

Vektor- és mátrixalgebra, 4. hét

Polinomok osztása, gyökök és együtthatók közötti összefüggés és $\mathbb{R}^3$ elemi műveletei

I. Végezzük el a következő polinomosztásokat.

$$\frac{x^4 + x^3 - 6x^2 + 4x + 12}{x + 3} \quad \frac{x^4 - 1}{x - 1} \quad \frac{x^3}{x^2 + 1}$$

II. Gyökök és együtthatók közötti összefüggés.

1. Jelölje λ_1 és λ_2 az $x^2 + 3x - 7 = 0$ egyenlet megoldásait. Számítsuk ki $\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2}$ értékét.
2. Jelölje λ_1, λ_2 és λ_3 az $x^3 - x^2 + x - 3 = 0$ egyenlet megoldásait. Számítsuk ki $\sum_{k=1}^3 \frac{1}{\lambda_k}$ értékét.
3. Mely $p \in \mathbb{R}$ paraméter esetén teljesül az $x^3 + px^2 + 2x - 3 = 0$ egyenlet λ_1, λ_2 és λ_3 megoldásaira a $\sum_{k=1}^3 \lambda_k^2 = 5$ feltétel?
4. Jelölje λ_1 és λ_2 az $x^2 + 3x - 7 = 0$ egyenlet megoldásait. Számítsuk ki $\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_2}$ értékét.

III. Határozzuk meg a

$$p(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2 \quad q(x) = x^3 + x^2 + x + 1$$

polinomok legkisebb közös többszörösét és a legnagyobb közös osztóját. (Segítség: mindkét polinomnak van olyan gyöke, mely egész szám.)

IV. Írjuk fel a következő kifejezéseket a Kronecker-delta segítségével, ahol $p, q \in \{1, 2, 3\}$ paraméterek.

$$\sum_{i,j=1}^3 \varepsilon_{ijp} \varepsilon_{ijq} \quad \sum_{i,j=1}^3 \varepsilon_{ijp}^2 \varepsilon_{ijq} \quad \sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk}^2 \quad \sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ikj}$$

V. Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség.

1. Mutassuk meg, hogy minden $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+$ esetén $n^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} \right)$.
2. Mutassuk meg, hogy ha az $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$ számokra $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ teljesül, akkor $a + 2b + 3c + 4d \leq \sqrt{30}$. Milyen esetben van egyelőség?
3. Mutassuk meg, hogy minden $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ esetén $4(ad - bc)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$.

VI. Igazoljuk, hogy minden $a, b, c, d \in \mathbb{R}^3$ vektorra teljesülnek az alábbiak.

1. $a \times (b \times c) = \langle a, c \rangle b - \langle a, b \rangle c$
2. $(a \times b) \times (c \times d) = -\langle a, b \times c \rangle d + \langle a, b \times d \rangle c + \langle a, b \times d \rangle c$
3. $\langle a \times b, c \times d \rangle = \langle a, c \rangle \langle b, d \rangle - \langle a, d \rangle \langle b, c \rangle$
4. $a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b) = 0$