

Sage feladatok

2022. november 15.

1. Definiáljunk Sage-ben mindenféle függvényeket, mint pl.

$$f(x) = \sin^2(x) \cos(x), \quad g(x, y) = (x - y)^3, \dots$$

meg amik még előfordultak BevAlg vagy Kalkulus házikban. Számítsuk ki az értéküket különböző helyeken, és gondoljuk meg, hogy hihető eredményeket kaptunk-e. Ehhez érdemes olyan helyeken kiértékelni őket, ahol tudjuk, mire számítsunk; a fenti példákban $f(\pi/2)$ és $g(42, 42)$ is 0 kell legyen.

2. Határozzuk meg a fenti függvények első, második, ... deriváltjait. Keressük meg a primitív függvényeiket. Ellenőrizzük, hogy azok *valóban* primitív függvényeik.
3. Határozzuk meg a $z^5 + 4z = 0$ egyenlet összes komplex megoldását. Ellenőrizzük, hogy ezek valóban megoldások, de anélkül, hogy újra és újra leírnánk az egyenletet (adjunk neki nevet, és használjunk helyettesítést).
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arctg}(x^2)}{\sqrt{x}}$
5. $\int (x + 2)e^{2x+1} dx = ?$ Ellenőrizzük a választ deriválással!
6. $\int \frac{x^2+4x}{x^3+6x^2+5} dx = ?$ Ellenőrizzük a választ deriválással!
7. Milyen intervallumon monoton a $f(x) = (x \cdot \ln x)^3$ függvény? Hol vannak és milyenek a lokális szélsőértékeik (ha vannak)? (Figyeljünk az esetleges hamis gyökökre!)

8. Oldjuk meg a

$$2x + y + z = -1 \quad x + y - 2z = 1 \quad 3x + 2y - z = 1 \quad x + 3z = -2$$

and

$$2x + y + z = -1 \quad x + y - 2z = 1 \quad 3x + 2y - z = 0 \quad x + 3z = -2$$

lineáris egyenletrendszer!

Ellenőrizzük a (kibővített) mátrixaik rangját és vessük össze a megoldások számával!

9. Az a paraméter mely értékeire lesz a $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ mátrix invertálható? Ilyenkor mi az inverze?

10. A a és b paraméter mely értékeire lesz a

$$2x + 4y = -2 \quad -y + z = 1 \quad x + y + az = b$$

lineáris egyenletrendszernek 0, 1 ill. végtelen sok megoldása?

11. $2^{67} \pmod{71} = ?$

12. Mi a 3^{33^2} szám 8-as számrendszerbeli felírásának utolsó két jegye?

13. $\varphi(10!) = ?$

14. Oldjuk meg a $3x^7 \equiv 1 \pmod{26}$ kongruenciát és ellenőrizzük, hogy valóban jó megoldást kaptunk!

15. Oldjuk meg a következő kongruencia-rendszert és ellenőrizzük, hogy valóban jó megoldást kaptunk!

$$x \equiv 2 \pmod{3} \quad x \equiv 8 \pmod{9} \quad x \equiv -4 \pmod{11}$$

16. Osztható-e $\mathbb{Z}_3[x]$ -ben az $x^4 + x^3 + x + 2$ polinom $x^2 + 1$ -gyel?

17. Relatív príme-e az $x^3 - 2x^2 + x - 1$ és az $x^2 + 1$ polinomok $\mathbb{Q}[x]$ -ben?

18. Ábrázoljuk az \arctg függvényt a $[-5, 5]$ intervallumon. Aztán ábrázoljuk az első néhány deriváltfüggvényét is. Végül tegyük az összes grafikont egy ábrába (úgy, hogy mindegyiket más színnel rajzoltatjuk meg).