

Vektor- és mátrixalgebra, 3. hét

Komplex számok alkalmazása a geometriában, transzformációk leírásában és relativisztikus dinamikában

I. Komplex számokkal jól kezelhető geometria feladatok.

1. Adott $u, v \in \mathbb{C}$, $u \neq v$ esetén adjuk meg azokat a $z \in \mathbb{C}$ számokat, melyre az u, v, z pontok egyenlő oldalú háromszöget adnak meg. (Az $u = 2 + i$ és a $v = -1 + 3i$ esetben a z pont(ok)at algebrai alakban is írja fel.)
2. Adott $u, v \in \mathbb{C}$, $u \neq v$ esetén adjuk meg azokat a $z \in \mathbb{C}$ számokat, melyek az u és v csúcsponttal rendelkező négyzet középpontjai. (Az $u = 2 + i$ és a $v = -1 + 3i$ esetben a z pont(ok)at algebrai alakban is írja fel.)
3. Igazoljuk, hogy ha egy háromszög minden oldalára kifelé olyan szabályos háromszöget rajzolunk, melynek oldalhossza megegyezik az eredeti háromszöggel közös oldalának a hosszával, akkor az új háromszögek középpontjai szabályos háromszöget határoznak meg.
4. Igazoljuk, hogy ha egy négyszög minden oldalára kifelé olyan négyzetet rajzolunk, melynek oldalhossza megegyezik az eredeti négyszöggel közös oldalának a hosszával, akkor az új átellenes négyzetek középpontjai összekötő szakaszok merőlegesek egymásra és egyenlő a hosszuk.

II. Tekintsük komplex számsíkon az alábbi transzformációkat.

R_φ a $\varphi \in \mathbb{R}$ szöggel való elforgatás az origó körül pozitív irányba. (Azaz $R_\varphi(z) = e^{i\varphi} z$.)

L_v a $v \in \mathbb{C}$ vektorral való eltolás. (Azaz $L_v(z) = z + v$.)

M_λ a $\lambda \in \mathbb{R}^+$ faktorral való nyújtás. (Azaz $M_\lambda(z) = \lambda z$.)

1. Mely egyenletek teljesülnek az alábbiak közül minden $\varphi \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{C}$ és $\lambda \in \mathbb{R}^+$ esetén?

$$R_\varphi L_v = L_v R_\varphi \quad R_\varphi M_\lambda = M_\lambda R_\varphi \quad M_\lambda L_v = L_v M_\lambda$$

2. Hogyan írhatjuk le egyszerűbben az alábbi transzformációkat?

$$R_{-\varphi} L_{-v} R_\varphi L_v \quad M_{(1/\lambda)} L_{-v} M_\lambda L_v \quad L_{-v} e^{-i\varphi} R_{-\varphi} L_v R_\varphi$$

III. Relativisztikus ütközés. Tekintsünk két $m_1, m_2 \in \mathbb{R}^+$ tömegpontot, melyek az x tengely mentén mozognak és tekintsünk el mindenféle külső erőhatástól. Legyen $c \in \mathbb{R}^+$ paraméter (fénysebesség). Legyen az x tengely pozitív irányába mutató kezdeti sebességük u_1 és u_2 , melyekre $-c < u_1, u_2 < c$ teljesül. Tegyük fel, hogy a két tömegpont teljesen rugalmasan ütközik, és ütközés utáni sebességük (az x tengely pozitív irányába) v_1 és v_2 .

Tehát az ütközés előtt: $m_1, u_1 \rightarrow, m_2, u_2 \rightarrow$; valamint az ütközés után: $m_1, v_1 \rightarrow, m_2, v_2 \rightarrow$. Ebben az esetben energiamegmaradás és impulzusmegmaradás egyenlete az alábbi.

$$\frac{m_1 c^2}{\sqrt{1 - \frac{u_1^2}{c^2}}} + \frac{m_2 c^2}{\sqrt{1 - \frac{u_2^2}{c^2}}} = \frac{m_1 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} + \frac{m_2 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}}$$

$$\frac{m_1 u_1}{\sqrt{1 - \frac{u_1^2}{c^2}}} + \frac{m_2 u_2}{\sqrt{1 - \frac{u_2^2}{c^2}}} = \frac{m_1 v_1}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} + \frac{m_2 v_2}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}}$$

1. A sebesség helyett számoljuk *rapidity*-szal: $a_1 = \operatorname{arth}\left(\frac{u_1}{c}\right)$, $a_2 = \operatorname{arth}\left(\frac{u_2}{c}\right)$, $b_1 = \operatorname{arth}\left(\frac{v_1}{c}\right)$, $b_2 = \operatorname{arth}\left(\frac{v_2}{c}\right)$.

Tehát az ütközés előtt: $m_1, a_1 \rightarrow, m_2, a_2 \rightarrow$; valamint az ütközés után: $m_1, b_1 \rightarrow, m_2, b_2 \rightarrow$. Mutassuk meg, hogy a két megmaradási egyenlet az alábbi alakban írható fel.

$$m_1 \operatorname{ch}(a_1) + m_2 \operatorname{ch}(a_2) = m_1 \operatorname{ch}(b_1) + m_2 \operatorname{ch}(b_2)$$

$$m_1 \operatorname{sh}(a_1) + m_2 \operatorname{sh}(a_2) = m_1 \operatorname{sh}(b_1) + m_2 \operatorname{sh}(b_2)$$

2. Igazoljuk, hogy a fenti két egyenlet összege és négyzeteik különbsége az alábbi.

$$m_1 e^{a_1} + m_2 e^{a_2} = m_1 e^{b_1} + m_2 e^{b_2}$$

$$\operatorname{ch}(a_1 - a_2) = \operatorname{ch}(b_1 - b_2)$$

Gondoljuk meg, hogy a második egyenlet alapján az egyenletrendszer nem triviális megoldását az $a_1 - a_2 = b_2 - b_1$ egyenlet adja.

3* Legyen $m_1 = 1 \text{ kg}$, $m_2 = 3 \text{ kg}$, $u_1 = -\frac{c}{5}$ és $u_2 = \frac{c}{10}$. Igazoljuk, hogy nem relativisztikusan számolva a teljesen rugalmas ütközés utáni sebességek $v_1 = \frac{c}{4}$ és $v_2 = -\frac{c}{20}$; míg a relativisztikus egyenletek használva

$$v_1 = \frac{2\sqrt{66} + 95}{10(2\sqrt{66} + 29)} \cdot c \quad v_2 = \frac{5 - 2\sqrt{66}}{5(2\sqrt{66} + 27)} \cdot c$$

adódik a sebességekre.