

Matematika 1 Vegyész- és környezetmérnököknek Gyakorlat

4. feladatsor - Megoldás

1. Számoljuk ki az alábbi mennyiségeket algebrai alakban:

$$z_1 + z_2, \quad z_1 - z_2, \quad z_1 z_2, \quad \overline{z_2}, \quad |z_2|, \quad \frac{z_1}{z_2}, \quad \frac{\overline{z_2}}{z_1}$$

- a) $z_1 = 2 - 4i$, $z_2 = i - 3$ esetén;
b) $z_1 = 5 + 3i$, $z_2 = -1 - 2i$ esetén.

Megoldás:

- a) $-1 - 3i$, $5 - 5i$, $-2 + 14i$, $-3 - i$, $\sqrt{10}$, $-1 + i$, $-\frac{1}{10} - \frac{7}{10}i$;
b) $4 + i$, $6 + 5i$, $1 - 13i$, $-1 + 2i$, $\sqrt{5}$, $-\frac{11}{5} + \frac{7}{5}i$, $\frac{1}{34} + \frac{13}{34}i$.

2. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halmazán!

- a) $3iz - 5 = z + 2i$, c) $3i\bar{z} - 5 = z + 2i$, e) $z^2 + 6z + 10 = 0$,
b) $2z + 3i = (1 + i)z + 2$, d) $2\bar{z} + 3i = (1 + i)z + 2$, f) $z^2 - 10z + 29 = 0$.

Megoldás:

- a) $z = \frac{1}{10} - \frac{17}{10}i$; b) $z = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}i$; c) $z = \frac{11}{8} + \frac{17}{8}i$; d) $z = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$; e) $z = -3 \pm i$; f) $z = 5 \pm 2i$.

3. Írjuk fel a következő komplex számok trigonometrikus alakját! Ábrázoljuk őket a komplex számsíkon, majd adjuk meg exponenciális alakjukat is!

- a) $\sqrt{6} - i\sqrt{2}$, c) 8,
b) $2i - 2$, d) $-4i$.

Megoldás:

- a) $2\sqrt{2} \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right) = 2\sqrt{2} e^{i\frac{11\pi}{6}}$;
b) $2\sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = 2\sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}}$;
c) $8(\cos 0 + i \sin 0) = 8e^{i0}$;
d) $4 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) = 4e^{i\frac{3\pi}{2}}$.

4. Számoljuk ki az alábbi mennyiségeket trigonometrikus alakban:

$$z_1 z_2, \quad |z_2|, \quad \frac{z_1}{z_2}, \quad z_1^6, \quad \sqrt[3]{z_2}$$

- (a) $z_1 = \sqrt{3} - i$, $z_2 = -2 + 2i$ esetén,
(b) $z_1 = i - 1$, $z_2 = -\sqrt{12} + 2i$ esetén.

Megoldás:

a) $z_1 = 2 \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right), z_2 = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right),$
 $z_1 z_2 = 4\sqrt{2} \left(\cos \frac{31\pi}{12} + i \sin \frac{31\pi}{12} \right),$ majd a szöveget visszavezetjük a $[0, 2\pi)$ intervallumra: $z_1 z_2 = 4\sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right),$
 $|z_2| = 2\sqrt{2}, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{13\pi}{12} + i \sin \frac{13\pi}{12} \right),$
 $z_1^6 = 64 (\cos 11\pi + i \sin 11\pi),$ majd a szöveget visszavezetjük a $[0, 2\pi)$ intervallumra: $z_1^6 = 64 (\cos \pi + i \sin \pi) = -64,$
 $\sqrt[3]{z_2}: \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right), \sqrt{2} \left(\cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right), \sqrt{2} \left(\cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12} \right),$

b) $z_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right), z_2 = 4 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right),$
 $z_1 z_2 = 4\sqrt{2} \left(\cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12} \right),$
 $|z_2| = 4, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\cos \frac{23\pi}{12} + i \sin \frac{23\pi}{12} \right), \quad z_1^6 = 8 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right),$
 $\sqrt[3]{z_2}: \sqrt[3]{4} \left(\cos \frac{5\pi}{18} + i \sin \frac{5\pi}{18} \right), \sqrt[3]{4} \left(\cos \frac{17\pi}{18} + i \sin \frac{17\pi}{18} \right), \sqrt[3]{4} \left(\cos \frac{29\pi}{18} + i \sin \frac{29\pi}{18} \right).$

5.* Oldjuk meg az alábbi egyenletet a komplex számok halmazán!

$$z^8 + 16iz^4 = 0.$$

Megoldás: A gyökök:

$$\begin{aligned} z_{1,2,3,4} &= 0 \quad (\text{négyszeres gyök}), \\ z_5 &= 2 \left(\cos \frac{3\pi}{8} + i \sin \frac{3\pi}{8} \right), \\ z_6 &= 2 \left(\cos \frac{7\pi}{8} + i \sin \frac{7\pi}{8} \right), \\ z_7 &= 2 \left(\cos \frac{11\pi}{8} + i \sin \frac{11\pi}{8} \right), \\ z_8 &= 2 \left(\cos \frac{15\pi}{8} + i \sin \frac{15\pi}{8} \right). \end{aligned}$$