

Vektor- és mátrixalgebra, 1. hét

Elemi egyenletek és egyenlőtlenségek

I. Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenségeket.

1. $x^2 + x > 2$
2. $x^2 + 4 \leq 5x$
3. $x^2 + 4x + 5 > 0$
4. $(x-1)(x-2)(x-3) \geq 0$

II. Oldjuk meg az alábbi abszolútértékes egyenlőtlenségeket.

1. $|x-5| \leq 3$
2. $|x^2-5| > 3$
3. $|x^2+4x-1| > 3$

III. Hatványozás.

1. Írjuk fel hatványozás nélkül tört alakban az alábbi számokat.

$$4^{-5/2} \quad \frac{9^{-3/2}}{81^{-1/2}} \quad (0,5)^{-4} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{1/2}$$

2. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket.

$$4^{2x-7} = \frac{1}{32} \quad 3^{-x} = 36 \cdot 2^x \quad 9^x + 3 = 4 \cdot 3^x$$

3. Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenségeket.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq 4 \quad \frac{1}{3} < 3^x \leq 81 \quad 2^x < 4^x$$

IV. Logaritmus.

1. Írjuk fel hatványozás nélkül tört alakban az alábbi számokat.

$$\log_3(81) \quad \log_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{8}) \quad \log_{\frac{1}{3}}(27)$$

2. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket.

$$\lg(2x+10) = 2 \quad \log_2(x) + \log_2(3) = -1 + \log_2(x^2) \quad \lg(2) + 2\lg(x) + \lg\left(\frac{1}{2}\right) = 4$$

3. Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenségeket.

$$\lg(x) \geq 1 \quad -2 < \lg(x) \leq 3 \quad \lg(x) < \lg^2(x)$$

V. Szögfüggvények.

1. Adjuk meg az alábbi természetes számokat.

$$\begin{aligned} & \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ & \left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ & 4 \left(\sin\left(\frac{-2\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

2. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket.

$$\sin(x) = -\frac{1}{2} \quad \cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad 2\sin^2(x) + \sin(x) - 1 = 0 \quad \sin(x) + \cos(x) = 1$$

3. Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenségeket.

$$-1 < \sin(x) < \frac{1}{2} \quad 0 < \cos(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \frac{1}{2} + \sin^2(x) < \cos^2(x)$$

Elemi fizika példák

I. Milyen mélységű az a kút, melybe követ ejtve, 2 másodperc múlva hallatszik a becsapódás hangja? (Tekintsük úgy, hogy a hang sebessége $340 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, a gravitációs gyorsulás pedig $10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.)

II. Nyáron békésen autózva Balatonudvari felé a megengedett $90 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel egy kanyarban hirtelen feltűnik a helységnév tábla 200 m távolságból. Mekkora egyenletes lassulással érhető el a helységtábla legfeljebb $50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel, ha a reakcióidőből és mechanikai időveszteségekből kifolyólag csak 1 s késéssel tudjuk megkezdeni a fékezést?

III. Tekila nevű teknős téli félálomszerű állapotában 1m távolságra van kedvenc csemegéjétől, a pitypangtól. Minden negyed órában megteszi a közte és a pitypang között lévő távolság negyedét. Mennyi idő múlva lesz Tekila 1cm távolságra a csemegétől, ahonnan már nyaka kinyújtásával el is éri azt?

IV. Lebegés. Egyes gyerekek előszeretettel zümmögnek együtt a porszívóval a hétvégi porszívózás közben. Ilyen esetben figyelhetik meg a lebegésnek nevezett jelenséget, melynek lényege, hogy két közeli frekvenciájú, azonos erősségű hang együttesen egy periodikusan ingadozó erősségű hangot generál. Magyarázzuk meg e jelenséget annak a segítségével, hogy a szögfüggvények összegét szögfüggvények szorzatává lehet alakítani.

V. Elérni a buszt. Sík terepen való túrázás közben feltűnik az egyenes úton egyenletes sebességgel haladó szép sárga távolsági busz. Mi azonban adott távolságra vagyunk a beton úttól, tehát hiába is integetnénk a busznak, az nem állna meg. Melyik irányba kezdjük el futni, ha azt szeretnénk, hogy a legkisebb sebességgel érjünk ki a beton úthoz, ahol már megállna nekünk a busz?