

Vektor- és mátrixalgebra, 3. hét

Komplex számok trigonometrikus alakja, logaritmus, hatványozása és trigonometrikus függvényei

I. Írjuk fel algebrai alakban az alábbi számokat.

$$\ln(-3i) \quad \ln(-e^{i\pi}) \quad \ln(1-i) \quad \ln(-1+\sqrt{3}i)$$

(Ha $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, ahol $0 < |z|$ és $-\pi \leq \varphi < \pi$, akkor $\ln z = \ln |z| + i\varphi$.)

II. Írjuk fel algebrai alakban az alábbi számokat.

$$2^{2i} \quad \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}e}\right)^{2i} \quad i^{2i} \quad \left(\frac{e}{\sqrt{2}}(1+i)\right)^{1+i}$$

(Ha $z, v \in \mathbb{C}$ és $z \neq 0$, akkor $z^v = e^{v \ln z}$.)

III. A komplex számtest felett oldjuk meg az egyenleteket.

1. $z^3 = \bar{z}$
2. $z^2 - 5(1+i)z + 13i = 0$
3. $z^6 - 9z^3 + 8 = 0$
4. $z^8 - 17z^4 + 16 = 0$

IV. Geometriai sor összegképletére visszavezethető feladatok.

1. Minden $n, k \in \mathbb{N}$ számra $n \neq 0, 1$ esetén legyen $z_k = \exp\left(\frac{2\pi i k}{n}\right)$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\sum_{k=0}^{n-1} z_k = 0 \text{ teljesül.}$$

2. Igazoljuk, hogy minden $a, b \in \mathbb{C}$ esetén teljesülnek az alábbi formulák.

$$\sum_{k=0}^n \sin(a+kb) = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)b}{2}\right) \sin\left(a + \frac{nb}{2}\right)}{\sin \frac{b}{2}} \quad \sum_{k=0}^n \cos(a+kb) = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)b}{2}\right) \cos\left(a + \frac{nb}{2}\right)}{\sin \frac{b}{2}}$$

3. Számoljuk ki $\sum_{k=1}^{20} (1+i)^k$ értékét algebrai alakban.

V. Trigonometrikus (hiperbolikus és inverz) függvények.

1. Mely természetes számot határoznak meg az alábbi kifejezések?

$$-4i \operatorname{ch}\left(\log(2) + \frac{\pi i}{2}\right) \quad -6 \cos(\pi + i \log(3)) \quad 12 \operatorname{th}\left(\log(5) + \frac{\pi i}{2}\right) \quad 17 \frac{\operatorname{th}\left(\frac{\pi}{4} - \log(2)i\right)}{8 - 15i}$$

2. Egyszerűsítsük az alábbi kifejezéseket.

$$\cos \arcsin \frac{1}{3} \quad \sin \operatorname{arctg} \frac{1}{2} \quad \operatorname{th} \operatorname{arch} 2 \quad \operatorname{ch} \operatorname{arsh} 2$$

3. Adjuk meg az alábbi egyenletek összes megoldását a komplex számok körében.

$$\cos(z) = \frac{5}{4} \quad \operatorname{ch}(z) = -1$$