

Vektor- és mátrixalgebra, 5. hét

A tér affin altereinek felírása, egymástól vett távolságuk és vektortér lineáris alterei

I. Affin alterek.

1. Írjuk fel a $A = (2, 3, 1)$ és a $B = (4, 5, -1)$ pontokon átmenő egyenes egyenletét.
2. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, mely átmegy a $P = (1, 3, 1)$ ponton és irányvektora párhuzamos a $(1, 0, 1)$ vektorral.
3. Írjuk fel a $A = (2, 3, 4)$, $B = (4, 5, -1)$ és a $C = (3, 1, 3)$ pontokon átmenő sík egyenletét.
4. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, mely átmegy a $P = (1, 3, 1)$ ponton és normálvektora párhuzamos a $(1, 0, 1)$ vektorral.

II. Határozzuk meg az alábbi távolságokat.

1. Mekkora a $(2, 1, 3)$ és a $(4, 6, -1)$ pont távolsága?
2. Mekkora a $(-1, 2, 1)$ pont és az $r(t) = (1, 12, 3) + t(2, -1, 3)$, $t \in \mathbb{R}$ egyenes távolsága?
3. Mekkora a $(-1, 2, 1)$ pont és a $2x - 4y + 2z = 1$ sík távolsága?
4. Mekkora az $\frac{x-1}{5} = 2 - y = z - 1$ és a $2 - x = y - 5 = z + 1$ egyenesek távolsága?
5. Mekkora az $r(t) = (1, 1, 3) + t(0, -1, 2)$, $t \in \mathbb{R}$ egyenes és az $x - 2y + z = 1$ sík távolsága?
6. Mekkora a $2x - 4y + 2z = 1$ és az $x - 2y + z = 1$ síkok távolsága?

III. Elemi térgeometriai feladatok.

1. Mekkora az $A = (-1, 3, 2)$, a $B = (2, 3, 5)$ és a $C = (3, 5, -2)$ csúcsokkal rendelkező háromszög szögei, kerülete és területe?
2. Egy paralelepipedon egyik csúcsa $A = (2, 3, 1)$ és a vele szomszédos másik három csúcs $X = (3, 2, 4)$, $Y = (-1, 2, 3)$ és $Z = (2, 1, 4)$. Határozzuk meg a paralelepipedon hiányzó csúcsainak koordinátáit és a paralelepipedon térfogatát.

IV. Lineáris alterek.

1. Az $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ függvénytérben alteret alkotnak-e a következő halmazok?

$$\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = 1\} \quad \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(1) = 0\} \quad \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(x) \leq 0\}$$

2. A valós sorozatok $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ terében alteret alkotnak-e az alábbi halmazok?

$$\begin{aligned} \{a \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) : a_1 = 2a_3 + 3a_5\} & \quad \{a \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) : a_2 = a_4 a_5\} \\ \left\{a \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) : \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1\right\} & \quad \{a \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) : a \text{ számtani sorozat}\} \end{aligned}$$