

Matematika 1 Vegyész- és környezetmérnököknek Gyakorlat

1. feladatsor - Megoldások

1. Hozzuk a lehető legegyszerűbb alakra az alábbi kifejezéseket a változók lehetséges értékei mellett:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{2}{a+b} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \right) : \frac{a+b}{a^2b^2}, & \text{c) } \left(\frac{a^2-3ab}{a+b} + b \right) : \left(\frac{a}{a+b} - \frac{b}{b-a} - \frac{2ab}{a^2-b^2} \right), \\ \text{b) } \left(\frac{x^2+y^2}{x-y} - x + y \right) : \left(\frac{x}{x+y} - \frac{2xy}{y^2-x^2} \right), & \text{d) } \left(\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y} \right) : \frac{x^3y+xy^3}{x^4-y^4}. \end{array}$$

Megoldás: a) $a+b$, b) $2y$, c) $a-b$, d) 4 .

2. Hozzuk a lehető legegyszerűbb alakra az alábbi kifejezéseket!

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \sqrt[3]{\frac{x^2}{\sqrt{x^3 \cdot \sqrt{x}}}} \cdot \sqrt[6]{x}, & \text{d) } \left(\frac{a^{-7}b^3}{c^4d^{-3}} \right)^{-1} \cdot \left(\frac{a^{-2}b}{c^2d^{-4}} \right)^3, \\ \text{b) } \frac{\sqrt[4]{a^{12}b^{16}}}{\sqrt[3]{\sqrt{a^6 \cdot \sqrt[4]{b^{12}}}}}, & \text{e) } \sqrt[3]{\frac{a^8b^{-2}c^7}{d^2}} : \frac{a^{-10}c^4}{b^5d^5}, \\ \text{c) } \left(\frac{a^4b^5}{c^2d^{-2}} \right)^3 : \left(\frac{a^3b^7}{c^{-2}d^{-5}} \right)^2, & \text{f) } \frac{\sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[8]{x^5} \cdot \sqrt[5]{y}}{\left(x^{\frac{1}{4}} \right)^3 \cdot y^{\frac{2}{5}}}. \end{array}$$

Megoldás: a) $x^{\frac{1}{4}}$, b) $a^2b^{\frac{7}{2}}$, c) $\frac{a^6b}{c^{10}d^4}$, d) $\frac{ad^9}{c^2}$, e) a^6bcd , f) $\frac{x^{\frac{1}{8}}}{y^{\frac{1}{5}}}$.

3. Határozzuk meg az alábbi függvények minimumának/maximumának helyét és értéket teljes négyzetté alakítás segítségével!

a) $f(x) = 3x^2 + 8x + 10$,

b) $f(x) = -4x^2 + 2x + 7$.

Megoldás: a) minimum helye $x = -\frac{4}{3}$, minimum értéke $\frac{14}{3}$; b) maximum helye $x = \frac{1}{4}$, maximum értéke $\frac{29}{4}$.

4. Milyen p valós paraméter esetén van az alábbi egyenleteknek két azonos valós megoldása?

a) $x^2 - px + p + 3 = 0$,

b) $px^2 + 4x + p - 3 = 0$.

Megoldás: a) $p = -2$ vagy $p = 6$, b) $p = -1$ vagy $p = 4$.

5. Milyen p valós paraméter esetén van az alábbi egyenleteknek két különböző valós megoldása és mikor nincs valós megoldása?

a) $x^2 + x - p - 2 = 0$,

b) $4x^2 + 4px + p^2 + 8p - 12 = 0$.

Megoldás: a) két különböző valós megoldás, ha $p > -\frac{9}{4}$; nincs valós megoldás, ha $p < -\frac{9}{4}$;
b) két különböző valós megoldás, ha $p < \frac{3}{2}$; nincs valós megoldás, ha $p > \frac{3}{2}$.

6. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

$$(a) \quad x^4 + 5x^3 - 6x^2 = 0,$$

$$(b) \quad 4x^4 - 3x^2 - 1 = 0.$$

Megoldás: a) $x \in \{-6, 0, 1\}$, b) $x \in \{-1, 1\}$.

7. Oldjuk meg az alábbi kétismeretlenes egyenletrendszereket a valós számok halmazán!

$$a) \quad \begin{cases} 3(x-2) + 2y = 11, \\ x - y = 1, \end{cases}$$

$$b) \quad \begin{cases} 2(x-y) + 3y = 7, \\ 4x - (y+1) = 10. \end{cases}$$

Megoldás: a) $(x, y) = \left(\frac{19}{5}, \frac{14}{5}\right)$, b) $(x, y) = (3, 1)$.

8. Oldjuk meg az alábbi kétismeretlenes egyenletrendszereket! A megoldást adjuk meg az a és b paraméterek függvényében! Feltételezzük, hogy a paraméterek olyan értékűek, amelyek mellett az egyenletrendszernek egyértelmű megoldása van.

$$a) \quad \begin{cases} ax + y = b \\ x + ay = 1, \end{cases}$$

$$b) \quad \begin{cases} 2x + ay = b \\ ax + 2by = 1. \end{cases}$$

Megoldás: a) $x = \frac{ab-1}{a^2-1}$, $y = \frac{a-b}{a^2-1}$, $a \neq \pm 1$; b) $x = \frac{2b^2-a}{4b-a^2}$, $y = \frac{2-ab}{4b-a^2}$, $4b-a^2 \neq 0$.

9. Fejezzük ki a megjelölt változót az alábbi összefüggésekből!

$$a) \quad pV = nRT, \text{ fejezzük ki } n\text{-t!}$$

$$d) \quad Q = mc(T_2 - T_1), \text{ fejezzük ki } c\text{-t!}$$

$$b) \quad pV = nRT + \alpha n^2, \text{ fejezzük ki } T\text{-t!}$$

$$e) \quad Q = mc(T_2 - T_1), \text{ fejezzük ki } T_1\text{-et!}$$

$$c) \quad p = \frac{nRT}{V-bn} - \frac{\alpha n^2}{V^2}, \text{ fejezzük ki } T\text{-t!}$$

$$f) \quad Q = mc(T_2 - T_1) + n\Delta H, \text{ fejezzük ki } T_2\text{-t!}$$

Megoldás: a) $n = \frac{pV}{RT}$, b) $T = \frac{pV - \alpha n^2}{nR}$, c) $T = \frac{V - bn}{nR} \left(p + \frac{\alpha n^2}{V^2}\right)$, d) $c = \frac{Q}{m(T_2 - T_1)}$, e) $T_1 = T_2 - \frac{Q}{mc}$, f) $T_2 = T_1 + \frac{Q - n\Delta H}{mc}$.

10. Egy kör alakú szűrőmembrán átmérője 10 cm. A membránon négy kör alakú pórus található, amelyek átmérője rendre 1 cm, 1,5 cm, 2 cm és 2,5 cm. Határozzuk meg a membrán anyagának területét! Az eredményt cm^2 -ben adjuk meg.

Megoldás: $\frac{173\pi}{8} \text{ cm}^2$.

11. Egy téglalap alakú katalizátorlap oldalainak hossza 10 cm és 8 cm. A lapon három kör alakú nyílást alakítottak ki, amelyek sugarai rendre 1 cm, 2 cm és 3 cm. Határozzuk meg a katalizátor megmaradó felületének nagyságát! Az eredményt cm^2 -ben adjuk meg.

Megoldás: $80 - 14\pi \text{ cm}^2 \approx 36,02 \text{ cm}^2$.

12. Számítsuk ki az alábbi összegeket és szorzatokat!

$$a) \quad \sum_{k=2}^8 3k,$$

$$b) \quad \sum_{k=0}^5 (3k-2),$$

$$c) \quad \prod_{k=2}^5 (k-1),$$

$$d) \quad \prod_{k=1}^3 \frac{k}{(k+1)}.$$

Megoldás: a) 105, b) 33, c) 24, d) $\frac{1}{4}$.

13. Írjuk fel a következő kifejezéseket szumma- vagy produktumjel segítségével!

a) $2 + 4 + 6 + 8 + 10$, b) $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11$, c) $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8$, d) $3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12$.

Megoldás: a) $\sum_{k=1}^5 2k$, b) $\sum_{k=1}^6 (2k - 1)$, c) $\prod_{k=1}^4 2k$, d) $\prod_{k=1}^4 3k$.