

Vektor- és mátrixalgebra, 8. hét

Lineáris transzformációk mátrixa és elemi mátrixműveletek

I. Írjuk fel az $\mathbb{R}^3$ standard bázisában az alábbi lineáris transzformációk mátrixát.

1. Az origón átmenő, $v \in \mathbb{R}^3$ irányvektorú egyenesre való ortogonális vetítés és tükrözés. (A $v = (1, -1, 2)$ esetben számoljuk ki a konkrét mátrixot.)
2. Az origón átmenő, $n \in \mathbb{R}^3$ normálvektorú síkra való ortogonális vetítés és tükrözés. (Az $n = (1, -1, 2)$ esetben számoljuk ki a konkrét mátrixot.)
3. Határozzuk meg a (x, y) síkbeli $\varphi \in \mathbb{R}$ szöggel való forgatás mátrixát.
4. Határozzuk meg az $(1, 0, 1)$ tengely körüli $\varphi \in \mathbb{R}$ szöggel való forgatás mátrixát.

II. Mátrixhatványok.

1. Számítsuk ki az alábbi mátrixok k -adik ($k \in \mathbb{N}$) hatványát.

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

2. Egy A mátrix esetén legyen $e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$. Számítsuk ki az e^A mátrixot, ha az A mátrix a következő alakú, valamilyen $t \in \mathbb{R}$ valósra.

$$\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 2t \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

III. Determinánsszámítás.

1. Határozzuk meg az alábbi mátrixok determinánsát, ahol $a, b, c \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ és $(x_i)_{i=1, \dots, n} \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{array}{lll} 1. \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & 2. \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} & 3. \quad \begin{pmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2 \\ 4^2 & 5^2 & 6^2 & 7^2 \end{pmatrix} \\ 4. \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \end{pmatrix} & 5. \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & 6. \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ 7. \quad \begin{pmatrix} \ln 10 & \ln 4 & \ln 40 \\ \ln 5 & \ln 4 & \ln 20 \\ \ln 2 & \ln 1 & \ln 2 \end{pmatrix} & 8. \quad \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix} \end{array}$$

2. Adott $a, b \in \mathbb{C}$ paraméterek esetén legyen $A_{ij} = b + (a - b)\delta_{ij}$ egy $n \times n$ -es mátrix. Számoljuk ki $\det A$ értékét.

3. Tekintsük az $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ mátrixot. Határozzuk meg $\det(A^{-1})$, $\det(A^{80})$, $\det(3A)$, $\det(A + I)$ és $\det(A^T)$ értékét.

- 4*. Adott $a, b, c \in \mathbb{C}$ paraméterek esetén legyen $A_{ij} = b\delta_{ij} + c\delta_{i,j-1} + a\delta_{i,j+1}$ egy $n \times n$ -es mátrix. Számoljuk ki $\det A$ értékét.

IV*. Tekintsünk egy egydimenziós harmonikus rezgőmozgást adott $D \in \mathbb{R}^+$ (direkciós állandó) és $m \in \mathbb{R}^+$ (tömeg) paraméterekkel. A koordinátarendszer kezdőpontja legyen a rugó nyugalmi hosszánál. Adott $t \in \mathbb{R}$ időpillanatban a test helye legyen $x(t)$ sebessége pedig $v(t)$. Ezekből képezzük a $z(t) = (x(t), v(t)) \in \mathbb{R}^2$ vektort. Mutassuk meg, hogy minden $t \in \mathbb{R}$ időpillanathoz létezik olyan $A(t)$ lineáris transzformáció, melyre $z(t) = A(t)z(0)$ teljesül.

V*. Tekintsük az alábbi egydimenziós tökéletesen rugalmas ütközéssel kapcsolatos problémát. Egy $M \in \mathbb{R}^+$ tömegű kiskocsi $v_0 \in \mathbb{R}^+$ sebességgel közelít a merev fal felé. A kiskocsi és a fal között egy $m \in]0, M[$ tömegű test van, mely $u_0 \in]-v_0, \infty[$ sebességgel közelít a kiskocsi felé. A feladatban minden ütközést tekintsünk teljesen rugalmasnak. A kiskocsi és a test n -edik ütközése után a kiskocsi sebessége a fal felé legyen v_n , illetve a test sebessége a fal felé u_n .

1. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén vezessük be a következő mennyiségeket: $\alpha_n = \sqrt{M}v_n$, $\beta_n = \sqrt{m}u_n$ és $w_n = (\alpha_n, \beta_n)$. Mutassuk meg, hogy az ütközés ekkor a $w_{n+1} = Bw_n$ alakba írható, ahol

$$B = \frac{1}{M+m} \begin{pmatrix} M-m & -2\sqrt{mM} \\ 2\sqrt{mM} & M-m \end{pmatrix}.$$

2. Igazoljuk, hogy ha $\varphi = \arccos\left(\frac{M-m}{M+m}\right)$, akkor $B = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$.

3. Mutassuk meg, hogy az ütközések száma $N = \left\lfloor \frac{1}{\varphi} \left(\pi - \arctg(x) - \arctg\left(x \frac{u_0}{v_0}\right) \right) \right\rfloor + 1$, ahol

$$x = \sqrt{\frac{m}{M}}, \text{ ahol } \lfloor \cdot \rfloor \text{ az egészrész függvény.}$$

4. Figyeljük meg, hogy az $u_0 = 0$ esetben az ütközések száma nem függ a kiskocsi v_0 sebességétől! Próbáljuk dimenzióanalízissel megmagyarázni ezt a jelenséget.

Mélyebb ismeretekkel az is megmutatható, hogy az $u_0 = 0$ esetben az ütközések száma (kis x értékek esetén)

$$N = \left\lfloor \frac{\pi}{2x} + \frac{1}{2} + \frac{\pi}{6}x - \frac{2\pi}{45}x^3 + \mathcal{O}(x^5) \right\rfloor.$$

Ha a fallal vett ütközések számoljuk, akkor kis x értékek esetén az összes ütközések száma

$$N^* \approx \frac{\pi}{x}.$$

Speciális x értékek mellett az összes ütközések száma numerikus számítások szerint az alábbi.

x	N^*
10^0	3
10^{-1}	31
10^{-2}	314
10^{-3}	3141
10^{-4}	31415
10^{-5}	314159