

Matematika 1 Vegyész- és környezetmérnököknek Gyakorlat

2. feladatsor - Megoldás

1. Ábrázoljuk vázlatosan az alábbi függvények grafikonját a megadott transzformációk elvégzése után! Írjuk fel a transzformációk után kapott függvények hozzárendelési szabályát!

- a) $y = x^2$, 2 egységgel jobbra és 3 egységgel felfelé tolás.
- b) $y = \sqrt{x}$, 1 egységgel jobbra és 2 egységgel lefelé tolás.
- c) $y = |x|$, 2 arányú zsugorítás y irányban, 1 egységgel balra és 2 egységgel lefelé tolás.
- d) $y = x^3$, 2 arányú zsugorítás x irányban, 1 egységgel jobbra és 2 egységgel felfelé tolás.
- e) $y = e^x$, 2 egységgel balra és 1 egységgel lefelé tolás.
- f) $y = \ln x$, 3 arányú nyújtás y irányban, 1 egységgel jobbra és 2 egységgel felfelé tolás.

Megoldás: a) $y = (x-2)^2 + 3$, b) $y = \sqrt{x-1} - 2$, c) $y = \frac{1}{2}|x+1| - 2$, d) $y = 8(x-1)^3 + 2$,
e) $y = e^{x+2} - 1$, f) $y = 3 \ln(x-1) + 2$.

2. Állapítsuk meg az alábbi függvények esetén, hogy melyik alapfüggvény grafikonjából és milyen transzformációkkal kapható meg az adott függvény grafikonja! Készítsünk vázlatos ábrát is!

- a) $f(x) = (x-2)^2 + 3$, d) $f(x) = 3(x-2)^3 + 1$,
- b) $f(x) = \sqrt{x-1} - 2$, e) $f(x) = \ln(2x-2) + 3$,
- c) $f(x) = 2|x+1| - 3$, f) $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x+2} + 1$.

Megoldás: a) alapfüggvény: $y = x^2$; 2 egységgel jobbra, 3 egységgel felfelé tolás; b) alapfüggvény: $y = \sqrt{x}$; 1 egységgel jobbra, 2 egységgel lefelé tolás; c) alapfüggvény: $y = |x|$; 2-szeres nyújtás y irányban, 1 egységgel balra, 3 egységgel lefelé tolás; d) alapfüggvény: $y = x^3$; 3-szoros nyújtás y irányban, 2 egységgel jobbra, 1 egységgel felfelé tolás; e) alapfüggvény: $y = \ln x$; 2-szeres zsugorítás x irányban, 1 egységgel jobbra, 3 egységgel felfelé tolás; f) alapfüggvény: $y = \sqrt{x}$; 2-szeres zsugorítás y irányban, 2 egységgel balra, 1 egységgel felfelé tolás.

3. Jellemezzük az alábbi függvényeket! Adjuk meg az értelmezési tartományt (ÉT) és az értékkészletet (ÉK), vizsgáljuk meg a paritást, periodikusságot, monotonitást, korlátosságot, szélsőértékeket, valamint ahol egyszerű, határozzuk meg a zérushelyeket! Készítsünk vázlatos ábrát is!

- a) $f(x) = 2x - 3$, c) $f(x) = 3x^2 + 1$, e) $f(x) = e^x + 1$, g) $f(x) = |3x + 4|$,
- b) $f(x) = \sqrt{6x + 3}$, d) $f(x) = \ln(2x)$, f) $f(x) = -\ln(-x)$, h) $f(x) = 1 + \sin x$.

Megoldás: a) ÉT: $\mathbb{R}$, ÉK: $\mathbb{R}$; nem páros, nem páratlan; nem periodikus; szigorúan monoton növekvő; nem korlátos; zérushely: $x = \frac{3}{2}$; nincs szélsőértéke.

b) ÉT: $[-\frac{1}{2}, \infty)$, ÉK: $[0, \infty)$; nem páros, nem páratlan; nem periodikus; szigorúan monoton növekvő; alulról korlátos; minimum: 0, helye $x = -\frac{1}{2}$; zérushely: $x = -\frac{1}{2}$.

c) ÉT: $\mathbb{R}$, ÉK: $[1, \infty)$; páros; nem periodikus; mon.csökkenő $(-\infty, 0]$, mon.növekvő $[0, \infty)$; alulról korlátos; minimum: 1, helye $x = 0$; nincs zérushely.

d) ÉT: $(0, \infty)$, ÉK: $\mathbb{R}$; nem páros, nem páratlan; nem periodikus; szigorúan monoton növekvő; nem korlátos; zérushely: $x = \frac{1}{2}$; nincs szélsőértéke.

- e) ÉT: $\mathbb{R}$, ÉK: $(1, \infty)$; nem páros, nem páratlan; nem periodikus; szigorúan monoton növekvő; alulról korlátos; nincs minimuma; nincs zérushely.
- f) ÉT: $(-\infty, 0)$, ÉK: $\mathbb{R}$; nem páros, nem páratlan; nem periodikus; szigorúan monoton növekvő; nem korlátos; zérushely: $x = -1$; nincs szélsőértéke.
- g) ÉT: $\mathbb{R}$, ÉK: $[0, \infty)$; nem páros, nem páratlan; nem periodikus; mon.csökkenő $(-\infty, -\frac{4}{3}]$, mon.növekvő $[-\frac{4}{3}, \infty)$; alulról korlátos; minimum: 0, helye $x = -\frac{4}{3}$; zérushely: $x = -\frac{4}{3}$.
- h) h) ÉT: $\mathbb{R}$, ÉK: $[0, 2]$; nem páros, nem páratlan; 2π periodikus; szigorúan növekvő $(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$, szigorúan csökkenő $(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$; korlátos; minimum: 0, maximum: 2 (ezeket minden periódusban felveszi); zérushely: $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

4. Adjuk meg az alábbi függvények értelmezési tartományát, értékkészletét! Majd határozzuk az $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ és $g \circ g$ összetett függvényeket és azok értelmezési tartományát!

- a) $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = \frac{1}{x}$,
b) $f(x) = 1 - \sqrt{x}$, $g(x) = e^x$,
c) $f(x) = \ln x$, $g(x) = 2x - 10$.

Megoldás:

a) $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = [-1, \infty)$, $D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $R_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= \frac{1}{x^2} - 1, & D_{f \circ g} &= \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\(g \circ f)(x) &= \frac{1}{x^2 - 1}, & D_{g \circ f} &= \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \\(f \circ f)(x) &= x^4 - 2x^2, & D_{f \circ f} &= \mathbb{R}, \\(g \circ g)(x) &= x, & D_{g \circ g} &= \mathbb{R} \setminus \{0\}.\end{aligned}$$

b) $D_f = [0, \infty)$, $R_f = (-\infty, 1]$, $D_g = \mathbb{R}$, $R_g = (0, \infty)$;

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= 1 - e^{x/2}, & D_{f \circ g} &= \mathbb{R}, \\(g \circ f)(x) &= e^{1 - \sqrt{x}}, & D_{g \circ f} &= [0, \infty), \\(f \circ f)(x) &= 1 - \sqrt{1 - \sqrt{x}}, & D_{f \circ f} &= [0, 1], \\(g \circ g)(x) &= e^{e^x}, & D_{g \circ g} &= \mathbb{R}.\end{aligned}$$

c) $D_f = (0, \infty)$, $R_f = \mathbb{R}$, $D_g = \mathbb{R}$, $R_g = \mathbb{R}$;

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= \ln(2x - 10), & D_{f \circ g} &= (5, \infty), \\(g \circ f)(x) &= 2 \ln x - 10, & D_{g \circ f} &= (0, \infty), \\(f \circ f)(x) &= \ln(\ln x), & D_{f \circ f} &= (1, \infty), \\(g \circ g)(x) &= 4x - 30, & D_{g \circ g} &= \mathbb{R}.\end{aligned}$$

5. Az alábbi összetett függvények esetén határozzuk meg, hogy milyen f és g függvényekből állhatnak elő, azaz írjuk fel őket $h = f \circ g$ alakban!

- a) $h(x) = (2x - 3)^2 - 1$, c) $h(x) = \ln(2x - 10)$, e) $h(x) = 1 - \sqrt{x^2 - 4}$,
b) $h(x) = \sqrt{e^x - 2}$, d) $h(x) = \frac{1}{x^3 + x + 2}$, f) $h(x) = e^{3x - 5}$.

Megoldás: (Nem egyetlen megoldás van, tehát előfordulhat más lehetséges jó megoldás is.)

- a) $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = 2x - 3$, b) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = e^x - 2$, c) $f(x) = \ln x$, $g(x) = 2x - 10$,
d) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = x^3 + x + 2$, e) $f(x) = 1 - \sqrt{x}$, $g(x) = x^2 - 4$, f) $f(x) = e^x$, $g(x) = 3x - 5$.

6. Adjuk meg az alábbi függvények értelmezési tartományát és értékkészletét! Vizsgáljuk meg, hogy rendelkeznek-e inverz függvénnyel, majd ahol létezik, határozzuk meg az inverz függvényt és annak értelmezési tartományát és értékkészletét! Ha szükséges, megfelelő értelmezési tartományra való leszűkítéssel tegyük invertálhatóvá a függvényt!

a) $f(x) = 5x - 1$,

b) $f(x) = \ln(x - 5)$,

c) $f(x) = x^2 + 6$.

Megoldás:

a)

$$D_f = \mathbb{R}, \quad R_f = \mathbb{R}, \quad \boxed{f^{-1}(x) = \frac{x+1}{5}}, \quad D_{f^{-1}} = \mathbb{R}, \quad R_{f^{-1}} = \mathbb{R}.$$

b)

$$D_f = (5, \infty), \quad R_f = \mathbb{R}, \quad \boxed{f^{-1}(x) = e^x + 5}, \quad D_{f^{-1}} = \mathbb{R}, \quad R_{f^{-1}} = (5, \infty).$$

c)

$$D_f = \mathbb{R}, \quad R_f = [6, \infty),$$

a teljes $\mathbb{R}$ -en nem invertálható. $D_f = [0, \infty)$ -re szűkítve:

$$\boxed{f^{-1}(x) = \sqrt{x-6}}, \quad D_{f^{-1}} = [6, \infty), \quad R_{f^{-1}} = [0, \infty).$$