kx) \right\rangle &= 0 \\ \left\langle \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(lx), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(kx) \right\rangle &= 0 \\ \left\langle \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(lx), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(kx) \right\rangle &= 0 \end{aligned}$$

ami mutatja, hogy a 2. pontban megadott függvényrendszer ortogonális. Szintén az 5.4 tétel alapján a

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle &= 1 \\ \left\langle \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(kx), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(kx) \right\rangle &= 1 \\ \left\langle \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(kx), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(kx) \right\rangle &= 1 \end{aligned}$$

összefüggések pedig azt mutatják, hogy a megadott függvényrendszer normált.

4. Most igazoljuk, hogy az 1. illetve a 2. pontban megadott függvényrendszer teljessége ekvivalens. Ehhez először tegyük fel, hogy $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ olyan függvény, hogy minden $n \in \mathbb{Z}$ esetén

$$\left\langle f(x), \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} \right\rangle = 0$$

teljesül. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\begin{aligned} \left\langle f(x), \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle &= \left\langle f(x), \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i \cdot 0 \cdot x} \right\rangle = 0 \\ \left\langle f(x), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx) \right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\langle f(x), \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} \right\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \left\langle f(x), \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-inx} \right\rangle = 0 \\ \left\langle f(x), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx) \right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}i} \left\langle f(x), \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} \right\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}i} \left\langle f(x), \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-inx} \right\rangle = 0 \end{aligned}$$

teljesül. Tehát ha f merőleges a

$$\left\{ x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$$

vektorhalmaz minden elemére, akkor merőleges az összes

$$\left\{ x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, x \mapsto \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, x \mapsto \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} \mid n \in \mathbb{N}^+ \right\}$$

vektorra is.

Fordítva, tegyük fel, hogy $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ olyan függvény, hogy merőleges a

$$\left\{ x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, x \mapsto \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, x \mapsto \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} \mid n \in \mathbb{N}^+ \right\}$$

vektorhalmaz összes elemére. Ekkor minden $n \in \mathbb{Z}$ esetén

$$\left\langle f(x), \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} \right\rangle = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \left\langle f(x), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx) \right\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}} \left\langle f(x), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx) \right\rangle = 0, & \text{ha, } n > 0; \\ 0, & \text{ha, } n = 0; \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \left\langle f(x), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx) \right\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}} \left\langle f(x), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx) \right\rangle = 0, & \text{ha, } n < 0 \end{cases}$$

teljesül, tehát f merőleges minden

$$\left\{ x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$$

vektorra.

5. Most megmutatjuk, hogy a megadott függvényrendszer teljes. Ehhez tegyük fel, hogy létezik olyan nem azonosan nulla $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ függvény, hogy minden $n \in \mathbb{Z}$ esetén $\langle f(x), e^{inx} \rangle = 0$

teljesül. Mivel f nem azonosan nulla, ezért $0 < \int_0^{2\pi} |f|^2$. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Az 5.3

Weierstrass approximációs tétele szerint létezik olyan $\varphi \in \mathcal{T}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, hogy minden $x \in [-\pi, \pi]$ esetén $|f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$. Ekkor viszont a 3.3 Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség alapján

$$\int_0^{2\pi} |f|^2 = \int_0^{2\pi} (\bar{f} - \bar{\varphi})f = \langle f - \varphi, f \rangle \leq \sqrt{\left(\int_0^{2\pi} |f|^2 \right)} \cdot \sqrt{\left(\int_0^{2\pi} |f - \varphi|^2 \right)} < \sqrt{\left(\int_0^{2\pi} |f|^2 \right)} \cdot \sqrt{2\pi\varepsilon},$$

adódik, amiből viszont

$$\sqrt{\int_0^{2\pi} |f|^2} < \sqrt{2\pi\varepsilon}$$

következik. Mivel ez minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számra teljesül, ezért ebből a $\int_0^{2\pi} |f|^2 = 0$ ellentmondás adódik.

5.3. Függvény Fourier-sora

5.7. Definíció. Ha $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olyan függvény, melyre $f|_{[-\pi, \pi]} \in \mathcal{R}([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ teljesül és 2π szerint periodikus, akkor az f függvény *Fourier-együtthatóinak* nevezzük a

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) \, dt \quad \forall k \in \mathbb{N}^+ \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) \, dt \quad \forall k \in \mathbb{N}^+ \end{aligned}$$

számokat. Az f függvény $x \in \mathbb{R}$ pontbeli *Fourier-sorának* nevezzük az

$$S(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

sort. A Fourier-sor n -edik részletösszeg-függvényének nevezzük az

$$S_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

függvényt.

5.8. Tétel. Legyen $k \in \mathbb{N}$ és $f \in C^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 2π szerint periodikus függvény. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén a Fourier-együtthatókra

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(-1)^k}{\pi n^k} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(k)}(t) \cos\left(nt - k\frac{\pi}{2}\right) dt \\ b_n &= \frac{(-1)^k}{\pi n^k} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(k)}(t) \sin\left(nt - k\frac{\pi}{2}\right) dt \end{aligned}$$

teljesül. Továbbá a $D_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f^{(k)}|$ jelölés mellett minden $n \in \mathbb{N}^+$ számra

$$|a_n| \leq \frac{D_k}{n^k} \quad |b_n| \leq \frac{D_k}{n^k}.$$

Bizonyítás. A $k = 0$ esetben a Fourier-együtthatók definíciója alapján teljesül az állítás. Tegyük fel, hogy valamilyen $k \in \mathbb{N}$ számra igaz az állítás, és legyen $f \in C^{k+1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 2π szerint periodikus függvény. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén a parciális integrálás felhasználásával

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(-1)^k}{\pi n^k} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(k)}(t) \cos\left(nt - k\frac{\pi}{2}\right) dt = \\ &= \frac{(-1)^k}{\pi n^k} \left(\left[f^{(k)}(t) \frac{1}{n} \sin\left(nt - k\frac{\pi}{2}\right) \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(k+1)}(t) \sin\left(nt - k\frac{\pi}{2}\right) dt \right) = \\ &= \frac{(-1)^{k+1}}{\pi n^{k+1}} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(k+1)}(t) \sin\left(nt - k\frac{\pi}{2}\right) dt = \frac{(-1)^{k+1}}{\pi n^{k+1}} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(k+1)}(t) \cos\left(nt - (k+1)\frac{\pi}{2}\right) dt \end{aligned}$$

adódik, ami mutatja, hogy a $k+1$ számra is igaz az állítás. A b_n együtthatókra teljesen hasonlóan igazolható az állítás. Továbbá minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\begin{aligned} |a_n| &= \left| \frac{(-1)^k}{\pi n^k} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(k)}(t) \cos\left(nt - k\frac{\pi}{2}\right) dt \right| \leq \frac{1}{\pi n^k} \int_{-\pi}^{\pi} |f^{(k)}(t)| \cdot \left| \cos\left(nt - k\frac{\pi}{2}\right) \right| dt \leq \\ &\leq \frac{1}{\pi n^k} \int_{-\pi}^{\pi} |f^{(k)}(t)| dt = \frac{D_k}{n^k} \end{aligned}$$

teljesül. A b_n együtthatókra teljesen hasonlóan igazolható az egyenlőtlenség.

5.9. Tétel. Minden $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 2π szerint periodikus függvény esetén a Fourier-sor részletösszegeiből álló $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénytársorozat egyenletesen konvergál az f függvényhez.

Bizonyítás. Legyen $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Ekkor f'' és $|f''|$ is folytonos függvény, tehát integrálható. Tekintsük a

$$D = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f''|$$

számot. Az 5.8 tétel alapján minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén a Fourier-együtthatókra

$$|a_n| \leq \frac{D}{n^2} \quad |b_n| \leq \frac{D}{n^2}$$

teljesül. Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén legyen

$$f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx).$$

Ekkor a

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \leq |a_n| + |b_n| \leq \frac{2D}{n^2}$$

becslés alapján

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| \leq 2D \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

adódik, vagyis a $\sum_n f_n$ függvénysorra alkalmazható a 4.12 Weierstrass-tétel, ezért a $\sum_n f_n$ függvénysor egyenletesen is konvergens. Mivel minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$S_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n f_k,$$

ezért az $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat is egyenletesen konvergens, továbbá a $g = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ határfüggvény folytonos is. Az $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat is egyenletesen konvergenciája miatt az 5.5 tétel alapján a g függvény Fourier-együtthatóira minden $k \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g, \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos(kx) \, dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin(kx) \, dx$$

adódik, vagyis a $h = f - g$ folytonos függvény összes Fourier-együtthatója nulla. Ebből a trigonometrikus rendszer teljességéről szóló 5.6 tétel alapján $h = 0$ adódik.

6. Komplex függvénytan

6.1. Komplex differenciálhatóság

6.1. Definíció. Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ függvény és $a \in \text{Int Dom } f$.

- Azt mondjuk, hogy az f függvény *komplex differenciálható*, vagy *holomorf* az a pontban ha létezik a

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

határérték. Ekkor a $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ komplex számot az f függvény a pontbeli differenciáljának vagy deriváltjának nevezzük és a továbbiakban az $f'(a)$ szimbólummal jelöljük.

- Az $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ függvény *deriváltjának* vagy *derivált függvényének* nevezzük az

$$f' = \left\{ (a, A) \in (\text{Int Dom } f) \times \mathbb{C} \mid \exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \wedge \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = A \right\}$$

függvényt.

- Azt mondjuk, hogy az f függvény *reguláris* az $a \in \mathbb{C}$ pontban, ha létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $B_r(a) \subseteq \text{Dom } f'$ teljesül, vagyis, ha f $\mathbb{C}$ -differenciálható az a pont egy környezetében.
- Az f függvény *holomorf* vagy *reguláris* vagy $\mathbb{C}$ -differenciálható, ha $\text{Dom } f = \text{Dom } f'$.
- Azt mondjuk, hogy f *egész függvény*, ha $\text{Dom } f = \mathbb{C}$ és f holomorf.

6.2. Tétel. Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ függvény és $a \in \text{Int Dom } f$. Tekintsük az f által meghatározott

$$u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad (x, y) \mapsto \text{Re } f(x + iy)$$

$$v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad (x, y) \mapsto \text{Im } f(x + iy)$$

függvényeket. Azaz minden $x, y \in \mathbb{R}$ számra $x + iy \in \text{Dom } f$ esetén

$$f(x + iy) = u(x, y) + i v(x, y)$$

teljesül. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.

1. Az f függvény holomorf az a pontban.
2. Létezik olyan $A : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$ -lineáris leképezés, melyre

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - A(x - a)}{|x - a|} = 0.$$

3. Az u és v függvény differenciálható az a pontban, valamint

$$(\partial_1 u)(a) = (\partial_2 v)(a)$$

$$(\partial_2 u)(a) = -(\partial_1 v)(a)$$

teljesül. Ezen utóbbi két egyenletet nevezzük *Cauchy–Riemann-egyenleteknek*.

Ha az f függvény holomorf az a pontban, akkor

$$f'(a) = A(1) = (\partial_1 u)(a) + i(\partial_1 v)(a).$$

Bizonyítás. A bizonyítás során az állítás jelöléseit használjuk.

$1 \Rightarrow 2$ Tegyük fel, hogy f holomorf az a pontban, és legyen $c = f'(a)$. Tekintsük az $A : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $Az = cz$ lineáris leképezést. Ekkor a

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = c$$

határértékből

$$\lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{f(x) - f(a) - A(x - a)}{x - a} \right| = 0$$

következik, amiből pedig

$$\lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{f(x) - f(a) - A(x-a)}{|x-a|} \right| = 0$$

ez viszont éppen a bizonyítandó

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - A(x-a)}{|x-a|} = 0$$

egyenlőséget jelenti.

2 $\Rightarrow$ 3 A 2. pontban tekintett A lineáris leképezés értéke az 1 számon legyen $p + iq = A1$, ahol $p, q \in \mathbb{R}$, valamint az a pont algebrai alakban legyen $a = a_1 + ia_2$ ($a_1, a_2 \in \mathbb{R}$) A 2. pontban feltételezett határérték szerint

$$\lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (a_1, a_2)} \frac{u(x_1, x_2) + iv(x_1, x_2) - u(a_1, a_2) - iv(a_1, a_2) - (p + iq)((x_1 - a_1) + i(x_2 - a_2))}{\sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2}} = 0,$$

aminek külön kiírva a valós és képzetes részét, az alábbi egyenletek adódnak.

$$\begin{aligned} \lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (a_1, a_2)} \frac{u(x_1, x_2) - u(a_1, a_2) - p(x_1 - a_1) + q(x_2 - a_2)}{\sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2}} &= 0 \\ \lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (a_1, a_2)} \frac{v(x_1, x_2) - v(a_1, a_2) - p(x_2 - a_2) - q(x_1 - a_1)}{\sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2}} &= 0 \end{aligned}$$

Az első egyenlet szerint az u függvény differenciálható az a pontban és

$$(Du)(a) = ((\partial_1 u)(a) \quad (\partial_2 u)(a)) = (p \quad -q),$$

a második egyenlet szerint pedig a v függvény differenciálható az a pontban és

$$(Dv)(a) = ((\partial_1 v)(a) \quad (\partial_2 v)(a)) = (q \quad p).$$

A deriváltakból pedig leolvasható, hogy ezekre teljesülnek a Cauchy–Riemann-egyenletek.

3 $\Rightarrow$ 1 A Cauchy–Riemann-egyenletek alapján léteznek olyan $a, b \in \mathbb{R}$ számok, hogy

$$(Du)(a) = ((\partial_1 u)(a) \quad (\partial_2 u)(a)) = (p \quad -q) \quad \text{és} \quad (Dv)(a) = ((\partial_1 v)(a) \quad (\partial_2 v)(a)) = (q \quad p)$$

teljesül. Ezek alapján

$$\begin{aligned} \lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (a_1, a_2)} \frac{u(x_1, x_2) - u(a_1, a_2) - p(x_1 - a_1) + q(x_2 - a_2)}{\sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2}} &= 0 \\ \lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (a_1, a_2)} \frac{v(x_1, x_2) - v(a_1, a_2) - p(x_2 - a_2) - q(x_1 - a_1)}{\sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2}} &= 0 \end{aligned}$$

teljesül. Az első egyenlethez hozzáadva a második i -szeresét

$$\lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (a_1, a_2)} \frac{u(x_1, x_2) + iv(x_1, x_2) - u(a_1, a_2) - iv(a_1, a_2) - (p + iq)((x_1 - a_1) + i(x_2 - a_2))}{\sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2}} = 0$$

adódik, ami szerint

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - (p + iq)(x - a)}{|x - a|} = 0.$$

Ebből

$$\lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{f(x) - f(a) - (p + iq)(x - a)}{|x - a|} \right| = 0$$

következik, ahol elhagyhatjuk a nevezőből az egyik abszolútérték jelet, vagyis

$$\lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{f(x) - f(a) - (p + iq)(x - a)}{x - a} \right| = 0.$$

Ez pedig éppen a

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = p + iq.$$

bizonyítandó határérték létezését jelenti.

6.3. Definíció. Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ olyan függvény, mely differenciálható az $a \in \mathbb{C}$ pontban és tegyük fel, hogy $f'(a) \neq 0$. Ekkor az $|f'(a)|$ számot az f függvény a pontbeli nyújtási együtthatójának nevezzük. Azt a jól meghatározott $\varphi \in]-\pi, \pi]$ számot pedig, melyre $f'(a) = |f'(a)| e^{i\varphi}$ teljesül az f függvény a pontbeli forgatási együtthatójának nevezzük.

6.2. Hatványsorok határértéke

6.4. Tétel. Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$ tetszőleges sorozat és legyen

$$a' : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K} \quad n \mapsto (n+1)a_{n+1}.$$

Ha az a sorozat által meghatározott P_a hatványsor konvergenciasugara R_a , akkor a $P_{a'}$ hatványsor konvergenciasugara is R_a .

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$ tetszőleges sorozat. Megmutatjuk, hogy

$$\limsup_n \sqrt[n]{|(n+1)a_{n+1}|} = \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}$$

teljesül, ebből már következik az állítás.

1. Legyen $q \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges olyan szám, melyre $\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} < q$. Ekkor a $\limsup$ definíciója alapján létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $\sup \left\{ \sqrt[n]{|a_n|} \mid n > N \right\} < q$. Vagyis minden $n > N$ esetén $|a_n| < q^n$. Tehát minden $n > N$ számra

$$\begin{aligned} (n+1)|a_{n+1}| &< (n+1)q^{n+1} \\ \sqrt[n]{|(n+1)a_{n+1}|} &< \sqrt[n]{n+1} \cdot q \cdot \sqrt[n]{q} \\ \limsup_n \sqrt[n]{|(n+1)a_{n+1}|} &\leq \limsup_n \sqrt[n]{n+1} \cdot q \cdot \sqrt[n]{q} \end{aligned}$$

teljesül. Mivel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n+1} \cdot q \cdot \sqrt[n]{q} = q,$$

ezért

$$\limsup_n \sqrt[n]{|(n+1)a_{n+1}|} \leq q.$$

Mivel minden $q \in \mathbb{R}^+$ paraméterre teljesül a

$$\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} < q \quad \rightarrow \quad \limsup_n \sqrt[n]{|(n+1)a_{n+1}|} \leq q$$

következtetés, ezért

$$\limsup_n \sqrt[n]{|(n+1)a_{n+1}|} \leq \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}.$$

2. Legyen $q \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges olyan szám, melyre $\limsup_n \sqrt[n]{|(n+1)a_{n+1}|} < q$. Ekkor a $\limsup$ definíciója alapján létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $\sup \left\{ \sqrt[n]{|(n+1)a_{n+1}|} \mid n > N \right\} < q$. Vagyis minden $n > N$ esetén $(n+1)|a_{n+1}| < q^n$. Tehát minden $n > N$ számra

$$\begin{aligned} |a_{n+1}| &< q^{n+1} \cdot \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{n+1} \\ |a_n| &< q^n \cdot \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{n} \quad \forall n > N \\ \sqrt[n]{|a_n|} &< q \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{q}} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \\ \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} &\leq \limsup_n q \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{q}} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \end{aligned}$$

teljesül. Mivel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{q}} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = q,$$

ezért

$$\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} \leq q.$$

Mivel minden $q \in \mathbb{R}^+$ paraméterre teljesül a

$$\limsup_n \sqrt[n]{|(n+1)a_{n+1}|} < q \quad \rightarrow \quad \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} \leq q$$

következtetés, ezért

$$\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_n \sqrt[n]{|(n+1)a_{n+1}|}.$$

6.5. Tétel. Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$ tetszőleges sorozat és legyen

$$a' : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K} \quad n \mapsto (n+1)a_{n+1}.$$

Ha $z_0 \in B_{R_a}(0)$ és $\rho \in]0, R_a - |z_0|[$, akkor létezik olyan $K \in \mathbb{R}^+$ szám, hogy minden $z \in B_\rho(z_0)$ esetén

$$|P_a(z) - P_a(z_0) - (z - z_0)P_{a'}(z_0)| < |z - z_0|^2 \cdot K.$$

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$ tetszőleges sorozat, melyhez tartozó hatványsor konvergenciasugara R_a és legyen

$$a' : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K} \quad n \mapsto (n+1)a_{n+1}.$$

Legyen $z_0 \in B_{R_a}(0)$ és $\rho \in]0, R_a - |z_0|[$. Legyen $z \in B_\rho(0)$, ekkor

$$\begin{aligned} P_a(z) - P_a(z_0) - (z - z_0)P_{a'}(z_0) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z^k - z_0^k) - (z - z_0) \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)a_{k+1}z_0^k = \\ &= (z - z_0) \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{j=0}^{k-1} z^j z_0^{k-1-j} - (z - z_0) \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z_0^{k-1} = \\ &= (z - z_0) \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{j=0}^{k-1} z^j z_0^{k-1-j} - \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z_0^{k-1} \right) = \\ &= (z - z_0) \sum_{k=2}^{\infty} a_k \left(\sum_{j=0}^{k-1} z^j z_0^{k-1-j} - k z_0^{k-1} \right). \end{aligned}$$

Ennek egy részlete

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{k-1} z^j z_0^{k-1-j} - k z_0^{k-1} &= \sum_{j=0}^{k-1} ((z - z_0) + z_0)^j z_0^{k-1-j} - k z_0^{k-1} = \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \left(\sum_{m=0}^j \binom{j}{m} (z - z_0)^m z_0^{j-m} \right) z_0^{k-1-j} - k z_0^{k-1} = \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{m=0}^j \binom{j}{m} (z - z_0)^m z_0^{k-1-m} - k z_0^{k-1} = \\ &= \sum_{m=0}^{k-1} \left(\sum_{j=m}^{k-1} \binom{j}{m} \right) (z - z_0)^m z_0^{k-1-m} - k z_0^{k-1} = \sum_{m=1}^{k-1} \left(\sum_{j=m}^{k-1} \binom{j}{m} \right) (z - z_0)^m z_0^{k-1-m}. \end{aligned}$$

Felhasználva, hogy

$$\sum_{j=m}^{k-1} \binom{j}{m} \leq \sum_{j=m}^{k-1} \binom{k-1}{m} = (k-m) \binom{k-1}{m} \leq k \binom{k-1}{m}$$

a fenti kifejezésre

$$\begin{aligned}
 \left| \sum_{j=0}^{k-1} z^j z_0^{k-1-j} - k z_0^{k-1} \right| &\leq \sum_{m=1}^{k-1} k \binom{k-1}{m} |z - z_0|^m |z_0|^{k-1-m} \leq \\
 &\leq |z - z_0| k \sum_{m=1}^{k-1} \binom{k-1}{m-1+1} |z - z_0|^{m-1} |z_0|^{k-1-m} = \\
 &= |z - z_0| k \sum_{m=0}^{k-2} \binom{k-1}{m+1} |z - z_0|^m |z_0|^{k-2-m} = \\
 &= |z - z_0| k \sum_{m=0}^{k-2} \left(\frac{k-1}{m+1} \right) \binom{k-2}{m} |z - z_0|^m |z_0|^{k-2-m} \leq \\
 &\leq |z - z_0| k \sum_{m=0}^{k-2} k \binom{k-2}{m} |z - z_0|^m |z_0|^{k-2-m} = \\
 &= |z - z_0| k^2 (|z - z_0| + |z_0|)^{k-2}
 \end{aligned}$$

adódik. Ezek alapján

$$\begin{aligned}
 |P_a(z) - P_a(z_0) - (z - z_0)P_{a'}(z_0)| &\leq |z - z_0| \left| \sum_{k=2}^{\infty} a_k |z - z_0| k^2 (|z - z_0| + |z_0|)^{k-2} \right| \leq \\
 &\leq |z - z_0|^2 \sum_{k=2}^{\infty} |a_k| k^2 (|z - z_0| + |z_0|)^{k-2} \leq |z - z_0|^2 \sum_{k=2}^{\infty} |a_k| k^2 (\rho + |z_0|)^{k-2}.
 \end{aligned}$$

Mivel $\rho + |z_0| < R_a$, ezért a Cauchy-féle gyökkritérium alapján a

$$\sum_{k=2}^{\infty} |a_k| k^2 (\rho + |z_0|)^{k-2}$$

sor konvergens.

Tehát igazoltuk, hogy a

$$K = \sum_{k=2}^{\infty} |a_k| \cdot k^2 \cdot (\rho + |z_0|)^{k-2}$$

számra igaz, hogy minden $z \in B_\rho(z_0)$ esetén

$$|P_a(z) - P_a(z_0) - (z - z_0)P_{a'}(z_0)| < |z - z_0|^2 \cdot K.$$

teljesül.

6.3. Differenciálás műveleti tulajdonságai

6.6. Tétel. Legyen $f, g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $a \in \text{Int Dom } f \cap \text{Int Dom } g$ és legyen f és g differenciálható az a pontban. Ekkor

1. $f + g$ differenciálható az a pontban és $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$;
2. minden $c \in \mathbb{C}$ esetén cf differenciálható az a pontban és $(cf)'(a) = cf'(a)$;
3. fg differenciálható az a pontban és $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$;
4. ha $g(a) \neq 0$, akkor $\frac{f}{g}$ differenciálható az a pontban és $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$.

Bizonyítás. A valós esethez hasonlóan igazolhatók a formulák.

6.4. Hatványsor differenciálhatósága

6.7. Tétel. Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ olyan sorozat, hogy a $P_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ hatványsor konvergenciasugarára $R_a > 0$ teljesüljön. Legyen

$$a' : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C} \quad n \mapsto (n+1)a_{n+1},$$

Ekkor a $P_{a'}$ hatványsor konvergenciasugara szintén R_a , a P_a hatványsor holomorf a $B_{R_a}(0)$ halmazon, és ezen a halmazon $(P_a)' = P_{a'}$ teljesül.

6.8. Tétel. Legyen $n \in \mathbb{N}$. Ekkor az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$ függvény deriváltja $f'(x) = nx^{n-1}$ és a $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^{-n}$ függvény deriváltja $g'(x) = -nx^{-n-1}$. (Vagyis $(\text{id}_{\mathbb{R}}^n)' = n \text{id}_{\mathbb{R}}^{n-1}$ és $(\text{id}_{\mathbb{R} \setminus \{0\}}^{-n})' = -n \text{id}_{\mathbb{R} \setminus \{0\}}^{-n-1}$.)

Bizonyítás. Az $n = 0, 1$ esetben a deriválás definíciójából rögtön adódik az állítás. Tegyük fel, hogy $(x^n)' = nx^{n-1}$. Ekkor a szorzatfüggvényre vonatkozó deriválási szabály alapján

$$(x^{n+1})' = (x \cdot x^n)' = x' \cdot x^n + x \cdot (x^n)' = x^n + nx^n = (n+1)x^n.$$

A függvények hányadosára vonatkozó deriválási szabály alapján

$$(x^{-n})' = \left(\frac{1}{x^n} \right)' = \frac{0 \cdot x^n - nx^{n-1} \cdot 1}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}.$$

6.9. Tétel. Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ olyan sorozat, hogy P_a hatványsor konvergenciasugarára $R_a > 0$ teljesüljön. Ekkor a $B_{R_a}(0)$ halmazon

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \right)' = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k z^k)'$$

teljesül, amit úgy is meg lehet fogalmazni, hogy a hatványsort a konvergenciasugáron belül lehet tagonként deriválni.

Bizonyítás. Legyen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ olyan sorozat, hogy P_a hatványsor konvergenciasugarára $R_a > 0$ teljesüljön. A 6.7 tétel alapján minden $z \in B_{R_a}(0)$ esetén $(P_a)'(z_0) = P_{a'}(z_0)$, ahol a' az $a'_n = (n+1)a_{n+1}$ képlettel definiált sorozat. Ezt összevetve a fenti tétellel

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \right)' \Big|_{z=z_0} &= (P_a)'(z_0) = P_{a'}(z_0) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)a_{k+1} z_0^k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z_0^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k k z_0^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k z^k)' \Big|_{z=z_0} \end{aligned}$$

adódik.

6.10. Tétel. (Elemi függvények deriváltja.) $\exp' = \exp$, $\cos' = -\sin$, $\sin' = \cos$, $\cosh' = \sinh$, $\sinh' = \cosh$.

Bizonyítás. Az előző állítás alkalmazása a megfelelő hatványsorokra. Például

$$\sin' z = \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \right)' = \sum_{k=0}^{\infty} \left((-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \right)' = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k+1)z^{2k}}{(2k+1)!} = \cos z.$$

6.5. Görbe menti integrál

6.11. Definíció. Görbék főbb típusai.

- A $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ görbe *elemi*, ha $a, b \in \mathbb{R}$, γ folytonos, differenciálható az $]a, b[$ halmazon, létezik a $\lim_{t \rightarrow a+0} \dot{\gamma}(t)$ és a $\lim_{t \rightarrow b-0} \dot{\gamma}(t)$ határérték, valamint a

$$\dot{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \quad t \mapsto \begin{cases} \lim_{t \rightarrow a+0} \dot{\gamma}(t), & \text{ha } t = a; \\ \dot{\gamma}(t), & \text{ha } a < t < b; \\ \lim_{t \rightarrow b-0} \dot{\gamma}(t), & \text{ha } t = b. \end{cases}$$

függvény folytonos. Minden γ elemi görbéhez definiáljuk a még a

$$\gamma^\circ : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \quad t \mapsto \begin{cases} (t-a) \lim_{t \rightarrow a+0} \dot{\gamma}(t) + \gamma(a), & \text{ha } t \leq a; \\ \gamma(t), & \text{ha } a < t < b; \\ (t-b) \lim_{t \rightarrow b-0} \dot{\gamma}(t) + \gamma(b), & \text{ha } t \geq b. \end{cases}$$

függvényt. Az elemi görbék halmazára a Γ^e jelölést használjuk.

- A $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ görbe *szakaszonként C^1 -osztályú folytonos görbe*, ha $a, b \in \mathbb{R}$, γ folytonos és létezik olyan $n \in \mathbb{N}$ és $(t_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ véges pontrendszer, melyre a $t_0 = a$ és $t_{n+1} = b$ pontok hozzávételével minden $i \in \{0, \dots, n\}$ esetén $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]} \in \Gamma^e$. A szakaszonként C^1 -osztályú folytonos görbék halmazára a Γ jelölést használjuk.
- A $\gamma \in \Gamma$ görbéről az mondjuk, hogy *zárt*, ha $\gamma(a) = \gamma(b)$, ahol $a = \inf \text{Dom } \gamma$ és $b = \sup \text{Dom } \gamma$. A zárt görbék halmazát a Γ_0 szimbólummal jelöljük, valamint használjuk még a $\Gamma_0^e = \Gamma_0 \cap \Gamma^e$ jelölést is.

6.12. Definíció. Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ folytonos függvény.

- Legyen $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma \in \Gamma^e$, melyre $\text{Ran } \gamma \subseteq \text{Dom } f$ teljesül. Ekkor a

$$\int_a^b f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) \, dt$$

mennyiséget az f függvény γ görbe menti integráljának nevezzük és a $\int_\gamma f$, vagy a kicsit pongyola, de természetes $\int_a^b f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) \, dt$ szimbólummal jelöljük.

- Legyen $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma \in \Gamma$, melyre $\text{Ran } \gamma \subseteq \text{Dom } f$ teljesül és legyen $n \in \mathbb{N}$ és $(t_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ olyan, hogy a $t_0 = a$ és $t_{n+1} = b$ pontok hozzávételével minden $i \in \{0, \dots, n\}$ esetén $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]} \in \Gamma^e$. Ekkor a

$$\sum_{i=0}^n \int_{\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}} f$$

mennyiséget az f függvény γ görbe menti integráljának nevezzük és szintén a $\int_\gamma f$ vagy a

$$\int_a^b f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) \, dt$$
 szimbólummal jelöljük. Továbbá a

$$\sum_{i=0}^n \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\dot{\gamma}|_{[t_i, t_{i+1}]}(t) \, dt$$

mennyiséget a γ görbe hosszának nevezzük és az $L(\gamma)$ szimbólummal jelöljük.

- Amennyiben a γ görbe zárt, a vonalmenti integrálra még a $\oint_\gamma f$ szimbólumot is használjuk.

6.13. Tétel. Legyen $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma \in \Gamma^e$ és $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, melyre $\text{Ran } \gamma \subseteq \text{Dom } f$. Ekkor

$$\int_{\gamma} f = \int_a^b f(\gamma^\circ(t)) \dot{\gamma}^\circ(t) dt$$

teljesül.

Bizonyítás. A görbe menti integrál és a γ° függvény definíciójának közvetlen következménye.

6.14. Tétel. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ folytonos függvény. Ekkor

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

Bizonyítás. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ folytonos függvény és $\alpha \in \mathbb{R}$ olyan szám, melyre $\int_a^b f = \left| \int_a^b f \right| \cdot e^{i\alpha}$ teljesül. Legyen $u = \text{Re } f$ és $v = \text{Im } f$. Ekkor

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f \right| &= e^{-i\alpha} \int_a^b f = \int_a^b (\cos(\alpha) - i \sin(\alpha)) \cdot (u(t) + i v(t)) dt = \int_a^b \cos(\alpha) u(t) + \sin(\alpha) v(t) dt \leq \\ &\leq \int_a^b \sqrt{u(t)^2 + v(t)^2} dt = \int_a^b |f| \end{aligned}$$

teljesül, ahol az egyenlőtlenségnél a Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenséget használtuk.

6.15. Tétel. Legyen $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma \in \Gamma$ és $f, g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, melyre $\text{Ran } \gamma \subseteq \text{Dom } f$ és $\text{Ran } \gamma \subseteq \text{Dom } g$ teljesül.

1. $\int_{\gamma} (f + g) = \int_{\gamma} f + \int_{\gamma} g$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{C} : \int_{\gamma} (\lambda f) = \lambda \int_{\gamma} f$
3. Legyen $\delta : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, $\delta(t) = \gamma(b + a - t)$, ekkor $\int_{\delta} f = - \int_{\gamma} f$.
4. $\left| \int_{\gamma} f \right| \leq L(\gamma) \sup_{x \in \text{Ran } \gamma} |f(x)|$

Bizonyítás. Az első és a második tulajdonság a Riemann-integrál linearitásán múlik. Ha $\gamma \in \Gamma^e$, akkor

$$\begin{aligned} \int_{\delta} f &= \int_a^b f(\delta(t)) \dot{\delta}(t) dt = \int_a^b f(a + b - t) \dot{\gamma}(a + b - t) (-1) dt = \\ &\stackrel{x=a+b-t}{=} \int_b^a f(x) \dot{\gamma}(x) dx = - \int_{\gamma} f \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} f \right| &= \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t)| dt \leq \\ &\leq \int_a^b \sup_{x \in \text{Ran } \gamma} |f(x)| \cdot |\dot{\gamma}(t)| dt = L(\gamma) \sup_{x \in \text{Ran } \gamma} |f(x)| \end{aligned}$$

teljesül. Ha $\gamma \in \Gamma$, akkor véges sok Γ^e belüli részre osztva a γ görbét a fenti egyenletek igazolják az állítás 3. és 4. pontját.

Jelölés. Adott $a, b \in \mathbb{C}$ számok esetén jelölje $[a, b]$ az a és b pontokat összekötő szakaszt, vagyis

$$[a, b] = \{a + t(b - a) \in \mathbb{C} \mid t \in [0, 1]\}.$$

6.16. Definíció. Legyen $a, b \in \mathbb{C}$ és $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, melyre $[a, b] \subseteq \text{Dom } f$ teljesül. Ekkor az f függvény $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = a + t(b - a)$ görbe menti integrálját a $\int_{[a,b]} f$ szimbólummal jelöljük, tehát

$$\int_{[a,b]} f = (b - a) \int_0^1 f(a + t(b - a)) \, dt.$$

6.17. Tétel. Legyen $a, b \in \mathbb{C} \in \Gamma$ és $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, melyre $[a, b] \subseteq \text{Dom } f$ teljesül.

1. $\int_{[a,b]} f = - \int_{[b,a]} f.$
2. $\left| \int_{\gamma} f \right| \leq |b - a| \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$
3. Minden $c \in [a, b]$ pontra $\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f.$

6.18. Definíció. Legyen $f, F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ függvény. Azt mondjuk, hogy a F az f primitív függvénye, ha F differenciálható és $F' \subseteq f$ teljesül, valamint F az f globális primitív függvénye, ha $F' = f$ teljesül.

6.19. Tétel. Legyen $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma \in \Gamma$ és $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ folytonos függvény. Ha $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ az f primitív függvénye és $\text{Ran } \gamma \subseteq \text{Dom } F$ teljesül, akkor

$$\int_{\gamma} f = F(\gamma(a)) - F(\gamma(b)).$$

Bizonyítás. Legyen $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma \in \Gamma^e$ és $f, F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ olyan folytonos függvények, melyekre $F' = f$ és $\text{Ran } \gamma \subseteq \text{Dom } F$ teljesül. Ekkor

$$\int_{\gamma} f = \int_a^b f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) \, dt = \int_a^b F'(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) \, dt = \int_a^b (F \circ \gamma)'(t) \, dt = [F \circ \gamma]_a^b = F(\gamma(a)) - F(\gamma(b)).$$

Ha $\gamma \in \Gamma$, akkor véges sok Γ^e beli részre osztva a γ görbét a fenti egyenletet alkalmazva minden Γ^e beli részre kapjuk az állítást.

6.20. Tétel. Legyen $\gamma \in \Gamma_0$ és $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ folytonos függvény. Ha létezik olyan $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ primitív függvénye az f függvénynek, melyre $\text{Ran } \gamma \subseteq \text{Dom } F$ teljesül, akkor

$$\oint_{\gamma} f = 0.$$

Bizonyítás. A 6.19 tétel közvetlen következménye.

6.6. A Newton–Leibniz-tétel és a Goursat-lemma

Jelölés. Adott $a, b, c \in \mathbb{C}$ számok esetén jelölje

$$T(a, b, c) \triangleq \left\{ \alpha a + \beta b + \gamma c \in \mathbb{C} \mid (\alpha, \beta, \gamma) \in [0, 1]^3 \wedge \alpha + \beta + \gamma = 1 \right\}$$

az a, b, c csúcspontú háromszöget.

Jelölés. Legyen $a, b, c \in \mathbb{C}$ és $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, melyre $[a, b], [b, c], [c, a] \subseteq \text{Dom } f$ teljesül. Ekkor az a, b, c háromszög oldalain való integrálást a megfelelő irányítással az alábbi módon fogjuk jelölni.

$$\int_{[a,b,c]} f \triangleq \int_{[a,b]} f + \int_{[b,c]} f + \int_{[c,a]} f$$

6.21. Definíció. Az $U \subseteq \mathbb{C}$ halmazról azt mondjuk, hogy *csillaghalmaz*, ha létezik olyan $x \in U$ pont, melyre minden $u \in U$ esetén $[x, u] \subseteq U$ teljesül. Ekkor az x pontot *csillagcentrumnak* hívjuk.

6.22. Tétel. (Newton–Leibniz-tétel.) Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ folytonos függvény és $U \subseteq \text{Dom } f$ nyílt csillaghalmaz. Akkor és csak akkor létezik f -nek az U halmazon értelmezett primitív függvénye, ha minden $a, b, c \in U$ pontra, $T(a, b, c) \subseteq U$ esetén $\int_{[a, b, c]} f = 0$. Továbbá, ha teljesül ez a feltétel és $c \in U$ csillagcentruma az U halmaznak, akkor az

$$F : U \rightarrow \mathbb{C} \quad z \mapsto \int_{[c, z]} f$$

függvény primitív függvénye az f függvénynek az U halmazon.

6.23. Tétel. (Goursat-lemma.) Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, mely a $\text{Dom } f$ halmaz minden pontjában holomorf, legfeljebb egy pontot kivéve. Ekkor minden $a, b, c \in \mathbb{C}$ pontra, $T(a, b, c) \subseteq \text{Dom } f$ esetén $\int_{[a, b, c]} f = 0$.

6.24. Tétel. Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, mely a $\text{Dom } f$ halmaz minden pontjában holomorf, legfeljebb egy pontot kivéve. Ekkor minden $a \in \text{Int } \text{Dom } f$ ponthoz létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$ és $F : B_r(a) \rightarrow \mathbb{C}$ függvény, melyre $F' \subseteq f$ teljesül, azaz F a f primitív függvény az a halmaz egy környezetén.

6.25. Tétel. Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, mely a $\text{Dom } f$ halmaz minden pontjában holomorf, legfeljebb egy pontot kivéve, és legyen $U \subseteq \text{Dom } f$ nyílt csillaghalmaz. Ekkor létezik az f függvénynek az U halmazon értelmezett primitív függvénye.

6.7. Az indexfüggvény

6.26. Tétel. Legyen $n, m \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{R}^+$, $w \in \mathbb{T}$ és tekintsük az $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = z^n$ függvényt és a $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = rw e^{2\pi i m t}$ görbét. Ekkor

$$\int_{\gamma} f = \begin{cases} 0, & \text{ha } n \neq -1; \\ 2\pi i m, & \text{ha } n = -1. \end{cases}$$

Bizonyítás. Legyen $n, m \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{R}^+$, $w \in \mathbb{T}$, $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = z^n$ függvény és $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ pedig a $\gamma(t) = rw e^{2\pi i m t}$ görbe. Ekkor a görbementi integrál definíciója alapján

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f &= \int_0^1 r^n w^n e^{2\pi i n m t} r w e^{2\pi i m t} 2\pi i m \, dt = 2\pi i m r^{n+1} w^{n+1} \int_0^1 e^{2\pi i (n+1) m t} \, dt = \\ &= 2\pi i m r^{n+1} w^{n+1} \int_0^1 \cos((n+1)mt) + i \sin((n+1)mt) \, dt. \end{aligned}$$

Amiből adódik, hogy $n \neq -1$ esetén az integrál nulla, $n = -1$ esetén pedig

$$\int_{\gamma} f = 2\pi i m.$$

6.27. Definíció. A $\gamma \in \Gamma$ görbe *indexfüggvényének* nevezzük az alábbi függvényt.

$$\text{Ind}_{\gamma} : \mathbb{C} \setminus \text{Ran } \gamma \rightarrow \mathbb{C} \quad z \mapsto \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{\text{id}_{\mathbb{C}} - z}$$

6.28. Tétel. Legyen $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $r \in \mathbb{R}^+$, $w \in \mathbb{T}$ és tekintsük a $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = rw e^{2\pi i m t}$ görbét. Ekkor minden $z \in \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r\}$ esetén

$$\text{Ind}_{\gamma}(z) = \begin{cases} 0, & \text{ha } |z| > r; \\ m, & \text{ha } |z| < r. \end{cases}$$

Bizonyítás. Legyen $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $r \in \mathbb{R}^+$, $w \in \mathbb{T}$ és $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ a $\gamma(t) = rw e^{2\pi i m t}$ görbe. Ha $z \in \mathbb{C}$ olyan, hogy $|z| < r$, akkor minden $t \in [0, 1]$ esetén

$$\left| \frac{z}{\gamma(t)} \right| = \frac{|z|}{r} < 1$$

miatt

$$\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{\gamma(t)}} = 2\pi i m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\gamma(t)^n} = 2\pi i m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{r^n w^n} e^{-2\pi i m n t}.$$

Továbbá a fenti függvénysor egyenletesen konvergens a $[0, 1]$ halmazon, ugyanis az

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{t \in [0, 1]} \left| \frac{z^n}{r^n w^n} e^{-2\pi i m n t} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|z|}{r} \right)^n < \infty$$

egyenlőtlenség a Weierstrass-tétel alapján garantálja az egyenletes konvergenciát. Ekkor az összegzés és az integrálás felcserélhető, tehát

$$\begin{aligned} \text{Ind}_{\gamma}(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 2\pi i m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{r^n w^n} e^{-2\pi i m n t} dt = \\ &= m \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{z^n}{r^n w^n} e^{-2\pi i m n t} dt = m \end{aligned}$$

adódik.

Ha $z \in \mathbb{C}$ olyan, hogy $|z| > r$, akkor minden $t \in [0, 1]$ esetén

$$\left| \frac{\gamma(t)}{z} \right| = \frac{r}{|z|} < 1$$

miatt

$$\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} = \frac{-\gamma'(t)}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\gamma(t)}{z}} = \frac{-\gamma'(t)}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma(t)^n}{z^n} = -2\pi i m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{n+1} w^{n+1}}{z^{n+1}} e^{2\pi i m (n+1)t}.$$

Továbbá a fenti függvénysor egyenletesen konvergens a $[0, 1]$ halmazon, ugyanis az

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{t \in [0, 1]} \left| \frac{r^{n+1} w^{n+1}}{z^{n+1}} e^{2\pi i m (n+1)t} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{|z|} \right)^{n+1} < \infty$$

egyenlőtlenség a Weierstrass-tétel alapján garantálja az egyenletes konvergenciát. Ekkor az összegzés és az integrálás felcserélhető, tehát

$$\begin{aligned} \text{Ind}_{\gamma}(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 -2\pi i m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{n+1} w^{n+1}}{z^{n+1}} e^{2\pi i m (n+1)t} dt = \\ &= -m \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \left(\frac{rw}{z} \right)^{n+1} e^{-2\pi i m (n+1)t} dt = 0 \end{aligned}$$

adódik.

6.29. Tétel. Legyen $\gamma \in \Gamma_0$. Ekkor az alábbiak teljesülnek.

1. $\text{Ran Ind}_{\gamma} \subseteq \mathbb{Z}$
2. Az Ind_{γ} függvény folytonos.
3. Ha valamely $z \in \mathbb{C}$ számra $\text{Ran } \gamma \subseteq B_{|z|}(0)$ teljesül, akkor $\text{Ind}_{\gamma}(z) = 0$.

6.8. Cauchy integráltételei

6.30. Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér, $U \subseteq M$ és $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow U$ zárt folytonos görbe. Azt mondjuk, hogy a γ_0 és γ_1 *kontúrhomotópok az $U \subseteq M$ halmazban*, ha létezik olyan $H : [0, 1]^2 \rightarrow U$ folytonos függvény, hogy minden $t \in [0, 1]$ esetén $H(0, t) = \gamma_0(t)$ és $H(1, t) = \gamma_1(t)$, valamint minden $p \in [0, 1]$ esetén $H(p, 0) = H(p, 1)$.

6.31. Definíció. Legyen (M, d) metrikus tér és $U \subseteq M$. Azt mondjuk, hogy az $U \subseteq M$ halmaz *egyszeresen összefüggő*, ha U ívszerűen összefüggő és minden U halmazban haladó zárt folytonos görbe kontúrhomotóp az U halmazban egy konstansfüggvénnyel. Az (M, d) metrikus tér *egyszeresen összefüggő*, ha az M halmaz egyszeresen összefüggő.

6.32. Tétel. (Cauchy intergáltétele.) Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, melyre $\text{Dom } f$ nyílt halmaz és minden $z \in \text{Dom } f$ esetén van a z pontban értelmezett primitív függvénye az f függvénynek. Ha $\gamma_0, \gamma_1 \in \Gamma_0$ olyan görbék, melyek kontúrhomotópok a $\text{Dom } f$ halmazban, akkor

$$\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f.$$

6.33. Tétel. (Cauchy első integrálformulája.) Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ olyan folytonos függvény, mely a $\text{Dom } f$ halmaz minden pontjában holomorf, legfeljebb egy pontot kivéve. Ha $\gamma \in \Gamma_0$ és létezik olyan $U \subseteq \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő nyílt halmaz, melyre $\text{Ran } \gamma \subseteq U \subseteq \text{Dom } f$ teljesül, akkor

$$\oint_{\gamma} f = 0.$$

6.34. Tétel. Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ olyan holomorf függvény, melyre a $\text{Dom } f$ halmaz egyszeresen összefüggő. Ekkor minden $\gamma \in \Gamma_0$ görbére $\text{Ran } \gamma \subseteq \text{Dom } f$ esetén

$$\oint_{\gamma} f = 0$$

teljesül.

6.35. Tétel. (Cauchy második integrálformulája.) Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény, $U \subseteq \text{Dom } f$ egyszeresen összefüggő nyílt halmaz és $\gamma \in \Gamma_0$ olyan görbe, melyre $\text{Ran } \gamma \subseteq U$ teljesül. Ekkor minden $z \in U \setminus \text{Ran } \gamma$ pontra

$$f(z) \text{Ind}_{\gamma}(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f}{\text{id} - z}.$$

Jelölés. Adott $a \in \mathbb{C}$ és $r \in \mathbb{R}^+$ esetén legyen

$$\begin{aligned} \gamma_{r,a} : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{C} & t &\mapsto a + r e^{2\pi i t} \\ S_r(a) &= \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| = r\}. \end{aligned}$$

6.36. Tétel. Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény, $a \in \mathbb{C}$ és $r \in \mathbb{R}^+$ olyan paraméter, melyre $\overline{B_r(a)} \subseteq \text{Dom } f$ teljesül. Ekkor minden $z \in B_r(a)$ pontra

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_{r,a}} \frac{f}{\text{id} - z}.$$

6.9. Cauchy transzformáció

6.37. Definíció. Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ folytonos függvény és $\gamma \in \Gamma$ olyan görbe, melyre $\text{Ran } \gamma \subseteq \text{Dom } f$ teljesül. Ekkor az f függvény γ görbe szerinti Cauchy-transzformáltja

$$C_{f,\gamma} : \mathbb{C} \setminus \text{Ran } \gamma \rightarrow \mathbb{C} \quad z \mapsto \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f}{\text{id}_{\mathbb{C}} - z}.$$

6.38. Tétel. Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ folytonos függvény és $\gamma \in \Gamma$ olyan görbe, melyre $\text{Ran } \gamma \subseteq \text{Dom } f$ teljesül.

1. A $C_{f,\gamma}$ függvény $\mathbb{C}$ -analitikus.
2. Minden $a \in \text{Dom } C_{f,\gamma}$ esetén a $C_{f,\gamma}$ függvény a középpontú Taylor-sorának a konvergenciasugarára nem kisebb a $\text{dist}(a, \text{Ran } \gamma)$ számnál.
3. Minden $a \in \text{Dom } C_{f,\gamma}$ esetén a $C_{f,\gamma}$ függvény a középpontú Taylor-sora megegyezik a $C_{f,\gamma}$ függvénnyel a $B_{\text{dist}(a, \text{Ran } \gamma)}(a)$ halmazon.
4. Minden $a \in \text{Dom } C_{f,\gamma}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$C_{f,\gamma}^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f}{(\text{id}_{\mathbb{C}} - a)^{n+1}}.$$

6.39. Tétel. Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény.

1. Az f függvény $\mathbb{C}$ -analitikus.
2. Minden $a \in \text{Dom } f$ esetén az f függvény a középpontú Taylor-sorának a konvergenciasugarára nem kisebb a

$$r_a = \sup \left\{ r \in \mathbb{R}^+ \mid \overline{B_r(a)} \subseteq \text{Dom } f \right\}$$

számnál.

3. Minden $a \in \text{Dom } f$ esetén az f függvény a középpontú Taylor-sora megegyezik az f függvénnyel a $B_{r_a}(a)$ halmazon.
4. Minden $a \in \text{Dom } f$, $r \in]0, r_a[$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma_{a,r}} \frac{f}{(\text{id}_{\mathbb{C}} - a)^{n+1}}.$$

6.40. Tétel. (Megszüntethető szingularitások tétele.) Legyen $a \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}^+$ és $f : B_r(a) \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.

- Létezik olyan $\tilde{f} : B_r(a) \rightarrow \mathbb{C}$ folytonos függvény, mely f kiterjesztése.
- Létezik a $\lim_a f$ határérték.
- Létezik olyan $\rho \in]0, r[$, hogy az $f(B_\rho(a) \setminus \{a\})$ halmaz korlátos.
- $\lim_{z \rightarrow a} f(z)(z - a) = 0$

6.41. Tétel. Ha $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény, akkor minden $U \subseteq \text{Dom } f$ egyszeresen összefüggő nyílt halmazhoz létezik az f függvénynek az U halmazon értelmezett primitív függvénye.

6.42. Tétel. (Morera tétele.) Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ nyílt halmazon értelmezett folytonos függvény. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.

- Az f függvény holomorf.
- Minden $U \subseteq \text{Dom } f$ egyszeresen összefüggő nyílt halmazra és $\gamma \in \Gamma_0$ görbére $\text{Ran } \gamma \subseteq U$ esetén $\int_{\gamma} f = 0$ teljesül.
- Minden $a, b, c \in \text{Dom } f$ esetén, ha $T(a, b, c) \subseteq \text{Dom } f$, akkor $\int_{[a,b,c]} f = 0$.

6.10. Cauchy-egyenlőtlenség és Liouville tétele

6.43. Tétel. (Cauchy-egyenlőtlenség.) Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény, valamint legyen $a \in \mathbb{C}$ és $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $\overline{B_r(a)} \subseteq \text{Dom } f$ teljesül. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ és $z \in B_r(a)$ számra

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!}{r^n} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{|z-a|}{r}\right)^{n+1}} \cdot \sup_{x \in S_r(a)} |f(x)|$$

teljesül.

6.44. Tétel. (Cauchy-egyenlőtlenség.) Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény, valamint legyen $a \in \mathbb{C}$ és $r \in \mathbb{R}^+$, melyre $\overline{B_r(a)} \subseteq \text{Dom } f$ teljesül. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!}{r^n} \cdot \sup_{x \in S_r(a)} |f(x)|$$

teljesül.

6.45. Tétel. (Liouville-tétel.) Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mindenhol értelmezett holomorf függvény. Ha létezik olyan $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ n -ed fokú polinom és $R \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $z \in \mathbb{C}$, $|z| > R$ számra $|f(z)| \leq |P(z)|$ teljesül, akkor f is legfeljebb n -ed fokú polinom.

6.46. Tétel. (Liouville-tétel.) Ha $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mindenhol értelmezett, korlátos holomorf függvény, akkor f állandó.

6.47. Tétel. (Algebra alaptétele.) Legyen $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ legalább elsőfokú polinom. Ekkor létezik a P polinomnak zérushelye.

6.11. Holomorf függvények gyökei

6.48. Tétel. Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ összefüggő halmazon értelmezett, nem azonosan 0 holomorf függvény és $N_f = \{z \in \text{Dom } f \mid f(z) = 0\}$.

1. Az N_f halmaz minden pontja izolált pont.
2. Minden $a \in N_f$ ponthoz egyértelműen létezik olyan $n \in \mathbb{N}$ és olyan $g : \text{Dom } f \rightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény, hogy $g(a) \neq 0$ és minden $z \in \text{Dom } f$ számra $f(z) = (z - a)^n g(z)$ teljesül. Ezt az n számot nevezzük az a gyök multiplicitásának.
3. Az N_f halmaz megszámlálható.

Jelölés. Az $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ összefüggő halmazon értelmezett, nem azonosan 0 holomorf függvény esetén vezessük be az

$$N_f = \{z \in \text{Dom } f \mid f(z) = 0\}$$

jelölést a zérushelyekre és minden $a \in N_f$ esetén az a gyök multiplicitását jelölje $m_f(a)$.

6.49. Tétel. (Unicitás tétel.) Legyen $U \subseteq \mathbb{C}$ összefüggő nyílt halmaz és $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény. Ha $T = \{x \in U \mid f(x) = g(x)\}$ halmaznak van U halmazbeli torlódási pontja, akkor $T = U$.

6.12. Laurent-sorfejtés

Jelölés. Ha $a : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ olyan sorozat, melyre a $\sum_k a_{-k}$ és a $\sum_k a_k$ sor is konvergens, akkor vezessük be a

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

jelölést.

6.50. Definíció. Ha $a \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}^+$ és $R \in]r, \infty]$, akkor a

$$C_{r,R}(a) = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - a| < R\}$$

halmazt az a középpontú r belső és R külső sugarú nyílt körgyűrűnek nevezzük.

6.51. Tétel. (Laurent-tétel.) Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény, valamint $a \in \mathbb{C}$ és $r, R \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ olyan, hogy $r < R$ és $C_{r,R}(a) \subseteq \text{Dom } f$. Ekkor egyértelműen létezik olyan $c : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ függvény, hogy minden $r', R' \in \mathbb{R}^+$ esetén, ha $r < r' < R' < R$, akkor a

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n (\text{id}_{\mathbb{C}} - a)^n \quad \text{és} \quad \sum_{-n \in \mathbb{N}^+} c_{-n} (\text{id}_{\mathbb{C}} - a)^{-n}$$

függvénysorok normálisan konvergensek a $\overline{C_{r',R'}(a)}$ halmazon és minden $z \in C_{r,R}(a)$ esetén

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n .$$

Továbbá ha $\gamma \in \Gamma_0$ olyan görbe, melyre $\text{Ran } \gamma \subseteq C_{r,R}(a)$ teljesül, akkor minden $n \in \mathbb{Z}$ esetén

$$\text{Ind}_{\gamma}(a) c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f}{(\text{id}_{\mathbb{C}} - a)^{n+1}} .$$

6.52. Definíció. Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény és $a \in \mathbb{C}$ olyan pont, melyhez létezik olyan $\rho \in \mathbb{R}^+$, hogy $C_{0,\rho}(a) \subseteq \text{Dom } f$. Ekkor a Laurent-tétel alapján egyértelműen léteznek olyan $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ együtthatók, hogy minden $r, R \in \mathbb{R}^+$ esetén, ha $0 < r < R < \rho$, akkor a

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n (\text{id}_{\mathbb{C}} - a)^n \quad \text{és} \quad \sum_{-n \in \mathbb{N}^+} c_{-n} (\text{id}_{\mathbb{C}} - a)^{-n}$$

függvénysorok normálisan konvergensek a $\overline{C_{r,R}(a)}$ halmazon és minden $z \in C_{0,\rho}(a)$ esetén

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n .$$

– Ekkor a

$$C_{0,\rho}(a) \rightarrow \mathbb{C} \quad z \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z - a)^n$$

függvénysort az f függvény a pontbeli Laurent-sorfejtésének nevezzük.

– Az f függvény reguláris része a $C_{0,\rho}(a)$ halmazon

$$f_r : C_{0,\rho}(a) \rightarrow \mathbb{C} \quad z \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n (z - a)^n$$

és az f függvény főrésze a $C_{0,\rho}(a)$ halmazon

$$f_p : C_{0,\rho}(a) \rightarrow \mathbb{C} \quad z \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n (z - a)^n .$$

– Az f függvénynek az a pontban pólusa van, ha az $\{m \in \mathbb{N}^+ \mid c_{-m} \neq 0\}$ halmaz véges, de nem üres és az

$$r_f(a) = \max \{m \in \mathbb{N}^+ \mid c_{-m} \neq 0\}$$

szám a pólus rendje.

– Az f függvénynek az a pontban lényeges szingularitása van, ha az $\{m \in \mathbb{N}^+ \mid c_{-m} \neq 0\}$ halmaz végtelen.

– A c_{-1} számot az f függvény a pontbeli reziduumának nevezzük és a $\text{Res}_f(a)$ szimbólummal jelöljük.

6.53. Tétel. Legyen $r \in \mathbb{R}^+$, $a \in \mathbb{C}$ és $f : B_r(a) \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ olyan holomorf függvény, melynek m -ed rendű ($m \in \mathbb{N}^+$) pólusa van az a pontban. Ekkor

$$\text{Res}_f(a) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \left(\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z-a)^m f(z)) \right) .$$

6.13. Reziduum-tétel, argumentum-elv és Rouché tétele

6.54. Definíció. Az $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorf függvény *meromorf*, ha létezik olyan $U \subseteq \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő nyílt halmaz és olyan $A \subseteq U$ diszkrét zárt halmaz, hogy $\text{Dom } f = \Omega \setminus A$ és az f függvénynek a D halmaz minden pontjában pólusa van.

6.55. Tétel. (Reziduum-tétel.) Legyen $U \subseteq \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő nyílt halmaz, $A \subseteq U$ véges halmaz, $f : U \setminus A \rightarrow \mathbb{C}$ olyan holomorf függvény, hogy az A halmaz minden pontjában pólusa van az f függvénynek. Ha $\gamma \in \Gamma_0$ olyan görbe, melyre $\text{Ran } \gamma \subseteq U \setminus A$ teljesül, akkor

$$\int_{\gamma} f = 2\pi i \sum_{a \in A} \text{Ind}_{\gamma}(a) \text{Res}_f(a) .$$

6.56. Tétel. (Argumentum-elv.) Legyen $U \subseteq \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő nyílt halmaz, $A \subseteq U$ véges halmaz, $f : U \setminus A \rightarrow \mathbb{C}$ olyan holomorf függvény, hogy az A halmaz minden pontjában pólusa van az f függvénynek. Ha $\gamma \in \Gamma_0$ olyan görbe, melyre $\text{Ran } \gamma \subseteq U \setminus A$ teljesül, akkor

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'}{f} = \sum_{a \in N_f} \text{Ind}_{\gamma}(a) m_f(a) - \sum_{a \in P_f} \text{Ind}_{\gamma}(a) r_f(a) .$$

6.57. Tétel. (Rouché-tétel.) Legyen $U \subseteq \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő nyílt halmaz, $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$ nem azonosan nulla holomorf függvény és $\gamma \in \Gamma_0$ görbe a $\text{Ran } \gamma \subseteq U$ tulajdonsággal. Ha minden $z \in \text{Ran } \gamma$ esetén $|g(z)| < |f(z)|$ teljesül, akkor

$$\sum_{a \in N_f} \text{Ind}_{\gamma}(a) m_f(a) = \sum_{a \in N_{f+g}} \text{Ind}_{\gamma}(a) m_{f+g}(a) .$$

Tárgymutató

- Abel-tétel, 35
- abszolút konvergencia sor, 13
- alsó integrál, 3
- alsó közelítő összeg, 1
- approximáció Bernstein-polinomokkal, 44
- argumentum-elv, 70
- Banach
 - $\sim$ -tér, 13
- Bernstein-polinom, 44
 - approximáció $\sim$ okkal, 44
- Bunyakovszkij-egyenlőtlenség, 23
- Carl Neumann-féle sor, 18
- Cauchy
 - $\sim$ -Hadamard-tétel, 34
 - $\sim$ -egyenlőtlenség, 23
- Cauchy első integrálformulája, 66
- Cauchy intergáltétele, 66
- Cauchy második integrálformulája, 66
- Cauchy-egyenlőtlenség, 68
- Cauchy-transzformált, 67
- differenciálható
 - komplex függvény, 55
- divergens
 - sor, 13
- egész függvény, 55
- egyenletes konvergencia, 29
- egyszeresen összefüggő halmaz, 66
- ekvivalens normák, 14
- elemi függvények deriváltja, 60
- függvény
 - $\sim$ sor, 29
 - $\sim$ sor egyenletes konvergenciája, 29
 - $\sim$ sorozat, 29
 - $\sim$ sorozat egyenletes konvergenciája, 29
 - alsó integrálja, 3
 - Cauchy-transzformáltja, 67
 - egész $\sim$, 55
 - felső integrálja, 3
 - görbe menti integrálja, 61
 - határozott integrálja, 3
 - holomorf $\sim$, 55
 - integrálja, 3
 - korlátos $\sim$, 32
 - Kronecker- $\sim$, 37
 - Laurent-sorfejtése, 69
 - meromorf $\sim$, 70
 - oszcillációja, 4
 - pólusa, 69
 - pontonkénti határ $\sim$, 29
 - primitív $\sim$, 63
 - refuláris $\sim$, 55
 - reziduuma, 69
 - Riemann-integrálja, 3
- függvénytér, 29
 - egyenletes konvergenciája, 29
 - pontonként abszolút konvergencia $\sim$, 29
 - pontonkénti összefüggvénye, 29
 - tagonkénti differenciálhatósága, 42
 - tagonkénti integrálása, 43
- függvényssorozat, 29
 - egyenletes konvergenciája, 29
 - pontonkénti határfüggvénye, 29
 - tagonkénti differenciálhatósága, 41
 - tagonkénti integrálása, 42
- felosztás, 1
 - alsó közelítő összege, 1
 - felső közelítő összege, 1
- felosztások egyesítése, 1
- felső integrál, 3
- felső közelítő összeg, 1
- finomabb felosztás, 1
- folytonosan differenciálható
 - komplex függvény, 55
- Fourier-együttható, 52
- Fourier-sor, 52
- funkcionál, 16
- görbe indexfüggvénye, 64
- Goursat-lemma, 64
- halmaz
 - egyszeresen összefüggő $\sim$, 66
 - korlátos $\sim$, 11
 - nyílt $\sim$, 11
 - zárt $\sim$, 11
- határérték
 - sor $\sim$ e, 13
- határfüggvény, 29
- határozott integrál, 3
- hatványsor, 34
 - deriválása, 60
 - konvergenciasugara, 34
- Hilbert-tér, 24
 - pre $\sim$, 24
- holomorf függvény, 55
- homotóp görbék, 66
- indexfüggvény, 64
- integrál, 3
 - függvény alsó $\sim$ ja, 3
 - függvény felső $\sim$ ja, 3
- intervallum

- felosztása, 1
- közelítő összeg
 - felosztás alsó $\sim$ e, 1
 - felosztás felső $\sim$ e, 1
- komplex függvény
 - differentiálható $\sim$, 55
 - folytonosan differentiálható $\sim$, 55
- kontúrhomotóp görbék, 66
- konvergenciasugár, 34
- konvergens
 - pontonként abszolút $\sim$, 29
 - sor, 13
- korlátos
 - függvény, 32
 - halmaz, 11
- Kronecker-függvény, 37
- Laurent-sorfejtés, 69
- Laurent-tétel, 69
- Liouville-tétel, 68
- Megszüntethető szingularitások tétele, 67
- meromorf függvény, 70
- Morera tétele, 67
- Newton–Leibniz-tétel, 8, 64
- normált tér, 11
 - $\sim$ ben korlátos halmaz, 11
 - $\sim$ ben nyílt halmaz, 11
 - $\sim$ ben zárt halmaz, 11
- normált vektorrendszer, 24
- norma, 11
 - sup- $\sim$, 12
 - p - $\sim$, 12
- nyílt
 - halmaz, 11
- ortogonális vektorrendszer, 24
- ortonormált vektorrendszer, 24
- oszcillációs összeg, 4
- p -norma, 12
- pólus, 69
- pontonként
 - $\sim$ i összegfüggvény, 29
 - $\sim$ i határfüggvény, 29
 - abszolút konvergens, 29
- prehilbert-tér, 24
- primitív függvény, 63
- részletösszeg
 - $\sim$ -függvény, 52
- reguláris függvény, 55
- reziduum, 69
- reziduum-tétel, 70
- Riemann
 - $\sim$ -integrál, 3
- Rouché-tétel, 70
- Schauder-bázis, 24
- Schwarz-egyenlőtlenség, 23
- sor, 13
 - abszolút konvergens $\sim$, 13
 - divergens $\sim$, 13
 - függvény $\sim$, 29
 - függvény $\sim$ egyenletes konvergenciája, 29
 - konvergens $\sim$, 13
- sorozat
 - $\sim$ hoz rendelt sor, 13
 - függvény $\sim$, 29
 - függvény $\sim$ egyenletes konvergenciája, 29
- sup-norma, 12
- topologikus duális, 16
- trigonometrikus polinomok, 47
- Weierstrass
 - $\sim$ -tétel, 33
 - approximációs tétele, 47
- zárt
 - halmaz, 11