1. Matek mód

- $\sqrt{a^2+b^2}$
- $f(x) = \sin^2 x$
- ha $a \leq 0 \leq b$, akkor $0 \geq ab$
- $\lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$
- $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$
- $\mathbf{e}_a = \mathbf{a}_0 = \frac{1}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a}$
- $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}^2}$
- $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{AB} \in \mathbb{R}^2$
- $x \equiv y \pmod{a} \iff a \mid y-x$
- $\alpha \in \Delta \cap \Sigma \implies \Delta \cap \Sigma \neq \emptyset$
- $\sin^{(2)} x = -\sin x$
- $\sin'^2 x = \cos^2 x$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \delta^n = \frac{\pi^2}{42}$
- $\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m_i} \delta_j^i$ ha $m_1,\, m_2,\, \ldots,\, m_n < \Omega_n$
- $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\int \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2}\sin^2 x + c$
- $\int_0^1 \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2}\sin^2 x \Big|_0^1$

1.1. Tétel. *Ha a_n felülről korlátos monoton növő sorozat, akkor konvergens, és $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.*

1.2. Tétel (Bolzano–Weierstrass)**.** *Minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.*

A korlátosság szükséges feltétel, mert például az $a_n = n$ sorozat minden a_{n_i} részsorozatára $\lim_{i\to\infty} a_{n_i} = \infty$.

Bizonyítás. Legyen a_n korlátos sorozat. Az 1.1 tétel miatt elég megmutatni, hogy a_n-nek van monoton részsorozata. [...] □

2. Többsoros formulák

$$\int_0^1 \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2}\sin^2 x \Big|_0^1 \tag{$*$}$$

(használja a `\tag!` parancsot!)

A következő formulához tegye ezt:

```
\DeclareMathOperator{\Dom}{Dom} %domain
\DeclareMathOperator{\Ran}{Ran} %range
\DeclareMathOperator{\Gr}{Gr}   %graph of a function
```

a preambulumba, és használja az új `\Gr` és `\Dom` parancsokat.

$$\begin{aligned} \operatorname{Gr}(f^{-1}) &= \{(y, f^{-1}(y)) : y \in \operatorname{Dom} f^{-1} = f(\operatorname{Dom} f)\} \\ &= \{(f(x), f^{-1}(f(x))) : x \in \operatorname{Dom} f\} = \{(f(x), x) : x \in \operatorname{Dom} f\} \end{aligned}$$

Itt az egyenlőségjelek vannak egymáshoz igazítva:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2 &= x_1\mathbf{i}+y_1\mathbf{j}+z_1\mathbf{k}+x_2\mathbf{i}+y_2\mathbf{j}+z_2\mathbf{k}\\ &= x_1\mathbf{i}+x_2\mathbf{i}+y_1\mathbf{j}+y_2\mathbf{j}+z_1\mathbf{k}+z_2\mathbf{k}\\ &= (x_1+x_2)\mathbf{i}+(y_1+y_2)\mathbf{j}+(z_1+z_2)\mathbf{k}\\ &= (x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)\end{aligned}$$

A következő formulához tegye ezt:
`\DeclareMathOperator{\sgn}{sgn} %signum function`
a preambulumba, és használja a `\sgn` parancsot.

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{if } x \geq 0 \\ -1 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

A következő formulák nincsenek egymáshoz igazítva, csak összegyűjtve.

$$\int \cos^2 t\, dt = \int \cos t \cos t\, dt = \sin t \cos t + \int \sin^2 t\, dt$$
$$\int \cos^2 t\, dt = \int 1 - \sin^2 t\, dt = \int 1\, dt - \int \sin^2 t\, dt$$

Nem úgy, mint ezek:

$$\begin{aligned}\int \cos^n x\, dx = \int \underbrace{\cos x}_{f'} \underbrace{\cos^{n-1} x}_{g}\, dx \\ &= \underbrace{\sin x}_{f}\underbrace{\cos^{n-1} x}_{g} - \int \underbrace{\sin x}_{f} \underbrace{(n-1)\cos^{n-2} x \cdot (-\sin x)}_{g'}\, dx\\ &= \sin x \cos^{n-1} x + (n-1)\int (1-\cos^2 x)\cos^{n-2} x\, dx\\ &= \sin x \cos^{n-1} x + (n-1)\int \cos^{n-2} x\, dx - (n-1)\int \cos^n x\, dx\\ &\rightsquigarrow n\int \cos^n x\, dx = \sin x \cos^{n-1} x + (n-1)\int \cos^{n-2} x\, dx\\ &\rightsquigarrow \int \cos^n x\, dx = \frac{1}{n}\sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\, dx\end{aligned}$$

3. Mátrixok

(1)
$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 8 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 9/2 & 16 & -2 \\ -1/2 & -8 & 1 \\ -1/2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(2)
$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 8 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 9/2 & 16 & -2 \\ -1/2 & -8 & 1 \\ -1/2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(3)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \quad \overset{L_2-3L_1}{\sim} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{ez könnyű volt}$$

(4)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+ \dots + (-1)^{n+1} a_{1n} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} \end{vmatrix}$$

4. Testek

4.1. Definíció. $\langle F, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ test, ha:

(1) $+$ (összeadás) és $\cdot$ (szorzás) kommutatív és asszociatív
(2) 0 az összeadásra, 1 pedig a szorzásra nézve neutrális elem: $x + 0 = x$ és $1x = x$
(3) F minden elemének van additív, és minden nem-0 elemének van multiplikatív inverze, azaz

$$(\forall x)(\exists y) x + y = 0$$

(jelölés y-ra: $-x$), és

$$(\forall x \neq 0)(\exists y) xy = 1$$

(jelölés y-ra: $1/x$).
(4) disztributivitás: $x(y + z) = xy + xz$

Rövidítések: $a - b = a + (-b)$, $a/b = a \cdot 1/b$, $n = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n\text{-szer}}$.

4.2. Állítás. (1) *0 az egyetlen, az összeadásra nézve neutrális elem.*
(2) *Az additív inverz egyértelmű. (Tehát a definíció (3) pontjabeli $-$ függvény.)*
(3) *1 az egyetlen, a szorzásra nézve neutrális elem.*
(4) *A multiplikatív inverz egyértelmű. (Tehát a definíció (3) pontjabeli reciprok (1/) függvény.)*
(5) $x + y = x + z \implies y = z$
(6) $0x = 0$ *(speciálisan, ha $\exists x \neq 0$, akkor $0 \neq 1$)*
(7) $(-1)x = -x$

Bizonyítás. 1. Ha $0'$ is az, akkor $0 = 0 + 0' = 0'$.
2. ha y és z additív inverze x-nek, akkor

$$\begin{aligned} y &= y + 0 && \text{0 neutrális elem} \\ &= y + (x + z) && z \text{ additív inverze } x\text{-nek} \\ &= (y + x) + z && + \text{ asszociatív} \\ &= 0 + z && y \text{ additív inverze } x\text{-nek} \\ &= z && \text{0 neutrális elem} \end{aligned}$$

3,4. Az előző kettőhöz hasonlóan.

5.

$$\begin{aligned} y &= 0 + y && 0 \text{ neutrális elem} \\ &= (-x + x) + y && -x \text{ additív inverze } x\text{-nek} \\ &= -x + (x + y) && + \text{ asszociatív} \\ &= -x + (x + z) && + \text{ feltevés} \\ &= (-x + x) + z && + \text{ asszociatív} \\ &= 0 + z && -x \text{ additív inverze } x\text{-nek} \\ &= z && 0 \text{ neutrális elem} \end{aligned}$$

6. $xy = x(y + 0) = xy + x0$ a disztributivitás miatt, amiből $-(xy)$-t adva mindkét oldalhoz (ld. (5)!) jön az eredmény.
7. $x+(-1)x = 1x+(-1)x = (1+(-1))x = 0x = 0$ és ez $-$ egyértelműsége miatt már elég. Az első egyenlőségben itt azt használtuk, hogy 1 a szorzásra nézve neutrális elem, a másodikban a disztributivitást, a harmadikban azt, hogy -1 az 1 additív inverze, az utolsóban pedig (6)-ot.

$\square$