SZAKDOLGOZAT

Félcsoport részhalmazának szeparátora

Baranyi Máté

Témavezető:

Dr. Nagy Attila
habilitált egyetemi docens
BME Matematika Intézet
Algebra Tanszék

MŰEGYETEM 1782

BME
2016

Tartalomjegyzék

Előszó

A szakdolgozatban félcsoport részhalmazának szeparátorával foglalkozunk. A cél a szeparátorral kapcsolatos főbb eredmények összegyűjtése, összefoglalása. A szeparátor fogalmát Nagy Attila vezette be The separator of a subset of a semigroup című cikkében 1980-ban ([1]). Félcsoportok kutatásában az ideálok fontos szerepet játszanak. Vizsgálták S félcsoport tetszőleges A részhalmaza esetén mindazon S-beli x elemek $\operatorname{Id} A$-val jelölt halmazát, amelyekre $xA \subseteq A$ és $Ax \subseteq A$ teljesül. Ezt az A részhalmaz idealizátorának nevezzük. Természetes gondolat a komplementer részhalmaz idealizátorát is vizsgálni. Ha mást nem mondunk, S-ben jelölje $\overline{A}$ az A részhalmaz komplementerét ($S \setminus A$). Így jutunk el az A részhalmaz szeparátorához, ami $\operatorname{Id} A$ és $\operatorname{Id} \overline{A}$ metszete.

A szakdolgozat Nagy Attila témával kapcsolatos [1, 2, 3, 4, 5] cikkeit használja fő forrásul, az ezekben publikált eredményeket közli. A munka 4 fejezetből áll. Az 1. fejezet alapozó jellegű. Bevezetjük a szeparátor fogalmát, bemutatjuk annak alapvető tulajdonságait, amelyekért többször is visszanyúlunk a későbbiekben. A szeparátorral kapcsolatos segédfogalmakat is definiálunk, amelyek szintén többször előkerülnek még. Kitérünk az unitér részfélcsoportokkal, prímideálokkal és szabad félcsoportokkal való kapcsolatokra. A 2. fejezet a szeparátor monoid-kongruenciákkal való kapcsolatára tér ki. A szeparátor segítségével körülírjuk a kommutatív félcsoportok monoid-kongruenciáit, és szó esik félcsoportok kommutatív monoid-kongruenciáiról. A 3. fejezet ismerteti a szeparátor fogalmának használhatóságát olyan speciális félcsoportok szerkezetének leírásában, mint például a csoport, a teljesen reguláris félcsoport, a Clifford-félcsoport és a teljesen 0-egyszerű félcsoport. Megjelenik a test feletti négyzetes mátrixfélcsoport, a véges halmazon vett transzformációk félcsoportja és később a permutatítv félcsoport is. A bitranszlációk segítségével bemutatásra kerülnek olyan félcsoportok, amelyeken a részhalmazok szeparátora speciális feltételeket teljesít. A 4. fejezet visszakanyarodik a kongruenciákhoz. Először kommutatív félcsoportok ideáljai alapján vett főkongruenciái, majd Gauss-gyűrűk multiplikatív félcsoportjának oszthatósággal kapcsolatos kongruenciái jelennek meg. A munka kitekintéssel zárul, egy az addigi eredményeket használó számelméleti összefüggés kerül bemutatásra.

1. fejezet

A szeparátor és alaptulajdonságai

Ebben a fejezetben Nagy Attila The separator of a subset of a semigroup című cikkében közölt eredményeket ismertetjük ([1]). Bevezetjük a szeparátor fogalmát, bemutatjuk annak alapvető tulajdonságait. Ezután meghatározzuk a szeparátor-tartalmazó és -kizáró részhalmaz fogalmát. Rámutatunk a szeparátor alkalmazhatóságára az unitér részfélcsoportok, prímideálok és szabad félcsoportok részhalmazai esetén.

1.1 Bevezetés

1.1 Definíció. [6, 7]
Legyen S egy félcsoport és A az S egy részhalmaza. Ekkor az

$$\mathrm{Id}\,A = \{x \in S \mid Ax \subseteq A \quad \text{és} \quad xA \subseteq A\}$$

halmazt az A idealizátorának nevezzük. Ha A üres halmaz, akkor $\mathrm{Id}\,A = S$.

Nyilvánvalóan $\mathrm{Id}\,A$ üres vagy S részfélcsoportja.

1.2 Definíció. Legyen S egy félcsoport és A az S egy részhalmaza. Ekkor a

$$\mathrm{Sep}\,A = \mathrm{Id}\,A \cap \mathrm{Id}\,\overline{A}$$

halmazt az A szeparátorának nevezzük.

Másképp fogalmazva, ha $A \subseteq S$ és $x \in S$, akkor

$$x \in \mathrm{Sep}\,A \quad \Leftrightarrow \quad xA \subseteq A\ , \quad Ax \subseteq A\ , \quad x\overline{A} \subseteq \overline{A}\ , \quad \overline{A}x \subseteq \overline{A}\ .$$

1.1 Megjegyzés. Bármely A részhalmazára egy S félcsoportnak $\mathrm{Sep}\,A$ üres vagy az S egy részfélcsoportja. Nyilvánvaló, hogy $\mathrm{Sep}\,A = \mathrm{Sep}\,\overline{A}$, s így $\mathrm{Sep}\,\emptyset = \mathrm{Sep}\,S = S$.

1.2 Megjegyzés. Ha S félcsoport egységelemes (e), akkor bármely A részhalmazára $e \in \operatorname{Sep} A$.

1.3 Megjegyzés. Ha $I \neq S$ ideál az S félcsoportban, akkor $I \cap \operatorname{Sep} I = \emptyset$.

1.1 Tétel. Legyen $\{A_i \mid i \in I\}$ az S félcsoport részhalmazainak egy halmaza. Ekkor

$$\cap_{i \in I} \operatorname{Sep} A_i \subseteq \operatorname{Sep} \cup_{i \in I} A_i \quad \text{és} \quad \cap_{i \in I} \operatorname{Sep} A_i \subseteq \operatorname{Sep} \cap_{i \in I} A_i \ .$$

Bizonyítás. Legyen $x \in \cap_{i \in I} \operatorname{Sep} A_i$.

Ekkor teljesül, hogy

$$x[\cup_{i \in I} A_i] = \cup_{i \in I} x A_i \subseteq \cup_{i \in I} A_i \ ,$$

valamint

$$x[\overline{\cup_{i \in I} A_i}] = x[\cap_{i \in I} \overline{A_i}] \subseteq \cap_{i \in I} x \overline{A_i} \subseteq \cap_{i \in I} \overline{A_i} = \overline{\cup_{i \in I} A_i} \ .$$

Ugyanígy adódik, hogy

$$[\cup_{i \in I} A_i] x \subseteq \cup_{i \in I} A_i \quad \text{és} \quad \overline{[\cup_{i \in I} A_i]} x \subseteq \overline{\cup_{i \in I} A_i} \ .$$

Tehát $x \in \operatorname{Sep} \cup_{i \in I} A_i$.

A másik tartalmazás is igaz felhasználva az imént belátottat:

$$\cap_{i \in I} \operatorname{Sep} A_i = \cap_{i \in I} \operatorname{Sep} \overline{A_i} \subseteq \operatorname{Sep} \cup_{i \in I} \overline{A_i} = \operatorname{Sep} \overline{\cap_{i \in I} A_i} = \operatorname{Sep} \cap_{i \in I} A_i \ .$$

□

1.1 Következmény. $\operatorname{Sep} A \cap \operatorname{Sep} \operatorname{Sep} A \subseteq \operatorname{Sep}(A \cup \operatorname{Sep} A)$ egy félcsoport tetszőleges A részhalmazára.

1.2 Tétel. Ha A egy félcsoport részfélcsoportja, akkor $A \cup \operatorname{Sep} A$ is részfélcsoport ugyanebben a félcsoportban.

Bizonyítás. Legyen A egy S félcsoport részfélcsoportja. Tegyük fel, hogy $\operatorname{Sep} A \neq \emptyset$, mert az ellenkező eset nyilvánvaló. Mivel $\operatorname{Sep} A$ maga is részfélcsoport S-ben, ezért bármely két $x, y \in A \cup \operatorname{Sep} A$ elemre csak az $x \in A$ és $y \in \operatorname{Sep} A$ esetet kell vizsgálni. Ekkor xy és yx is A eleme a szeparátor definíciója alapján. □

1.3 Tétel. Ha A egy félcsoport részhalmaza úgy, hogy $\operatorname{Sep} A \neq \emptyset$, akkor vagy $\operatorname{Sep} A \subseteq A$ vagy $\operatorname{Sep} A \subseteq \overline{A}$.

Bizonyítás. Legyen A egy S félcsoport részhalmaza, amelyre $A \cap \operatorname{Sep} A \neq \emptyset$. Legyen x a $\operatorname{Sep} A$, míg a az $A \cap \operatorname{Sep} A$ eleme. Ekkor x miatt $xa \in A$. Tegyük fel, hogy $x \in \overline{A}$. Mivel $a \in \operatorname{Sep} A$, ezért $xa \in \overline{A}$ is igaz, ami ellentmondás.

Vagyis, ha $A \cap \operatorname{Sep} A \neq \emptyset$ és $x \in \operatorname{Sep} A$, akkor $x \in A$.

Összegezve: $A \cap \operatorname{Sep} A \neq \emptyset \Rightarrow \operatorname{Sep} A \subseteq A$.

Innen a másik lehetséges kimenetel nyilvánvaló. $\square$

1.4 Tétel. Legyen ϕ egy S félcsoportnak önmagára képezett homomorfizmusa, valamint R_1 és R_2 az S részfélcsoportjai úgy, hogy $\phi^{-1}(R_2) = R_1$. Ekkor

$$\phi(\operatorname{Sep} R_1) = \operatorname{Sep} R_2 \ .$$

Bizonyítás. Legyen x a $\operatorname{Sep} R_1$ egy eleme. Be fogjuk látni, hogy $\phi(x)$ a $\operatorname{Sep} R_2$ eleme.

Legyen $y \in R_2$. Ekkor létezik $y_0 \in S$, amelyre $\phi(y_0) = y$. Tegyük fel, hogy $\phi(x)y \in \overline{R_2}$. Ekkor $\phi(x)\phi(y_0) = \phi(xy_0) \in \overline{R_2}$, vagyis $xy_0 \in \overline{R_1}$. Így $y_0 \in \overline{R_1}$, mivel $x \in \operatorname{Sep} R_1$. Emiatt $\phi(y_0) = y \in \overline{R_2}$ igaz lenne, ami ellentmond annak, hogy $y \in R_2$. Következésképp $\phi(x)y \in R_2$ minden $x \in \operatorname{Sep} R_1$ és $y \in R_2$ esetén. Hasonlóan adódik, hogy $y\phi(x) \in R_2$.

Most legyen $z \in \overline{R_2}$. Ekkor létezik $z_0 \in S$, amelyre $\phi(z_0) = z$. Tegyük fel, hogy $\phi(x)z \in R_2$. Ekkor $\phi(x)\phi(z_0) = \phi(xz_0) \in R_2$, vagyis $xz_0 \in R_1$. Így $z_0 \in R_1$, mivel $x \in \operatorname{Sep} R_1$. Emiatt $\phi(z_0) = z \in R_2$ igaz lenne, ami ellentmond annak, hogy $z \in \overline{R_2}$. Következésképp $\phi(x)z \in \overline{R_2}$ minden $x \in \operatorname{Sep} R_1$ és $z \in \overline{R_2}$ esetén. Hasonlóan adódik, hogy $z\phi(x) \in \overline{R_2}$.

Tehát $\phi(x) \in \operatorname{Sep} R_2$, vagyis $\phi(\operatorname{Sep} R_1) \subseteq \operatorname{Sep} R_2$.

A másik irányú tartalmazás belátásához az kell, hogy $t \notin \operatorname{Sep} R_1 \Rightarrow \phi(t) \notin \operatorname{Sep} R_2$ igaz legyen. A definícióból következik, hogy $t \notin \operatorname{Sep} R_1$ esetén létezik egy $u \in R_1$ vagy egy $v \in \overline{R_1}$, hogy $tu \in \overline{R_1}, ut \in \overline{R_1}, tv \in R_1, vt \in R_1$ közül legalább egy igaz. Mivel a többi eset hasonlóan adódik vegyük csak azt az esetet, hogy $u \in R_1$ és $tu \in \overline{R_1}$. Ekkor $\phi(u) \in R_2$ és $\phi(t)\phi(u) \in \overline{R_2}$, vagyis $\phi(t) \notin \operatorname{Sep} R_2$. $\square$

1.2 Következmény. Legyen ϕ egy S félcsoportnak önmagára képezett homomorfizmusa, valamint R_1 és R_2 az S részfélcsoportjai úgy, hogy $\phi(R_1) = R_2$. Ekkor $\phi(\operatorname{Sep} R_1) = \operatorname{Sep} R_2$.

1.2 Szeparátor-tartalmazó és -kizáró részhalmazok

1.3 Definíció. Egy félcsoport A részhalmaza szeparátor-tartalmazó [-kizáró], ha $\operatorname{Sep} A \subseteq A$ [$\operatorname{Sep} A \subseteq \overline{A}$]. Ha $\operatorname{Sep} A = \emptyset$, akkor A szeparátor-tartalmazó és -kizáró is.

1.4 Megjegyzés. Ha egy félcsoport A részhalmaza szeparátor-tartalmazó [-kizáró], akkor nyilvánvalóan $\overline{A}$ szeparátor-kizáró [-tartalmazó]. Egy S félcsoport önmagának szeparátor-tartalmazó részhalmaza, míg az üres halmaz szeparátor-kizáró.

1.5 Megjegyzés. Ha A és B szeparátor-tartalmazó részfélcsoportjai egy S félcsoportnak, és $\phi : A \to B$ egy homomorfizmus, akkor általában $\phi(\operatorname{Sep} A) \neq \operatorname{Sep} B$.

Azonban, ha a ϕ homomorfizmusra igaz, hogy $\operatorname{Sep} A = \phi^{-1}(\operatorname{Sep} B)$, akkor ϕ homomorfizmus úgy is, hogy: $\phi : \operatorname{Sep}\operatorname{Sep} A \to \operatorname{Sep}\operatorname{Sep} B$.

1.1 Példa. Legyen $S = \{0, a, b, 1\}$ egy félcsoport, amelynek Cayley-művelettáblája:

•	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	a	0	a
b	0	0	b	b
1	0	a	b	1

Ebben a félcsoportban például:

- $\operatorname{Sep}\{1\} = \{1\}$ és $\operatorname{Sep}\{1, a, b\} = \{1, a, b\}$;
- $\operatorname{Sep}\{a\} = \{1\}$ esetén $\operatorname{Sep}\{a\} \cap \{a\} = \emptyset$ és $\operatorname{Sep}\{a\} \cup \{a\} \neq S$;
- $\operatorname{Sep}\{0, a, b\} = \{1\}$ esetén $\operatorname{Sep}\{0, a, b\} \cap \{0, a, b\} = \emptyset$,
  de $\operatorname{Sep}\{0, a, b\} \cup \{0, a, b\} = S$.

1.5 Tétel. Legyen A és B egy S félcsoport részhalmazai úgy, hogy $\operatorname{Sep} A \cap \operatorname{Sep} B \neq \emptyset$. Ekkor, ha A szeparátor-tartalmazó [-kizáró], akkor $A \cup B$ [$A \cap B$] is szeparátor-tartalmazó [-kizáró] részhalmaza S-nek és a szeparátor nem üres.

Bizonyítás. Az 1.3 Tétel alapján a szeparátor-tartalmazó részhalmazra vonatkozó megállapítás igaz lesz, ha belátjuk, hogy $(A \cup B) \cap \operatorname{Sep}(A \cup B) \neq \emptyset$. Az 1.1 Tétel, a $\operatorname{Sep} A \subseteq A$ és a $\operatorname{Sep} A \cap \operatorname{Sep} B \neq \emptyset$ feltétel alapján

$$(A \cup B) \cap \operatorname{Sep}(A \cup B) \supseteq A \cap \operatorname{Sep} A \cap \operatorname{Sep} B = \operatorname{Sep} A \cap \operatorname{Sep} B \neq \emptyset \ .$$

Következésképp $(A \cup B) \cap \operatorname{Sep}(A \cup B) \neq \emptyset$.

A szeparátor-kizáró A részhalmazra vonatkozó megállapítás esetén $\overline{A}$ szeparátor-tartalmazó. Mivel a $\operatorname{Sep} \overline{A} \cap \operatorname{Sep} \overline{B} = \operatorname{Sep} A \cap \operatorname{Sep} B \neq \emptyset$ feltétel teljesül, $\overline{A}$-ra alkalmazhatjuk az imént belátott állítást. Tehát $\overline{A} \cup \overline{B}$ szeparátor-tartalmazó és a szeparátora nem üres. Következésképp $A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$ szeparátor-kizáró és $\operatorname{Sep}(A \cap B) = \operatorname{Sep}(\overline{\overline{A} \cup \overline{B}}) = \operatorname{Sep}(\overline{A} \cup \overline{B}) \neq \emptyset$. □

1.3 Következmény. Az iménti tételbeli jelölésekkel, ha A szeparátor-tartalmazó és B szeparátor-kizáró részhalmaz úgy, hogy $\operatorname{Sep} A \cap \operatorname{Sep} B \neq \emptyset$, akkor $A \cup B$ szeparátor-tartalmazó és $A \cap B$ szeparátor-kizáró részhalmaz, és egyik szeparátora sem üres.

1.6 Tétel. Legyen A és B egy S félcsoport részhalmazai úgy, hogy $\operatorname{Sep} A \cap \operatorname{Sep} B \neq \emptyset$. Ekkor, ha A és B is szeparátor-tartalmazó [-kizáró], akkor $A \cap B$ és [$A \cup B$] is szeparátor-tartalmazó [-kizáró] részhalmaza S-nek és a szeparátora nem üres.

Bizonyítás. Az 1.3 Tétel alapján a szeparátor-tartalmazó A és B részhalmazokra vonatkozó megállapítás igaz lesz, ha belátjuk, hogy $(A \cap B) \cap \operatorname{Sep}(A \cap B) \neq \emptyset$. Az 1.1 Tétel, a $\operatorname{Sep} A \subseteq A$, a $\operatorname{Sep} B \subseteq B$ és a $\operatorname{Sep} A \cap \operatorname{Sep} B \neq \emptyset$ feltétel alapján

$$(A \cap B) \cap \operatorname{Sep}(A \cap B) = (A \cap B) \cap \operatorname{Sep}(\overline{A \cap B}) = (A \cap B) \cap \operatorname{Sep}(\overline{A} \cup \overline{B}) \supseteq$$
$$A \cap B \cap \operatorname{Sep} \overline{A} \cap \operatorname{Sep} \overline{B} = A \cap B \cap \operatorname{Sep} A \cap \operatorname{Sep} B = \operatorname{Sep} A \cap \operatorname{Sep} B \neq \emptyset \ .$$

Következésképp $(A \cap B) \cap \operatorname{Sep}(A \cap B) \neq \emptyset$.

A szeparátor-kizáró A és B részhalmazokra vonatkozó megállapítás esetén $\overline{A}$ és $\overline{B}$ szeparátor-tartalmazóak. Erre alkalmazhatjuk az imént belátott állítást, mert a $\operatorname{Sep} \overline{A} \cap \operatorname{Sep} \overline{B} = \operatorname{Sep} A \cap \operatorname{Sep} B \neq \emptyset$ feltétel teljesül. Így $\overline{A} \cap \overline{B}$ szeparátor-tartalmazó és a szeparátora nem üres. Következésképp $A \cup B = \overline{\overline{A} \cap \overline{B}}$ szeparátor-kizáró és $\operatorname{Sep}(A \cup B) = \operatorname{Sep}(\overline{\overline{A} \cap \overline{B}}) = \operatorname{Sep}(\overline{A} \cap \overline{B}) \neq \emptyset$. □

1.4 Következmény. Legyen A és B egy S félcsoport részhalmazai, amelyekre igaz, hogy $\operatorname{Sep} A \cap \operatorname{Sep} B \neq \emptyset$. Ekkor, ha A szeparátor-tartalmazó, akkor $B \setminus A$ szeparátor-kizáró részhalmaza S-nek és a szeparátora nem üres.

1.5 Következmény. Legyen A és B egy S félcsoport részhalmazai, amelyekre igaz, hogy $\operatorname{Sep} A \cap \operatorname{Sep} B \neq \emptyset$. Ekkor, ha A szeparátor-tartalmazó és B szeparátor-kizáró, akkor a B részhalmaz két szeparátor-kizáró részhalmaz uniója: $B = (B \setminus A) \cup (B \cap A)$.

1.7 Tétel. Ha egy félcsoport A részhalmazára $\operatorname{Sep} A \neq \emptyset$, akkor

$$\operatorname{Sep} \operatorname{Sep} A \subseteq \operatorname{Sep} A \ .$$

Bizonyítás. Legyen A egy félcsoport részhalmaza. Feltesszük, hogy $\operatorname{Sep} \operatorname{Sep} A \neq \emptyset$. Most vesszük $\operatorname{Sep} \operatorname{Sep} A$ egy t elemét, s belátjuk, hogy $t \in \operatorname{Sep} A$.

Vegyük az A egy tetszőleges a elemét. Ekkor minden $x \in \operatorname{Sep} A$ esetén $xt \in \operatorname{Sep} A$, s emiatt $xta \in A$. Most vizsgáljuk ta helyét. Ha $ta \in \overline{A}$ igaz, akkor $x \in \operatorname{Sep} A$ miatt $xta \in \overline{A}$ igaz, és ez ellentmondás, így $ta \in A$ az igaz. Ugyanígy $at \in A$.

Vegyük az $\overline{A}$ egy tetszőleges b elemét. Ekkor minden $x \in \operatorname{Sep} A$ esetén $xt \in \operatorname{Sep} A$, s emiatt $xtb \in \overline{A}$. Most vizsgáljuk tb helyét. Ha $tb \in A$ igaz, akkor $x \in \operatorname{Sep} A$ miatt $xtb \in A$ igaz, és ez ellentmondás, így $tb \in \overline{A}$ az igaz. Ugyanígy $bt \in \overline{A}$.

A szeparátor definíciója alapján $t \in \operatorname{Sep} A$. Következésképp $\operatorname{Sep} \operatorname{Sep} A \subseteq \operatorname{Sep} A$. □

1.6 Következmény. Ha egy félcsoport A részhalmazára $\operatorname{Sep} A$ minimális részfélcsoport, akkor $\operatorname{Sep} \operatorname{Sep} A = \emptyset$ vagy $\operatorname{Sep} \operatorname{Sep} A = \operatorname{Sep} A$.

1.3 Unitér részfélcsoportok és prímideálok

1.4 Definíció. Egy S félcsoport U részfélcsoportjára azt mondjuk, hogy unitér, ha $ab, a \in U \Rightarrow b \in U$ és $ab, b \in U \Rightarrow a \in U$. Másképpen U unitér, ha $ab \in U \Rightarrow a, b \in U$ vagy $a, b \in \overline{U}$.

1.8 Tétel. Egy S félcsoport A részfélcsoportjára a következő két feltétel ekvivalens:

1. $A = \operatorname{Sep} A$

2. A unitér részfélcsoportja S-nek.

Bizonyítás. 1. $\Rightarrow$ 2.: Legyen A egy S félcsoport részfélcsoportja, amelyre $A = \operatorname{Sep} A$. Ha $a \in A$ és $b \in \overline{A}$, vagy $a \in \overline{A}$ és $b \in A$, akkor $ab \in \overline{A}$. Emiatt igaz, hogy $ab \in A \Rightarrow a, b \in A$ vagy $a, b \in \overline{A}$, vagyis A unitér részfélcsoportja S-nek.

2. $\Rightarrow$ 1.: Legyen A egy S félcsoport unitér részfélcsoportja. Ha $a \in A$, akkor $aA \subseteq A$ és $Aa \subseteq A$, mert A részfélcsoport S-ben. Továbbá $a\overline{A} \subseteq \overline{A}$ és $\overline{A}a \subseteq \overline{A}$, mert A unitér S-ben. Ezek szerint $a \in \operatorname{Sep} A$, vagyis $A \subseteq \operatorname{Sep} A$, s így az 1.3 Tétel szerint $A = \operatorname{Sep} A$. □

1.5 Definíció. Egy S félcsoport P ideálját prímideálnak nevezzük, ha $P \neq S$ és $ab \in P \Rightarrow a \in P$ vagy $b \in P$.

1.9 Tétel. Egy S félcsoport P részfélcsoportja esetén az S-ben a következő igaz:

$$P \text{ prímideál} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{P} \text{ unitér részfélcsoport}\ .$$

Bizonyítás. $\Rightarrow$: Az 1.3 Megjegyzés alapján az S félcsoport minden $P \neq S$ ideáljára $\operatorname{Sep} P \subseteq \overline{P}$. Definíció alapján pedig $\overline{P}P \subseteq P$ és $P\overline{P} \subseteq P$ is igaz. Tegyük fel, hogy P prímideál S-ben. Ekkor igaz, hogy $\overline{P}\overline{P} \subseteq \overline{P}$. Az utóbbi három tartalmazásból következik, hogy $\overline{P} \subseteq \operatorname{Sep} P = \operatorname{Sep} \overline{P}$. Az 1.3 Tétel alapján $\overline{P} = \operatorname{Sep} \overline{P}$, és ebből az 1.8 Tétel miatt következik, hogy $\overline{P}$ unitér részfélcsoport S-ben.

$\Leftarrow$: Visszafelé legyen P egy részfélcsoport S-ben, amelyre $\overline{P}$ unitér részfélcsoport ugyanitt. Ekkor az 1.8 Tétel miatt $\overline{P} = \operatorname{Sep} \overline{P} = \operatorname{Sep} P$. Vegyük az S egy tetszőleges t elemét. Ha $t \in \overline{P}$, akkor minden $p \in P$ esetén $pt \in P$ és $tp \in P$, mivel $\overline{P} = \operatorname{Sep} P$. Ha pedig $t \in P$, akkor minden $p \in P$ esetén $pt \in P$ és $tp \in P$, mivel P részfélcsoport. Következésképp P ideál S-ben, hiszen minden $t \in S$ esetén $tP \subseteq P$ és $Pt \subseteq P$. Valamint $\overline{P}$ részfélcsoportságát felhasználva [8, 9] alapján P prímideál lesz. □

1.6 Definíció. Egy S félcsoport $M \neq S$ ideálját maximális ideálnak nevezzük, ha S minden A ideálja esetén $M \subseteq A \subseteq S \Rightarrow M = A$ vagy $A = S$.

1.10 Tétel. Legyen I maximális ideál egy S félcsoportban. Ha I maximális részfélcsoportja S-nek és $\operatorname{Sep} I \neq \emptyset$, akkor I prímideál.

Bizonyítás. Legyen I egy maximális ideál S-ben. Az 1.2 Tétel miatt $I \cup \operatorname{Sep} I$ részfélcsoport S-ben, és az 1.3 Megjegyzés miatt $I \cap \operatorname{Sep} I = \emptyset$. Következésképp $I \subset I \cup \operatorname{Sep} I$. Mivel I maximális részfélcsoport is S-ben, ezért $I \cup \operatorname{Sep} I = S$, amiből $\overline{I} = \operatorname{Sep} I = \operatorname{Sep} \overline{I}$. Felhasználva az 1.8 Tételt $\overline{I}$ unitér részfélcsoport S-ben, s emiatt az 1.9 Tétel szerint I prímideál. □

1.4 Szeparátorok szabad félcsoportokban

Ebben a részben többször használjuk a következő lemma eredményét.

1.1 Lemma. [8, 9] §9.1
Egy S szabad félcsoport T részfélcsoportja pontosan akkor szabad részfélcsoport, ha $sT \cap T \neq \emptyset$ és $Ts \cap T \neq \emptyset$ esetén $s \in T$ minden $s \in S$ elemre.

1.11 Tétel. Egy szabad félcsoport esetén, annak minden szabad részfélcsoportja szeparátor-tartalmazó.

Bizonyítás. Legyen T egy szabad részfélcsoport egy S szabad félcsoportban. Feltehetjük, hogy $\operatorname{Sep} T \neq \emptyset$. Legyen s egy tetszőleges elem $\operatorname{Sep} T$-ben. Ekkor definíció szerint $sT \subseteq T$ és $Ts \subseteq T$. Következésképp $sT \cap T \neq \emptyset$ és $Ts \cap T \neq \emptyset$, amiből 1.1 Lemma szerint $s \in T$ következik, vagyis $\operatorname{Sep} T \subseteq T$. □

1.12 Tétel. Egy szabad félcsoport esetén, annak minden szabad részfélcsoportjának szeparátora szabad, kivéve, ha üres.

Bizonyítás. Legyen T egy szabad részfélcsoport egy S szabad félcsoportban, amelyre $\operatorname{Sep} T \neq \emptyset$. Legyen s tetszőleges elem S-ben, amelyre $s(\operatorname{Sep} T) \cap \operatorname{Sep} T \neq \emptyset$ és $(\operatorname{Sep} T)s \cap \operatorname{Sep} T \neq \emptyset$. Ekkor $sT \cap T \neq \emptyset$ és $Ts \cap T \neq \emptyset$, mert az 1.11 Tétel szerint $\operatorname{Sep} T \subseteq T$. Ebből pedig $s \in T$ következik az 1.1 Lemma alapján.

Belátjuk, hogy $s \in \operatorname{Sep} T$. Mivel $s \in T$, így $sT \subseteq T$ és $Ts \subseteq T$. A további feltételekhez legyen t tetszőleges elem $\overline{T}$-ben. A $(\operatorname{Sep} T)s \cap \operatorname{Sep} T \neq \emptyset$ feltevés miatt létezik $m_1, m_2 \in \operatorname{Sep} T \subseteq T$, amelyekre $m_1 s = m_2$. Definíció szerint $m_2 t \in \overline{T}$. Tegyük fel, hogy $st \in T$. Ekkor $m_2 t = (m_1 s)t = m_1(st) \in T$, s ez ellentmond annak, hogy $m_2 t \in \overline{T}$. Tehát $s\overline{T} \subseteq \overline{T}$ és hasonlóan $\overline{T}s \subseteq \overline{T}$. Következésképp $s \in \operatorname{Sep} T$.

Megmutattuk, hogy a $s(\operatorname{Sep} T) \cap \operatorname{Sep} T \neq \emptyset$ és $(\operatorname{Sep} T)s \cap \operatorname{Sep} T \neq \emptyset$ feltételek teljesülése esetén $s \in \operatorname{Sep} T$ minden $s \in S$ elemre. Emiatt az 1.1 Lemma alapján $\operatorname{Sep} T$ szabad részfélcsoport S-ben. □

1.13 Tétel. Egy S szabad félcsoport bármely $T \neq \emptyset$ részhalmazára a következő két feltétel ekvivalens:

1. T szabad részfélcsoport, melyre igaz, hogy minden $t \in T$ és $s \in S$ esetén $tst \in T \quad \Rightarrow \quad ts \in T \quad \text{és} \quad st \in T$;

2. $T = \operatorname{Sep} T$.

Bizonyítás. 1. $\Rightarrow$ 2.: Ha az 1. feltétel teljesül egy $T \neq \emptyset$ részhalmazra, akkor az 1.11 Tétel miatt elég megmutatni, hogy $T \subseteq \operatorname{Sep} T$. Legyen T egy tetszőleges eleme t. Ekkor $tT \subseteq T$ és $Tt \subseteq T$, mivel T részfélcsoport. Most legyen s a $\overline{T}$ egy eleme. Erre kell, hogy $ts \in \overline{T}$ és $st \in \overline{T}$ igazak legyenek. Ha feltesszük, hogy $ts \in T$ vagy $st \in T$, akkor $tst \in T$, mert $t \in T$. Ekkor viszont az 1. feltétel miatt $ts \in T$ és $st \in T$ igaz, ami alapján $Ts \cap T \neq \emptyset$ és $sT \cap T \neq \emptyset$. Az 1.1 Lemma szerint így $s \in T$, ami ellentmond annak, hogy $s \in \overline{T}$. Következésképp $ts \in \overline{T}$ és $st \in \overline{T}$, vagyis $t \in \operatorname{Sep} T$ minden $t \in T$ esetén, s így $T \subseteq \operatorname{Sep} T$.

2. $\Rightarrow$ 1.: Ha a 2. feltétel teljesül egy $T \neq \emptyset$ részhalmazra, akkor az 1.1 Megjegyzés miatt T részfélcsoport S-ben. Legyen s tetszőleges elem S-ben, amelyre $sT \cap T \neq \emptyset$ és $Ts \cap T \neq \emptyset$. Tegyük fel, hogy $s \in \overline{T}$. Ekkor $sT = s(\operatorname{Sep} T) = s(\operatorname{Sep} \overline{T}) \subseteq \overline{T}$, és így $sT \cap T = \emptyset$, ami ellentmondás, tehát $s \in T$. Következésképp T szabad részfélcsoport az 1.1 Lemma miatt. Most legyen $t \in T$ és $s \in S$ olyanok, hogy $tst \in T$. Mivel $T = \operatorname{Sep} T$, ezért az 1.8 Tétel alapján T unitér részfélcsoport S-ben, és így $t \in T$ miatt $st, ts \in T$. □

1.14 Tétel. Legyen S egy szabad félcsoport, melynek A egy olyan részfélcsoportja, hogy $A^n \subseteq \operatorname{Sep} A$ valamilyen n pozitív egészre. Ekkor A szabad részfélcsoport.

Bizonyítás. Legyen $s \in S$ tetszőleges elem úgy, hogy $sA \cap A \neq \emptyset$ és $As \cap A \neq \emptyset$. Ekkor létezik egy $a \in A$ elem, amelyre $sa \in A$. Mivel A részfélcsoport, ezért $sa^n \in A$. Így $s \in A$, mivel $a^n \in A^n \subseteq \operatorname{Sep} A$. Az 1.1 Lemma miatt pedig A szabad részfélcsoport S-ben. □

2. fejezet

A szeparátor kapcsolata monoid-kongruenciákkal

Ebben a fejezetben Nagy Attila On monoid congruences of commutative semigroups című cikkében közölt eredményeket ismertetjük részletesen ([2]). A szeparátor segítségével körülírjuk a kommutatív félcsoportok monoid-kongruenciáit. Többek között megmutatjuk, hogy kommutatív félcsoportnak akkor és csak akkor van nem-univerzális monoid-kongruenciája, ha van nem üres szeparátorú nem triviális részhalmaza. Ezután kitérünk Nagy Attila On commutative monoid congruences of semigroups című cikkének eredményeire is ([3]).

2.1 Kommutatív félcsoportok monoid-kongruenciái

Legyen S egy félcsoport és H ennek egy részhalmaza. Ekkor [8, 9] alapján bevezetünk jelöléseket a következő relációkhoz:

$$a \in S \quad \text{esetén} \quad H \ldots a = \{(x,y) \in S \times S \mid xay \in H\} \ ,$$

$$P_H = \{(a,b) \in S \times S \mid H \ldots a = H \ldots b\} \ .$$

P_H a H részhalmaz által generált főkongruencia.

Legyen $\{H_i, i \in I\}$ egy S félcsoport nem üres részhalmazainak egy családja, és legyen $H = \cap_{i \in I} \operatorname{Sep} H_{i \in I}$. Ekkor jelölje a $\{H_i, i \in I\}$ családot a $(H; H_i, I)$ formula. Egy $(H; H_i, I)$ család esetén legyen $P(H; H_i, I)$ a következő reláció S-en:

$$P(H; H_i, I) = \{(a,b) \in S \times S \mid H_i \ldots a = H_i \ldots b \quad \forall i \in I\} \ .$$

Könnyen belátható, hogy $P(H; H_i, I)$ kongruencia-reláció S-en.

2.1 Tétel. Legyen S egy félcsoport és ρ ennek egy kongruenciája. Ha $\{S_k, k \in K\}$ az S az iménti ρ szerinti kongruencia-osztályainak egy halmaza, akkor $\cup_{k\in K} S_k$ vagy üres vagy S-beli ρ kongruencia-osztályok uniója.

Bizonyítás. Legyen $\{S_k, k \in K\}$ az S-nek ρ szerinti kongruencia-osztályainak egy halmaza, és legyen $U = \cup_{k\in K} S_k$. Feltehetjük, hogy $\mathrm{Sep}\, U \neq \emptyset$ és $\mathrm{Sep}\, U \neq S$. Legyen $a, b \in S$ úgy, hogy $a \in \mathrm{Sep}\, U$ és $b \notin \mathrm{Sep}\, U$. Ilyen elempár létezik a feltétel miatt, és erre belátjuk, hogy $(a, b) \notin \rho$. Mivel $b \notin \mathrm{Sep}\, U$, ezért a következő négy feltételből legalább az egyik igaz: $bU \nsubseteq U$, $Ub \nsubseteq U$, $b\overline{U} \nsubseteq \overline{U}$,$\overline{U}b \nsubseteq \overline{U}$.

Például $bU \nsubseteq U$ esetén létezik $c \in U$, amelyre $bc \notin U$. Ekkor $abc \notin U$, mivel $a \in \mathrm{Sep}\, U$. Mivel $\mathrm{Sep}\, U$ részfélcsoport S-ben, így $aa \in \mathrm{Sep}\, U$. Ekkor $aac \in U$, mivel $c \in U$. Következésképp $(a, b) \notin \rho$, mert $(aac, abc) \notin \rho$, hiszen U éppen S-beli ρ kongruencia-osztályok uniója. Hasonló úton ugyanehhez a következtetéshez jutunk, ha a másik három feltétel valamelyike teljesül. Beláttuk, hogy $a \in \mathrm{Sep}\, U \quad$ és $\quad b \notin \mathrm{Sep}\, U \Rightarrow (a, b) \notin \rho$, ami alapján $\mathrm{Sep}\, U$ éppen S-beli ρ kongruencia-osztályok uniója. □

2.2 Tétel. Legyen S egy félcsoport és H ennek egy részfélcsoportja. Ha $(H; H_i, I)$ az S részhalmazainak egy nem üres családja, akkor $P(H; H_i, I)$ egy kongruencia S-en úgy, hogy minden $i \in I$ esetén a H_i részhalmazok és a H is előáll S-beli $P(H; H_i, I)$ kongruencia-osztályok uniójaként.

Bizonyítás. Könnyen megmutatható, hogy $P(H; H_i, I)$ kongruencia S-en. Vegyünk egy tetszőleges $i \in I$ elemet, majd legyenek $x, y \in S$ olyanok, hogy $x \in H_i$, de $y \notin H_i$, valamint legyen $h \in H$. Mivel $H \subseteq \mathrm{Sep}\, H_i$, ezért $hxh \in H_i$ és $hyh \notin H_i$. Emiatt $(x, y) \notin P(H; H_i, I)$, és így H_i éppen S-beli $P(H; H_i, I)$ kongruencia-osztályok uniója.

Most megmutatjuk, hogy H is S-beli $P(H; H_i, I)$ kongruencia-osztályok uniója. Ehhez legyen $h \in H$ és $g \in \overline{H}$ tetszőlegesek. Ekkor létezik egy $j \in I$, amelyre $g \notin \mathrm{Sep}\, H_j$. Emiatt a következő négy feltételből legalább az egyik igaz: $gH_j \nsubseteq H_j$, $H_j g \nsubseteq H_j$, $g\overline{H_j} \nsubseteq \overline{H_j}$, $\overline{H_j}g \nsubseteq \overline{H_j}$.

Például $gH_j \nsubseteq H_j$ esetén létezik $b \in H_j$, amelyre $gb \notin H_j$. Ekkor úgy, mint a 2.1 Tétel bizonyításában, adódik, hogy $hgb \notin H_j$, de $hhb \in H_j$. Tehát $(g, h) \notin P(H; H_i, I)$. Hasonló úton ugyanehhez a következtetéshez jutunk, ha a másik három feltétel valamelyike teljesül. Beláttuk, hogy

$$h \in H \quad \text{és} \quad g \in \overline{H} \quad \Rightarrow \quad (h, g) \notin P(H; H_i, I)\ ,$$

ami alapján H éppen S-beli $P(H; H_i, I)$ kongruencia-osztályok uniója. □

2.3 Tétel. Legyen S egy kommutatív félcsoport és H ennek egy részfélcsoportja. Ha $(H; H_i, I)$ az S részhalmazainak egy nem üres családja, akkor $P(H; H_i, I)$ egy monoid-kongruencia S-en úgy, hogy H az egységeleme az $S/P(H; H_i, I)$ faktorfélcsoportnak.

Megfordítva pedig egy kommutatív félcsoport minden monoid-kongruenciája előállítható az iménti módon.

Bizonyítás. Legyen S egy kommutatív félcsoport és H ennek egy részfélcsoportja. Tegyük fel, hogy $(H; H_i, I)$ nem üres. Ekkor a 2.2 Tétel miatt S-beli $P(H; H_i, I)$ kongruencia-osztályok uniójaként előáll a H. Legyen $a, b \in H$ tetszőlegesek, amelyekre megmutatjuk, hogy $(a, b) \in P(H; H_i, I)$. Ehhez legyen $i \in I$ és $x, y \in S$. Legyen $xay \in H_i$. Ekkor $yxa \in H_i$ és emiatt $yx \in H_i$, mivel S kommutatív és $a \in H \subseteq \operatorname{Sep} H_i$. Így $yxb \in H_i$, amiből $xby \in H_i$. Vagyis $(a, b) \in P(H; H_i, I)$ igaz, tehát a H egy S-beli $P(H; H_i, I)$ kongruencia-osztály.

Most belátjuk, hogy H az $S/P(H; H_i, I)$ faktorfélcsoport egységeleme. Vegyünk egy S_k tetszőleges S-beli $P(H; H_i, I)$ kongruencia-osztályt, és ennek egy $u \in S_k$ elemét. Célunk, hogy $\forall a \in H$ esetén $ua \in S_k$. Ehhez legyen $i \in I$ és $x, y \in S$. Ekkor $xuy \in H_i \Leftrightarrow xuay = xuya \in H_i$, mivel S kommutatív és $a \in H \subseteq \operatorname{Sep} H_i$. Tehát $(u, ua) \in P(H; H_i, I)$, vagyis $ua \in S_k$. Következésképp H az egységeleme az $S/P(H; H_i, I)$ faktorfélcsoportnak.

A megfordítás bizonyításához legyen S egy kommutatív félcsoport és ρ ennek egy monoid-kongruenciája. Jelölje H az S/ρ faktorfélcsoport egységelemét. Legyen $M = \cap_{k \in K} \operatorname{Sep} S_k$, ahol $\{S_k, k \in K\}$ az összes S-beli ρ kongruencia-osztályt tartalmazó halmaz. Világos, hogy $H \subseteq M$. Belátjuk, hogy $H = M$. Tegyük fel indirekt módon, hogy $H \subsetneq M$. Legyen $a \in H$ és $b \in M \setminus H$ tetszőlegesek. Ekkor létezik $k_0 \in K$, hogy $b \in S_{k_0}$. Mivel $b \in M \subseteq \operatorname{Sep} S_{k_0}$, így $\operatorname{Sep} S_{k_0} \cap S_{k_0} \neq \emptyset$, és az 1.3 Tétel miatt $\operatorname{Sep} S_{k_0} \subseteq S_{k_0}$. Az előzőekből $H \subsetneq M \subseteq \operatorname{Sep} S_{k_0} \subseteq S_{k_0}$, és így $H = S_{k_0}$, mert H és S_{k_0} is egy-egy S-beli ρ kongruencia-osztály. Az ellentmondás onnan is jön, hogy $b \in S_{k_0}$-ból $b \in H$ következik. Vagyis $H = M$. Következésképp kapjuk a $P(H; S_k, K)$ kongruenciát.

Megmutatjuk, hogy $P(H; S_k, K) = \rho$. Először kell, hogy $P(H; S_k, K) \subseteq \rho$. Ehhez legyen $a, b \in S$ elempár, amelyre $(a, b) \in P(H; S_k, K)$. Természetesen adódik $m, n \in K$ indexek, hogy $a \in S_m$ és $b \in S_n$. Mivel H az S/ρ faktorfélcsoport egységeleme, ezért $hah \in S_m$ és $hbh \in S_n$ tetszőleges $h \in H$ esetén. Ha $n \neq m$, akkor a jelölések alapján $(h, h) \in S_m \ldots a$, de $(h, h) \notin S_m \ldots b$, mert $hbh \notin S_m$. Tehát $S_m \ldots a \neq S_m \ldots b$, s így $(a, b) \notin P(H; S_k, K)$, ami ellentmondás, vagyis $n = m$ lesz. Így pedig $a, b \in S_m = S_n$, amiből következik, hogy $(a, b) \in \rho$. Tehát $P(H; S_k, K) \subseteq \rho$. Mivel $(a, b) \in \rho$ esetén $(xay, xby) \in \rho$ bármilyen $x, y \in S$ elempárra, ezért $S_k \ldots a = S_k \ldots b$ minden $k \in K$ indexre, vagyis $(a, b) \in P(H; S_k, K)$. Következésképp $\rho \subseteq P(H; S_k, K)$. Összegezve pedig $\rho = P(H; S_k, K)$. □

2.1 Következmény. Legyen S egy kommutatív félcsoport és H ennek egy részhalmaza. Ekkor P_H egy monoid-kongruencia S-en úgy, hogy $\operatorname{Sep} H$ az egységeleme a S/P_H faktorfélcsoportnak.

2.4 Tétel. Legyen S egy kommutatív félcsoport és H ennek egy részfélcsoportja. Ha ρ egy monoid-kongruencia S-en úgy, hogy H az S/ρ faktorfélcsoport egységeleme, akkor $P(H; H_i, I) \subseteq \rho \subseteq P_H$, ahol $\{H_i, i \in I\}$ legyen S azon H_i részhalmazainak családja, melyre $H \subseteq \operatorname{Sep} H_i$ $(i \in I)$.

Bizonyítás. Legyen S egy kommutatív félcsoport és ezen ρ egy monoid-kongruencia. Legyen $H \subseteq S$ az egységeleme az S/ρ faktorfélcsoportnak. Ekkor H nyilván unitér részfélcsoportja S-nek, és az 1.8 Tétel miatt $H = \operatorname{Sep} H$. Ebből következik, hogy $H = \cap_{i\in I} \operatorname{Sep} H_i$, ahol $\{H_i, i \in I\}$ az S azon részhalmazainak családja, amelyekre $H \subseteq \operatorname{Sep} H_i$. Így definiáltuk S-en a $P(H; H_i, I)$ kongruenciát. Legyen $\{S_k, k \in K\}$ az összes S-beli ρ kongruencia-osztály családja. A 2.3 Tétel miatt $\rho = P(H; S_k, K)$. Mivel $H \in (H; S_k, K) \subseteq (H; H_i, I)$, így megkapjuk, hogy $P(H; H_i, I) \subseteq \rho \subseteq P_H$. □

2.2 Következmény. Egy S kommutatív félcsoportban a következők ekvivalensek:

1. $\exists$ nem univerzális monoid-kongruencia,

2. $\exists\ \emptyset \subset A \subset S$ részhalmaz, amelyre $\operatorname{Sep} A \neq \emptyset$.

Bizonyítás. 1. $\Rightarrow$ 2.: Legyen ρ egy nem univerzális monoid-kongruencia az S kommutatív félcsoporton, és legyen A az az S-beli ρ kongruencia-osztály, amely az S/ρ faktorfélcsoport egységeleme. Ekkor $\emptyset \subset A \subset S$, és mivel $A \subseteq \operatorname{Sep} A$, így $\operatorname{Sep} A \neq \emptyset$.

2. $\Leftarrow$ 1.: Legyen A az S kommutatív félcsoport részhalmaza, amelyre $\emptyset \subset A \subset S$ és $\operatorname{Sep} A \neq \emptyset$. Az 1.3 Tétel miatt $\operatorname{Sep} A \subseteq A$ vagy $\operatorname{Sep} A \subseteq \overline{A}$, és így $\operatorname{Sep} A \neq S$. A 2.3 Tétel alapján $\operatorname{Sep} A$ az egységeleme az S/P_A faktorfélcsoportnak, és P_A pedig egy nem univerzális monoid-kongruencia S-en. □

2.2 Félcsoportok kommutatív monoid-kongruenciái

2.1 Definíció. Egy S félcsoport A részhalmazát mediális részhalmaznak nevezzük, ha

$$\forall a, b, x, y \in S \quad \text{esetén} \quad xaby \in A \;\Leftrightarrow\; xbay \in A\ .$$

2.5 Tétel. Legyen $\{A_i, i \in I\}$ egy S félcsoport mediális részhalmazainak egy családja úgy, hogy $A = \cap_{i\in I} \operatorname{Sep} A_i$ nem üres. Ekkor $P(A; A_i, I)$ egy kommutatív monoid-kongruencia S-en úgy, hogy az $S/P(A; A_i, I)$ faktorfélcsoport egységeleme az A lesz.

Megfordítva pedig egy félcsoport minden kommutatív monoid-kongruenciája előállítható az iménti módon.

Bizonyítás. Legyen $\{A_i, i \in I\}$ egy S félcsoport mediális részhalmazainak egy családja úgy, hogy $A = \cap_{i\in I} \operatorname{Sep} A_i$ nem üres. Mivel $xaby \in A_i \Leftrightarrow xbay \in A_i$ minden $a, b, x, y \in S$ és $i \in I$ esetén, ezért $P(A; A_i, I)$ kommutatív kongruencia S-en. Legyen $a, b \in S$ tetszőleges elempár, amelyre létezik $i \in I$ úgy, hogy $a \in A_i$ és $b \notin A_i$. Ekkor minden $g, h \in A$ elempárra $gah \in A_i$ és $gbh \notin A_i$, vagyis $(a, b) \notin P(A; A_i, I)$. Emiatt A_i minden $i \in I$ esetén $P(A; A_i, I)$-osztályok uniójaként áll elő.

Most legyenek $a, b \in A$ tetszőlegesek. Tegyük fel, hogy $xay \in A_i$ valamilyen $i \in I$ és $x, y \in S$ elemekre. Mivel $b \in \operatorname{Sep} A_i$, ezért $xayb \in A_i$. Felhasználva, hogy A_i mediális részhalmaz S-ben, $xyab \in A_i$ is igaz, és így $xy \in A_i$, mert $ab \in \operatorname{Sep} A_i$. Hasonlóan következnek, hogy $xyba, xbya, xby \in A_i$, hiszen $ba \in \operatorname{Sep} A_i$, az A_i még mindig mediális és $a \in \operatorname{Sep} A_i$. Így pedig $(a, b) \in P(A; A_i, I)$.

Most legyen úgy, hogy $a \in A$, de $b \notin A$. Ekkor létezik $j \in I$, hogy $b \notin \operatorname{Sep} A_j$, vagyis négy eset lehetséges: $bA_j \nsubseteq A_j$, $A_j b \nsubseteq A_j$, $b\overline{A_j} \nsubseteq \overline{A_j}$, $\overline{A_j} b \nsubseteq \overline{A_j}$. Vegyük az első esetet, miszerint $bA_j \nsubseteq A_j$. Ekkor létezik $c \in A_j$, hogy $bc \notin A_j$, és így $abc \notin A_j$. Ellenben $aac \in A_j$, vagyis $(a, b) \notin P(A; A_i, I)$. Ugyanezt kapjuk a másik három esetben. Így A egy $P(A; A_i, I)$-osztály.

Legyenek $a \in A$ és $s \in S$ tetszőlegesek. Ekkor minden $x, y \in S$ esetén

$$xsay \in A_i \;\Leftrightarrow\; xsaya \in A_i \;\Leftrightarrow\; xsyaa \in A_i \;\Leftrightarrow\; xsy \in A_i \;.$$

Így $(sa, s) \in P(A; A_i, I)$. Hasonlóan adódik, hogy $(as, s) \in P(A; A_i, I)$. Tehát A az egységelem az $S/P(A; A_i, I)$ faktorfélcsoportban. Következésképp $P(A; A_i, I)$ kommutatív monoid-kongruencia S-en.

Megfordítva legyen σ egy kommutatív monoid-kongruencia S-en. Jelölje A az S/σ faktorfélcsoport egységelemét, és legyen $\{A_i, i \in I\}$ az S-beli σ-osztályok családja. Világos, hogy A_i minden $i \in I$ esetén mediális részhalmaz S-ben. Legyen $a \in A$ tetszőleges. Mivel $aA_i \subseteq A_i$ és $A_i a \subseteq A_i$, ezért minden $i \in I$ esetén $a \in \cap_{i\in I} \operatorname{Sep} A_i$, vagyis $A \subseteq \cap_{i\in I} \operatorname{Sep} A_i$.

Tegyük fel, hogy létezik $b \in S$, amelyre $b \in (\cap_{i\in I} \operatorname{Sep} A_i) \setminus A$. Kell léteznie egy $j \in I$ indexnek, amelyre $b \in A_j \neq A$, vagyis $A_j \cap \operatorname{Sep} A_j \neq \emptyset$. Ekkor az 1.3 Tétel miatt $\operatorname{Sep} A_j \subseteq A_j$, amiből $A \subseteq A_j$ következik, ami ellentmondás, tehát $A = \cap_{i\in I} \operatorname{Sep} A_i$.

Azt már beláttuk, hogy A_i minden $i \in I$ esetén $P(A; A_i, I)$-osztályok uniójaként áll elő, vagyis $P(A; A_i, I) \subseteq \sigma$. Valamint mivel A_i minden $i \in I$ esetén egy-egy σ-osztály, ezért világos, hogy $\sigma \subseteq P(A; A_i, I)$. Következésképp $\sigma = P(A; A_i, I)$. □

2.2 Definíció. Egy S félcsoport A részhalmazát reflexív részhalmaznak nevezzük, ha

$$\forall a, b \in S \quad \text{esetén} \quad ab \in A \quad \Rightarrow \quad ba \in A \;.$$

2.3 Következmény. Egy S félcsoport bármely A mediális részhalmazára $\operatorname{Sep} A$ vagy üres vagy reflexív unitér részfélcsoportja S-nek.

Bizonyítás. Vegyünk egy S félcsoportot és annak egy A mediális részhalmazát, amelyben $\operatorname{Sep} A \neq \emptyset$. A 2.5 Tétel miatt P_A kommutatív monoid-kongruenciája S-nek úgy, hogy $\operatorname{Sep} A$ az egységeleme az S/P_A faktorfélcsoportnak. Ekkor $\operatorname{Sep} \operatorname{Sep} A = \operatorname{Sep} A$, így az 1.8 Tétel miatt $\operatorname{Sep} A$ unitér részfélcsoport S-ben. Felhasználva P_A kommutativitását $\operatorname{Sep} A$ reflexív is. □

2.3 Definíció. [10]
Egy S félcsoportot permutatív félcsoportnak nevezünk, ha létezik egy $n \geq 2$ egész szám és egy σ nem-identikus permutáció az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmazon, hogy S minden x_i $(i \in \{1, 2, \cdots, n\})$ elemére $x_1 x_2 \cdots x_n = x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(n)}$.

2.1 Megjegyzés. Nyilvánvalóan minden permutatív monoid kommutatív.

Most permutatív félcsoportok monoid-kongruenciáit vizsgáljuk. Ehhez szükségünk van a következő lemmára.

2.1 Lemma. [11]
Legyen S egy permutatív félcsoport. Ekkor létezik egy pozitív egész k, hogy

$$\forall u, v \in S^k \quad \text{és} \quad \forall x, y \in S \quad \text{esetén} \quad uxyv = uyxv \ .$$

2.6 Tétel. Legyen $\{A_i, i \in I\}$ egy permutatív S félcsoport részhalmazainak egy családja úgy, hogy $A = \cap_{i \in I} \operatorname{Sep} A_i$ nem üres. Ekkor $P(A; A_i, I)$ egy monoid-kongruencia S-en úgy, hogy az $S/P(A; A_i, I)$ faktorfélcsoport egységeleme az A lesz.

Megfordítva pedig egy permutatív félcsoport minden monoid-kongruenciája előállítható az iménti módon.

Bizonyítás. Legyen S egy permutatív félcsoport. Ekkor a 2.1 miatt létezik egy pozitív egész k, hogy minden $u, v \in S^k$ és minden $x, y \in S$ esetén $uxyv = uyxv$. Legyen X egy nem üres részhalmaz S-ben, amelyre $\operatorname{Sep} X \neq \emptyset$. Legyenek $u, v, x, y \in S$ olyanok, hogy $uxyv \in X$. Ekkor

$$(t^{k-1}u)yx(vt^{k-1}) = (t^{k-1}u)xy(vt^{k-1}) \in X \ ,$$

amiből $uyxv \in X$ következik. Tehát X mediális részhalmaza S-nek.

Legyen $\{A_i, i \in I\}$ az S részhalmazainak egy családja úgy, hogy $A = \cap_{i \in I} \operatorname{Sep} A_i$ nem üres. A_i minden $i \in I$ esetén mediális részhalmaz a fentiek miatt, és így a 2.5 Tétel miatt $P(A; A_i, I)$ (kommutatív) monoid-kongruencia S-en, és A az egységelem az $S/P(A; A_i, I)$-ban.

A megfordítás világos a 2.5 Tétel alapján. □

2.4 Következmény. Egy S permutatív félcsoport bármely A részhalmazára $\operatorname{Sep} A$ vagy üres vagy reflexív unitér részfélcsoportja S-nek.

Bizonyítás. Legyen S egy permutatív félcsoport és A ennek egy részhalmaza, amelyre $\operatorname{Sep} A \neq \emptyset$. Már beláttuk, hogy A mediális részhalmaz, és így az állítás világos a 2.3 Következmény alapján. $\square$

3. fejezet

Speciális típusú félcsoportok részhalmazainak szeparátora

Ebben a fejezetben Nagy Attila On the separator of subsets of semigroups című cikkében közölt eredményeket ismertetjük ([4]). Vizsgáljuk félcsoport ideáljának szeparátorát, ezt speciálisan test feletti négyzetes mátrixok és véges halmazon vett transzformációk esetén külön is vizsgáljuk. Belátjuk, hogy speciális félcsoportok (csoport, teljesen reguláris félcsoport, Clifford-félcsoport, teljesen 0-egyszerű félcsoport) részhalmazának szeparátora vagy üres vagy bizonyos feltétel mellett az is ugyanolyan tulajdonságú speciális félcsoport lesz. Ezután a bitranszlációk segítségével felírunk két feltételt, amelyekkel könnyebben karakterizálhatunk különböző, a szeparátorral kapcsolatos tulajdonságokat. Végül megemlítünk permutatív félcsoportokkal kapcsolatos eredményeket.

3.1 Félcsoport ideáljának szeparátora

3.1 Definíció. Legyen I egy ideál az S félcsoportban. Ekkor azt a ρ kongruenciát, amelyre:

$$(a, b) \in \rho \quad \Leftrightarrow \quad a = b \ \text{ vagy } \ a, b \in I \ ,$$

azt az S félcsoport I ideálja szerinti Rees-kongruenciájának nevezzük. Ezt S/ρ helyett S/I jelöli. S/I-re tekinthetünk úgy is, mintha az I elemeit egyetlen (nulla) elembe vontuk volna össze, miközben az I-n kívüli elemeket változatlanul hagytuk.

3.1 Tétel. Egy S félcsoport egy I ideálja esetén $\operatorname{Sep} I = \operatorname{Sep}_{S/I}(\{0\})$, ahol a jobb oldal az S/I Rees-faktorfélcsoport nulla elemének a szeparátora.

Bizonyítás. A definíciókból nyilvánvaló. □

3.2 Definíció. Egy nullelemes S félcsoport a elemét bal [jobb] oldali nullosztónak nevezzük, ha létezik $b \in S$, hogy $b \neq 0$ és $ab = 0$ [$ba = 0$].

Egy S-beli elemet nullosztónak nevezünk, ha bal vagy jobb oldali nullosztó. (Ha mindkettő, akkor kétoldali nullosztó.)

3.2 Tétel. Egy nullelemes S félcsoport esetén $\mathrm{Sep}(\{0\})$ az S-beli nem nullosztók halmaza.

Bizonyítás. A definíciókból nyilvánvaló. □

Test feletti négyzetes mátrixok multiplikatív félcsoportjára

Most az $n \times n$ méretű $\mathbb{F}$ test feletti mátrixok $M_n(\mathbb{F})$ multiplikatív félcsoportjának ideáljára vett szeparátorával foglalkozunk.

A továbbiakban jelölje $\mathbf{E}_k$ $[\mathbf{E}_k^*]$ azt az $M_n(\mathbb{F})$-beli mátrixot, melynek diagonálisában az első [utolsó] k elem az $\mathbb{F}$ egységeleme, míg a mátrix további elemei az $\mathbb{F}$ nulleleme.

Legyen I az $M_n(\mathbb{F})$ egy ideálja. Ekkor I akkor és csak akkor tartalmaz egy egy k-adrangú mátrixot, ha tartalmazza az $\mathbf{E}_k$-t is. Ez pedig akkor és csak akkor lehetséges, ha I tartalmazza az összes k-adrangú $M_n(\mathbb{F})$-beli mátrixot.

Könnyen látható, hogy $\mathbf{E}_i\mathbf{E}_j = \mathbf{E}_{min\{i,j\}}$.

Az előzőekből adódik a következő lemma.

3.1 Lemma. $M_n(\mathbb{F})$ minden I ideálja esetén létezik egy $0 \leq k_I \leq n$ egész, hogy $I = \{\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{F}) \mid \mathrm{rang}(\mathbf{A}) \leq k_I\}$.

3.1 Megjegyzés. Egy S félcsoport I ideálját valódinak nevezzük, ha $S \neq I$.

3.3 Tétel. Ha I valódi ideálja az $M_n(\mathbb{F})$ multiplikatív félcsoportnak, akkor $\mathrm{Sep}\, I$ megegyezik $M_n(\mathbb{F})$ egységcsoportjával.

Bizonyítás. Legyen I egy valódi ideál $M_n(\mathbb{F})$-ben. A 3.1 Lemma alapján

$$I = \{\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{F}) \mid \mathrm{rang}(\mathbf{A}) \leq k_I\} \ .$$

$\mathrm{rang}(\mathbf{AB}) = \mathrm{rang}(\mathbf{BA}) = \mathrm{rang}(\mathbf{A})$ tetszőleges $M_n(\mathbb{F})$-beli B és A mátrix esetén, ahol B reguláris. Ezért $\mathrm{Sep}\, I$ tartalmazza $M_n(\mathbb{F})$ egységcsoportját. Felhasználva, hogy félcsoportok ideáljai szeparátor-kizáróak, $k_I = n - 1$ esetén $\mathrm{Sep}\, I$ lesz $M_n(\mathbb{F})$ egységcsoportja.

Ha $k_I < n-1$, akkor legyen $\mathbf{A}$ az $M_n(\mathbb{F})$ tetszőleges mátrixa, amelyre igaz, hogy $k_I < \mathrm{rang}(\mathbf{A}) \leq n-1$. Jelölje i az $\mathbf{A}$ mátrix rangját. Ekkor léteznek olyan reguláris $\mathbf{B}$ és $\mathbf{C}$ mátrixok $M_n(\mathbb{F})$-ben, hogy $\mathbf{BAC} = \mathbf{E}_i$. Könnyen ellenőrizhető, hogy $\mathbf{E}_i\mathbf{E}^*_{k_i+1}$ vagy a nullmátrix lesz, vagy az a diagonális mátrix, ahol az átló $k{+}1., \ldots, i.$ helyén az egységelem, mindenhol máshol a nullelem áll. Így $\mathrm{rang}(\mathbf{E}_i\mathbf{E}^*_{k_i+1}) \leq k_I$, hiszen $i < n$, tehát $\mathbf{E}_i\mathbf{E}^*_{k_i+1} \in I$. Vagyis $\mathbf{BACE}^*_{k_i+1} \in I$, és mivel $\mathbf{B}$ reguláris, $\mathbf{ACE}^*_{k_i+1} \in I$, valamint $\mathrm{rang}(\mathbf{CE}^*_{k_i+1}) = k_I + 1$ miatt $\mathbf{CE}^*_{k_i+1} \notin I$. Következésképp $\mathbf{A} \notin \mathrm{Sep}\, I$, ami alapján $\mathrm{Sep}\, I$ az $M_n(\mathbb{F})$ egységcsoportja. □

Véges halmazon vett transzformációk félcsoportjára

3.3 Definíció. Egy X halmaz önmagába való egyértelmű leképezését az X halmaz egy transzformációjának nevezzük. Jelölje $\mathcal{T}_X$ az X összes transzformációinak halmazát.

A $\mathcal{T}_X$ halmazon a leképezéseknél megszokott módon értelmezzük a $\circ$ műveletet. Legyen $\alpha, \beta \in \mathcal{T}_X$ és $x \in X$ tetszőlegesek. Ha a $\circ$ műveletet úgy érjük, hogy $(\alpha \circ \beta)(x) = \alpha(\beta(x))$, akkor teljes bal transzformáció-félcsoportról, míg $(x)(\alpha \circ \beta) = ((x)\alpha)\beta$ esetén teljes jobb transzformáció-félcsoportról beszélünk.

3.4 Tétel. Legyen I a $\mathcal{T}_X$ valódi ideálja, ahol $\mathcal{T}_X$ egy véges X halmaz feletti transzformációk halmaza. Ekkor $\operatorname{Sep} I = S_n$, ahol S_n az X feletti permutációk csoportja.

Bizonyítás. Legyen I egy valódi ideálja $\mathcal{T}_X$-nek ($|X| = n < \infty$). A [8, 9] 2.9 Tétele és a 2.2§-beli 3(a) Gyakorlata alapján létezik egy $0 \leq k_I \leq n$ egész, hogy I azon X-en vett transzformációk halmaza, amelyek rangja kisebb vagy egyenlő, mint k_I. Világos, hogy $S_n \subseteq \operatorname{Sep} I$. Ha $k_I = n - 1$, akkor pedig $\operatorname{Sep} I = S_n$.

Ha $k_I < n - 1$, akkor legyen $\alpha \in \mathcal{T}_X$, amelynek i rangjára $k_I < i < n$. Legyen $X\alpha = \{j_1, \ldots, j_i\}$. Mivel $i < n$, ezért vehetünk egy $x_0 \in X \setminus (X\alpha)$ elemet. Most vegyünk egy $\alpha^* \in \mathcal{T}_X$ transzformációt, amelyre teljesül, hogy $X\alpha\alpha^* = \{j_1, \ldots, j_{k_I}\}$ és $x\alpha^* = x_0$ minden $x \notin X\alpha$ esetén. Mivel α^* rangja $k_I + 1$, ezért $\alpha^* \notin I$. Viszont $\alpha\alpha^*$ rangja k_I, így $\alpha\alpha^* \in I$. Következésképp $\alpha \notin \operatorname{Sep} I$, ami alapján $\operatorname{Sep} I = S_n$. $\square$

3.2 Csoport részhalmazának szeparátora

3.5 Tétel. Legyen S egy félcsoport és ennek egy részcsoportja pedig G. Ha A egy részhalmaza S-nek úgy, hogy $\operatorname{Sep} A \cap G \neq \emptyset$, akkor $\operatorname{Sep} A \cap G$ csoport.

Bizonyítás. Legyen e a G részcsoport egységeleme, míg a az A részhalmaz tetszőleges eleme. Tegyük fel, hogy $ea \notin A$. Ekkor egy $t \in \operatorname{Sep} A \cap G$ esetén $ta = (te)a = t(ea) \notin A$, ami ellentmondás, mert $ta \in A$. Vagyis $eA \subseteq A$, és hasonlóképpen igazolható, hogy $Ae \subseteq A$, $e\overline{A} \subseteq \overline{A}$,$\overline{A}e \subseteq \overline{A}$, amiből $e \in \operatorname{Sep} A$ következik.

Legyen $t \in \operatorname{Sep} A \cap G$ tetszőleges, és ennek jelölje t^{-1} a G-beli inverzét. Ekkor minden $a \in A$ esetén $tt^{-1}a = ea \in A$, amiből $t^{-1}a \in A$ következik, mivel $t \in \operatorname{Sep} A$. Ugyanígy $at^{-1} \in A$, és így $t^{-1}A \subseteq A$ és $At^{-1} \subseteq A$. Hasonlóképpen igazolható, hogy $t^{-1}\overline{A} \subseteq \overline{A}$ és $\overline{A}t^{-1} \subseteq \overline{A}$. Következésképp $t^{-1} \in \operatorname{Sep} A$, és így $\operatorname{Sep} A \cap G$ csoport. $\square$

3.6 Tétel. Egy G csoport bármely A részhalmaza esetén $\operatorname{Sep} A$ a G egy részcsoportja.

Bizonyítás. Legyen A egy G csoport részhalmaza. Mivel G egységeleme $\mathrm{Sep}\, A$ eleme, ezért $\mathrm{Sep}\, A \neq \emptyset$. Alkalmazva a 3.6 Tételt az A-ra és a G-re, ahol G, mint önmga részcsoportja szerepel, azt kapjuk, hogy $\mathrm{Sep}\, A \cap G = \mathrm{Sep}\, A$ részcsoport G-ben. $\square$

3.3 Teljesen reguláris félcsoport részhalmazának szeparátora

3.4 Definíció. Egy S félcsoport a elemét teljesen regulárisnak nevezzük, ha létezik $x \in S$, amelyre $axa = a$ és $ax = xa$.

Az S félcsoportot teljesen regulárisnak nevezzük, ha minden eleme teljesen reguláris.

3.2 Megjegyzés. Egy félcsoport akkor és csak akkor teljesen reguláris, ha előáll (diszjunkt) csoportok uniójaként.

Bizonyítás. Lásd a [12] 6.16. Tételét. $\square$

3.7 Tétel. Egy teljesen reguláris S félcsoport bármely A részhalmaza esetén $\mathrm{Sep}\, A$ vagy üres vagy teljesen reguláris részfélcsoportja S-nek.

Bizonyítás. Legyen S egy teljesen reguláris félcsoport. Ekkor S előáll G_a $(a \in Y)$ részcsoportok diszjunkt uniójaként az előző megjegyzés alapján. Legyen A az S egy olyan részhalmaza, amelyre $\mathrm{Sep}\, A \neq \emptyset$. Ekkor $\mathrm{Sep}\, A$ részfélcsoportja S-nek. Vegyünk egy $a \in Y$ elemet, amelyre $\mathrm{Sep}\, A \cap G_a \neq \emptyset$. A 3.6 Tétel alapján $\mathrm{Sep}\, A \cap G_a$ részcsoport G_a-ban. Legyen $Y' = \{a \in Y \mid \mathrm{Sep}\, A \cap G_a \neq \emptyset\}$. Ekkor $\mathrm{Sep}\, A$ teljesen reguláris, hiszen $\mathrm{Sep}\, A = \cup_{a \in Y'} (\mathrm{Sep}\, A \cap G_a)$. $\square$

3.4 Clifford-félcsoport részhalmazának szeparátora

3.5 Definíció. Egy S félcsoportot Clifford-félcsoportnak nevezünk, ha reguláris és idempotens elemei benne vannak a centrumban.

3.3 Megjegyzés. Egy félcsoport akkor és csak akkor Clifford-félcsoport, ha előáll csoportok félhálójaként.

Bizonyítás. Lásd a [12] 10.28. Tételét. $\square$

3.8 Tétel. Egy S Clifford-félcsoport bármely A részhalmaza esetén $\mathrm{Sep}\, A$ vagy üres vagy Clifford-részfélcsoportja S-nek.

Bizonyítás. Legyen S egy Clifford-félcsoport. Ekkor S előáll G_a $(a \in Y)$ csoportok Y félhálójaként az előző megjegyzés alapján. Legyen A az S egy olyan részhalmaza, amelyre $\mathrm{Sep}\, A \neq \emptyset$. Legyen $Y' = \{a \in Y \mid \mathrm{Sep}\, A \cap G_a \neq \emptyset\}$. A 3.7 Tétel alapján $\mathrm{Sep}\, A = \cup_{a \in Y'}(\mathrm{Sep}\, A \cap G_a)$. Nyilvánvaló, hogy Y' részfélcsoportja az Y félhálónak, és így $\mathrm{Sep}\, A$ a $\mathrm{Sep}\, A \cap G_a$ $(a \in Y')$ részcsoportok Y' félhálója. Tehát $\mathrm{Sep}\, A$ Clifford-félcsoport. $\square$

3.5 Teljesen 0-egyszerű félcsoport részhalmazának szeparátora

A [13] 1. Lemmája alapján, ha A egy $S = \mathcal{M}_0(G; I, J; P)$ véges teljesen 0-egyszerű félcsoport részfélcsoportja, amely nem tartalmazza S nullelemét, akkor léteznek $I' \subseteq I$ és $J' \subseteq J$ részhalmazok és egy $G' \subseteq G$ részcsoport, hogy

$$A = \{(i, h, j) \mid i \in I', j \in J', h \in G'\}$$

és $p_{j,i} \in G'$ minden $j \in J'$ és $i \in I'$ esetén.

A [13] 1. Lemmájának bizonyításában S végessége csak annak belátásához kell, hogy $A \cap H$ csoport S minden H-val jelölt $\mathcal{H}$-osztályára, ahol $A \cap H \neq \emptyset$. Az iménti $\mathcal{H}$ most és a továbbiakban is a Green-féle $\mathcal{H}$-relációt jelöli. Erről bővebben például [12] 4.5. alfejezete szól.

Ha A egy S teljesen 0-egyszerű félcsoport részfélcsoportja, amely nem tartalmazza S nullelemét, akkor minden H-val jelölt $\mathcal{H}$-osztálya, amelyre $A \cap H \neq \emptyset$, részcsoportja S-nek. Erről lásd még [8, 9] 2.52b Következményét.

Így adódik a következő eredmény.

3.2 Lemma. Ha A

1. egy $S = \mathcal{M}_0(G; I, J; P)$ teljesen 0-egyszerű félcsoport részfélcsoportja, amely nem tartalmazza S nullelemét, és
2. minden H-val jelölt $\mathcal{H}$-osztálya esetén, amelyre $A \cap H \neq \emptyset$, $A \cap H$ részcsoportja H-nak,

akkor léteznek $I' \subseteq I$ és $J' \subseteq J$ részhalmazok és egy $G' \subseteq G$ részcsoport, hogy $A = \{(i, h, j) \mid i \in I', j \in J', h \in G'\}$ és $p_{j,i} \in G'$ minden $j \in J'$ és $i \in I'$ esetén.

Bizonyítás. Lásd a fenti kiegészítést és a [13] 1. Lemmájának bizonyítását. $\square$

3.4 Megjegyzés. Egy S félcsoport A részhalmazát valódi részhalmaznak nevezzük, ha $A \neq \emptyset$ és $A \neq S$.

3.9 Tétel. Ha A egy $S = \mathcal{M}_0(G; I, J; P)$ teljesen 0-egyszerű félcsoport valódi részhalmaza, akkor $\operatorname{Sep} A = \emptyset$ vagy léteznek $I' \subseteq I$ és $J' \subseteq J$ részhalmazok és egy $G' \subseteq G$ részcsoport, hogy $\operatorname{Sep} A = \{(i, h, j) \mid i \in I', j \in J', h \in G'\}$ és $p_{j,i} \in G'$ minden $j \in J'$ és $i \in I'$ esetén.

Bizonyítás. Legyen S egy teljesen 0-egyszerű félcsoport, és ebben A egy olyan valódi részhalmaz, amelyre $\operatorname{Sep} A \neq \emptyset$. Könnyen adódik, hogy $0 \notin \operatorname{Sep} A$. Ebből következik, hogyha $\operatorname{Sep} A \cap H \neq \emptyset$ néhány H-val jelölt $\mathcal{H}$-osztályára S-nek, akkor H (maximális) részcsoport S-ben, mint [8, 9] 2.52b Következményében. A 3.6 Tétel miatt $\operatorname{Sep} A \cap H$ csoport. Így pedig a 3.2 Lemma miatt a tétel igaz. □

3.10 Tétel. Egy S teljesen egyszerű félcsoport A részhalmaza esetén $\operatorname{Sep} A$ vagy üres vagy egy teljesen egyszerű részfélcsoportja S-nek.

Bizonyítás. A 3.9 Tétel alapján világos. □

3.6 Szeparátorok és bitranszlációk

Legyen S egy félcsoport a továbbiakban. Az S-nek egy önmagára vett egyértelmű leképezését az S egy transzformációjának nevezzük.

3.6 Definíció. Az S egy $\lambda(\cdot)$ $[(\cdot)\rho]$ transzformációját bal [jobb] transzlációnak nevezzük, ha minden $x, y \in S$ esetén $\lambda(xy) = (\lambda(x))y$ $[(xy)\rho = x((y)\rho)]$.

3.7 Definíció. Az S egy λ bal és egy ρ jobb transzlációjából definiálható S-nek az $S \times S$-re vett egyértelmű leképezése.

Minden $x \in S$ esetén legyen $(\lambda, \rho)(x) = (\lambda(x), (x)\rho)$. Az így definiált (λ, ρ) leképezések S bitranszlációi.

3.8 Definíció. Az S egy λ bal és egy ρ jobb transzlációját láncoltnak nevezzük, ha minden $x, y \in S$ esetén $x(\lambda(y)) = ((x)\rho)y$. Ebben az esetben (λ, ρ) láncolt bitranszlációja S-nek.

Az $\Omega(S)$ jelöli az S összes láncolt bitranszlációinak halmazát. Ez monoid a következő műveletre nézve:

$$(\lambda_1, \rho_1)(\lambda_2, \rho_2) = (\lambda_1 \circ \lambda_2, \rho_1 \circ \rho_2) \ ,$$

ahol $\lambda_1 \circ \lambda_2$ és $\rho_1 \circ \rho_2$ a következők:

$$\forall x \in S \quad \text{esetén} \quad (\lambda_1 \circ \lambda_2)(x) = \lambda_1(\lambda_2(x)) \quad \text{és} \quad (x)(\rho_1 \circ \rho_2) = ((x)\rho_1)\rho_2 \ .$$

Az $\Omega(S)$ egységeleme (ι, ι), ahol ι az S-en vett identikus transzformáció.

Az $\Omega(S)$ monoidot az S transzlációs burkának nevezzük.

A $\lambda_a(x) = ax$ és az $(x)\rho_a = xa$ módon definiált λ_a bal, míg ρ_a jobb transzláció, valamint (λ_a, ρ_a) láncolt.

3.9 Definíció. Az $\Omega_0(S) = \{(\lambda_a, \rho_a) \mid a \in S\}$ halmazt az $\Omega(S)$ belső részének nevezzük.

3.5 Megjegyzés. $\Omega_0(S)$ ideál az $\Omega(S)$-ben.

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy $\Omega_0(S)$ részfélcsoport az $\Omega(S)$-ben. Könnyen igazolható az ideáltulajdonság, ha belátjuk, hogy minden $(\lambda, \rho) \in \Omega(S)$ és $(\lambda_a, \rho_a) \in \Omega_0(S)$ esetén:

$$(\lambda, \rho)(\lambda_a, \rho_a) = (\lambda_{\lambda(a)}, \rho_{\lambda(a)}) \quad \text{és} \quad (\lambda_a, \rho_a)(\lambda, \rho) = (\lambda_{(a)\rho}, \rho_{(a)\rho}) \ .$$

$\square$

Ismert, hogy a $\Phi_\Omega : a \mapsto (\lambda_a, \rho_a)$ leképezés homomorfizmusa S-nek $\Omega(S)$ belső részére. Ez a homomorfizmus pontosan akkor injektív, ha S gyengén egyszerűsíthető, vagyis minden $a, b \in S$ esetén, ha $ax = bx$ és $xa = xb$ minden $x \in S$ elemre, akkor $a = b$.

Egy S félcsoport A részhalmaza esetén legyen:

$$\Omega_{\mathrm{Sep}\,A}(S) = \{(\lambda, \rho) \in \Omega(S) \mid \lambda(A), (A)\rho \subseteq A, \lambda(\overline{A}), (\overline{A})\rho \subseteq \overline{A}\} \ .$$

Igazak a következők S minden A részhalmazára:

- $\Omega(S)$ monoid, ezért $\Omega_{\mathrm{Sep}\,A}(S)$ nem üres;
- $\Omega_{\mathrm{Sep}\,A}(S)$ részmonoidja $\Omega(S)$-nek;
- $\Omega_{\mathrm{Sep}\,A}(S) = \Omega_{\mathrm{Sep}\,\overline{A}}(S)$;
- $\Omega_{\mathrm{Sep}\,\emptyset}(S) = \Omega_{\mathrm{Sep}\,S}(S) = \Omega(S)$;
- $\mathrm{Sep}\,A = \{x \in S \mid \Phi_\Omega(x) = (\lambda_x, \rho_x) \in \Omega_{\mathrm{Sep}\,A}(S)\}$.

A következő részben olyan S félcsoportokkal foglalkozunk, amely kielégíti a következő megjegyzésekben leírt feltételek egyikét.

3.6 Megjegyzés. Mondjuk azt, hogy S félcsoport teljesíti az I-feltételt, ha az S minden valódi A részhalmazára $\Omega_0(S) \cap \Omega_{\mathrm{Sep}\,A}(S) = \emptyset$.

Ez ekvivalens a következővel:

$\mathrm{Sep}\,A = \emptyset$ az S összes A valódi részhalmazára.

3.7 Megjegyzés. Mondjuk azt, hogy S félcsoport teljesíti a II-feltételt, ha az S minden A részfélcsoportjára $\Phi_\Omega(A) \cap \Omega_{\mathrm{Sep}\, A}(S) \neq \emptyset$.

Ez ekvivalens a következővel az 1.3 Tétel alapján:
$\emptyset \subset \mathrm{Sep}\, A \subseteq A$ az S összes A részfélcsoportjára.

3.10 Definíció. Egy S félcsoportot arkhimédeszi félcsoportnak nevezünk, ha:

$$\forall a, b \in S \quad \text{esetén} \quad \exists n, m \in \mathbb{Z}^+ \text{ ,hogy } a^n \in S^1 b S^1 \quad \text{és} \quad b^m \in S^1 a S^1 \ .$$

Ismert, hogy minden félcsoport félháló-felbonthatatlan félcsoportok félhálója. Az arkhimédeszi félcsoportok pedig félháló-felbonthatatlanok.

3.11 Definíció. Egy S félcsoport a eleme esetén jelölje S_a a következő részhalmazt:

$$S_a = \{ b \in S \mid \exists i, j, k \in \mathbb{Z}^+ \text{ ,hogy } a^i b a^j = a^k \}$$

Ez a részhalmaz fontos szerepet játszik az idempotens elemet nem tartalmazó arkhimédeszi félcsoportok vizsgálatában. Például a [14] 1.42 Tételében. A következő lemma egy egyszerű eredmény az S_a részhalmazról.

3.3 Lemma. Egy S félcsoport bármely a eleme esetén $a \in \mathrm{Sep}\, S_a$.

Bizonyítás. Legyen $a \in S$, míg $b \in S_a$ tetszőlegesek. Világos, hogy $a \in S_a$. Feltehetjük, hogy $a^i b a^j = a^k$ úgy, hogy $i, j > 1$. Ekkor

$$a^k = a^{i-1}(ab)a^j = a^i(ba)a^{j-1} \ .$$

Vagyis $ab, ba \in S_a$, tehát $a \in \mathrm{Id}\, S_a$.

Most legyen $c \in \overline{S_a}$ tetszőleges. Ha $ac \in S_a$ igaz, akkor létezik $k, m, n \in \mathbb{Z}^+$, amelyre

$$a^n = a^k(ac)a^m = a^{k+1}ca^m \ .$$

Vagyis $c \in S_a$ lenne igaz, ami ellentmondás. Tehát $ac \in \overline{S_a}$, és hasonlóan $ca \in \overline{S_a}$, amiből pedig $a \in \mathrm{Id}\, \overline{S_a}$.

Következésképp $a \in \mathrm{Sep}\, S_a$. □

Az I-feltételnek megfelelő félcsoportok

3.12 Definíció. Egy S félcsoportot derékszögű kötegnek nevezünk, ha minden eleme idempotens és $axa = a$ minden $a, x \in S$ esetén.

3.13 Definíció. Egy nullelemes S félcsoportot nil félcsoportnak nevezünk, ha minden $a \in S$ esetén létezik egy n pozitív egész, hogy $a^n = 0$.

3.11 Tétel. Egy tetszőleges S félcsoport esetén a következő feltételek ekvivalensek:

1. S minden valódi A részhalmazára $\Omega_0(S) \cap \Omega_{\mathrm{Sep}\, A}(S) = \emptyset$;
2. S minden valódi A részhalmazára $\mathrm{Sep}\, A = \emptyset$;
3. S minden valódi A részhalmaza szeparátor-kizáró;
4. $S \times S$ minden (a, b) párja esetén létezik $i, j, k \in \mathbb{Z}^+$, hogy $a^i b a^j = a^k$;
5. S egy derékszögű köteg nil félcsoporttal való ideálbővítése.

Bizonyítás. 1. $\Leftrightarrow$ 2.: Ez a definíciók alapján nyilvánvaló.

2. $\Rightarrow$ 3.: Tegyük fel, hogy a 2. pont teljesül egy S félcsoportra. Indirekt tegyük fel, hogy A az S-nek olyan valódi részhalmaza, hogy A nem szeparátor-kizáró. Ekkor $\mathrm{Sep}\, A \neq \emptyset$, ami ellentmond a 2. pontnak.

3. $\Rightarrow$ 4.: Tegyük fel, hogy a 3. pont teljesül egy S félcsoportban. Legyen $a \in S$ tetszőleges elem. A 3.3 Lemma és az 1.3 Tétel alapján S_a szeparátor-tartalmazó. Ekkor a 3. pont miatt $S_a = S$, amiből a 4. pont a definícióból adódóan teljesül.

4. $\Rightarrow$ 5.: Tegyük fel, hogy a 4. pont teljesül egy S félcsoportban. Ekkor minden $a \in S$ esetén léteznek i, j, k pozitív egészek, hogy

$$a^{2k} = (a^2)^k = (a^2)^i a (a^2)^j = a^{2(i+j)+1} .$$

A bal oldalon a kitevője páros, míg a jobb oldalon páratlan. Ebből az következik, hogy az a elem rendje véges, vagyis az S félcsoport periodikus. Emiatt S-nek van legalább egy idempotens eleme. Jelölje E az S összes idempotens elemeinek halmazát, s ebből legyen $e \in E$ tetszőleges. A 4. pont teljesülése miatt minden $b \in S$ elemre $ebe = e$, amelyből $(eb)^2 = eb$ és $(be)^2 = be$. Vagyis $ES, SE \subseteq E$ teljesül, ami azt jelenti, hogy E ideál S-ben. Mivel S periodikus, ezért az E ideál által meghatározott S/E Rees-faktorfélcsoport nil félcsoport. A 4. pont miatt minden $e, f \in E$ esetén $efe = e$, és így E derékszögű köteg, vagyis az 5. pont teljesül.

5. $\Rightarrow$ 2.: Tegyük fel, hogy az 5. pont teljesül egy S félcsoportban. Ekkor az S idempotens elemeit tartalmazó E halmaz derékszögű köteg, ideálja S-nek, és minden $a \in S$ elemre létezik egy n pozitív egész, hogy $a^n \in E$. Indirekt tegyük fel, hogy létezik valódi A részhalmaza S-nek, amelyre $\mathrm{Sep}\, A \neq \emptyset$. Ekkor az 1.3 Tétel miatt A vagy $\overline{A}$ szeparátor-tartalmazó részhalmaz. Amelyik a kettő közül a szeparátor-tartalmazó lesz, azt jelölje B. Tehát B egy valódi részhalmaz S-ben, amelyre $\emptyset \neq \mathrm{Sep}\, B \subseteq B$. Mivel $\mathrm{Sep}\, B$ részfélcsoport S-ben, ezért minden $x \in \mathrm{Sep}\, B$ esetén létezik egy n pozitív egész, hogy $x^n \in \mathrm{Sep}\, B \cap E$, és így $\mathrm{Sep}\, B \cap E \neq \emptyset$. Felhasználva, hogy E derékszögű köteg, egy tetszőleges $f \in E$ esetén $efe = e \in \mathrm{Sep}\, B \subseteq B$, amiből $f \in B$ következik. Ennélfogva $E \subseteq B$.

Végül legyen $s \in S$ tetszőleges. Ekkor $es \in E \subseteq B$, amiből $s \in B$, mivel $e \in \operatorname{Sep} B$. Ebből $B = S$ ellentmondás következik, és így S teljesíti a 2. pontot. □

3.1 Következmény. Egy derékszögű köteg bármely valódi részhalmazának szeparátora üres.

Bizonyítás. A 3.11 Tétel alapján nyilvánvaló. □

Az iménti következmény mutatja, hogy a derékszögű köteg példa egy olyan teljesen reguláris, teljesen egyszerű Clifford-félcsoportra, amelyben minden valódi részhalmaz szeparátora üres.

A II-feltételnek megfelelő félcsoportok

3.12 Tétel. Egy tetszőleges S félcsoport esetén a következő feltételek ekvivalensek:

1. S minden A részfélcsoportjára $\Phi_\Omega(A) \cap \Omega_{\operatorname{Sep} A}(S) \neq \emptyset$;
2. S minden A részfélcsoportjára $\emptyset \subset \operatorname{Sep} A \subseteq A$;
3. S egy periodikus csoport;
4. S minden részfélcsoportja unitér;
5. S minden A részfélcsoportjára $A = \operatorname{Sep} A$;
6. S minden A részfélcsoportjára létezik S-nek egy K részhalmaza, amelyre $A = \operatorname{Sep} K$.

Bizonyítás. 1. ⇔ 2.: Ez a definíciók alapján nyilvánvaló.

2. ⇒ 3.: Tegyük fel, hogy a 2. pont teljesül egy S félcsoportban. Legyen R egy jobboldali ideál S-ben. Ekkor létezik egy K részhalmaza S-nek, hogy $R = \operatorname{Sep} K$. Tehát $RK \subseteq R$ és $RK \subseteq K$, vagyis $K \cap \operatorname{Sep} K \neq \emptyset$. Az 1.3 Tétel miatt $R \subseteq K$, amiből $K = S$. Ennélfogva $R = \operatorname{Sep} K = \operatorname{Sep} S = S$, vagyis S jobbegyszerű félcsoport. Hasonlóan igazolható, hogy S balegyszerű is. A két tulajdonságból pedig az következik, hogy S csoport. Most legyen $a \in S$ tetszőleges. Vizsgáljuk az a által generált $\langle a \rangle$ ciklikus részfélcsoportot és az $A = \{a^2, a^3, \ldots\}$ részfélcsoportot S-ben. A 2. pont szerint $\emptyset \subset \operatorname{Sep} A \subseteq A$, és így létezik egy $n \geq 2$ egész, hogy $a^n \in \operatorname{Sep} A$. Ekkor

$$\langle a \rangle \ni a^{n+1} \notin A$$

teljesül, és így $a^{n+1} = a$, vagyis a véges rendű. Következésképp S periodikus csoport, a 3. pont igaz.

3. ⇒ 4.: Mivel egy periodikus G csoport minden részfélcsoportja részcsoport, ennél fogva unitér is G-ben, vagyis teljesül a 4. pont.

4. $\Rightarrow$ 5.: Az 1.8 Tétel miatt következik az 5. pont.

5. $\Rightarrow$ 6.: K legyen mindig egyenlő az A-val, így nyilvánvalóan igaz lesz a 6. pont.

6. $\Rightarrow$ 2.: Tegyük fel, hogy a 6. pont teljesül egy S félcsoportban. Legyen A egy valódi részfélcsoportja S-nek. Tehát létezik egy $K \subseteq S$ részhalmaz, amelyre $\operatorname{Sep} K = A$. Az 1.7 Tétel alapján $\operatorname{Sep}\operatorname{Sep} K \subseteq \operatorname{Sep} K$, vagyis $\operatorname{Sep} A \subseteq A$, és így a 2. pont teljesül. □

3.7 Permutatív félcsoportok részhalmazának szeparátora

Ebben a részben felhasználunk több eredményt a félcsoportok kommutatív monoid-kongruenciáit taglaló fejezetből. Ebben szerepelt már a 2.3 Definícióban a permutatív és a a 2.2 Definícióban a reflexív félcsoport fogalma.

Egy S félcsoport esetén a reflexív unitér részfélcsoportok fontos szerepet játszanak S csoport- vagy nullelemes csoport-kongruenciáinak leírásában. Például a [14] 1.41 Tétele szerint, ha H egy reflexív unitér részfélcsoport egy S félcsoportban, akkor S/P_H csoport vagy nullelemes csoport, ahol P_H a már korábban definiált főkongruencia. Erre az eredményre többször is szükségünk lesz a továbbiakban.

Már beláttuk a 2.6 Tételben, hogy hogyan állíthatjuk elő egy permutatív félcsoport monoid-kongruenciáit. Vegyünk az említett tételnek megfelelően S-ben egy $\{A_i, i \in I\}$ részhalmazcsaládot, amelyre tehát $A = \cap_{i\in I} \operatorname{Sep} A_i$ nem üres.

Mivel A nem üres, ezért $\operatorname{Sep} A_i \neq \emptyset$, így a 2.4 Következmény miatt $\operatorname{Sep} A_i$ reflexív unitér részfélcsoport S-ben minden $i \in I$ esetén. Tehát A is az, emiatt pedig a P_A főkongruenciája S-nek egy csoport- vagy egy nullelemes csoport-kongruencia.

3.13 Tétel. Egy S permutatív félcsoport esetén a következő feltételek ekvivalensek:

1. S-nek nincs nemtriviális homomorf képe, ami csoport vagy nullelemes csoport;
2. S minden valódi részhalmazának üres a szeparátora;
3. S minden valódi részrészfélcsoportjának üres a szeparátora;
4. S-nek nincs nemtriviális homomorf képe, ami monoid.

Az iménti tétel második pontjával a 3.11 Tétel szerint ekvivalens, hogy S egy derékszögű köteg nil félcsoporttal való ideálbővítése.

Bizonyítás. 1. $\Leftrightarrow$ 2.: Ha A egy valódi részhalmaza az S permutatív félcsoportnak, amelyre $\operatorname{Sep} A \neq \emptyset$, akkor a 2.4 Következmény alapján $\operatorname{Sep} A$ reflexív unitér részfélcsoport S-ben. Mivel az 1.3 Tétel miatt $\operatorname{Sep} A \subseteq A$ vagy $\operatorname{Sep} A \subseteq \overline{A}$, ezért $S \neq \operatorname{Sep} A$, mert A valódi részhalmaz.

Következésképp a $P_{\operatorname{Sep} A}$ főkongruenciája S-nek nemtriviális csoport- vagy nullelemes csoport-kongruencia.

2. $\Leftrightarrow$ 3.: Nyilvánvaló.

3. $\Leftrightarrow$ 4.: Legyen S egy permutatív félcsoport, amelynek minden valódi részrészfélcsoportjának üres a szeparátora. Ha S-nek lenne nemtriviális homomorf képe, ami monoid, akkor a 2.6 Tétel és a 2.4 Következmény miatt létezne egy $A \neq S$ részfélcsoport, amelyre $A = \operatorname{Sep} A$, ami ellentmondás.

4. $\Leftrightarrow$ 1.: Nyilvánvaló. □

3.14 Definíció. Egy S félcsoportot Putcha-félcsoportnak nevezünk, ha :

$$\forall a, b \in S \quad \text{esetén} \quad b \in S^1 a S^1 \quad \Rightarrow \quad \exists m \in \mathbb{Z}^+ \text{ , hogy } b^m \in S^1 a^2 S^1 \ .$$

Ismert, hogy egy permutatív félcsoport Putcha-félcsoport is, ami pedig arkhimédeszi félcsoportok félhálója, ezt például [10] is leírja. Belátható, hogy egy arkhimédeszi félcsoportnak nincs homomorf képe, ami nullemes csoport. A 3.13 Tétel miatt pedig egy arkhimédeszi permutatív félcsoportnak pontosan akkor nincs nemtriviális homomorf képe, ami csoport, ha egy derékszögű köteg nil félcsoporttal való ideálbővítése, és így van idempotens eleme.

3.2 Következmény. [15]
Egy arkhimédeszi permutatív félcsoportnak, amelynek nincs idempotens eleme, annak van nemtriviális homomorf képe, ami csoport.

Korábban már volt szó az S félcsoport egy a eleme által generált, a 3.11 Definícióban bevezetett S_a részhalmazáról.

3.4 Lemma. [15]
Ha S egy permutatív félcsoport, akkor minden $a \in S$ esetén S_a egy reflexív unitér részfélcsoportja S-nek.

3.14 Tétel. Egy permutatív félcsoportnak, amelynek nincs idempotens eleme, annak van nemtriviális homomorf képe, ami csoport vagy nullelemes csoport.

Bizonyítás. Legyen S egy permutatív félcsoport, amelyben nincs idempotens elem. Legyen $a \in S$ olyan, hogy $a \in S_{a^2}$. Ekkor léteznek i, j, k pozitív egészek, amelyekre $a^{2i} a a^{2j} = a^{2k}$, vagyis $a^{2(i+j)+1} = a^{2k}$. A kitevő a bal oldalon páratlan, míg a jobb oldalon pozitív, tehát a rendje véges, és így S-nek van idempotens eleme. Ez egy ellentmondás, vagyis $a \notin S_{a^2}$, s ezért minden $a \in S$ elemre $S_{a^2} \neq S$.

A 3.4 Lemma alapján S_{a^2} valódi reflexív unitér részfélcsoport S-ben. Következésképp az S/S_{a^2} faktorfélcsoport nemtriviális csoport vagy nullelemes csoport. □

3.15 Tétel. Ha S egy végesen generált permutatív félcsoport, akkor S vagy véges vagy van neki nemtriviális homomorf képe, ami csoport vagy nullelemes csoport.

Így minden végtelen, de végesen generált permutatív félcsoportnak van nemtriviális homomorf képe, ami csoport vagy nullelemes csoport.

Bizonyítás. Legyen S egy végesen generált permutatív félcsoport. Tegyük fel, hogy $S_a = S$ minden $a \in S$ elemre. Ekkor $a \in S_{a^2}$, és így a véges rendű minden $a \in S$ esetén. Tehát S egy végesen generált permutatív periodikus félcsoport. A [14] 1.1 Tétele vagy [16] alapján S véges.

Ha létezik $a \in S$ elem, amelyre $S_a \neq S$, akkor a 3.4 Lemma miatt S_a valódi reflexív unitér részfélcsoport S-ben, és így az S/S_a faktorfélcsoport nemtriviális csoport vagy nullelemes csoport. □

3.3 Következmény. Ha egy végesen generált permutatív S félcsoportnak nincs nemtriviáis homomorf képe, ami csoport vagy nullelemes csoport, vagy ekvivalens módon $\operatorname{Sep} A = \emptyset$ minden valódi A részhalmazára S-nek, akkor S véges.

Bizonyítás. A 3.15 Tétel alapján nyilvánvaló. □

3.4 Következmény. Ha egy végesen generált permutatív félcsoportnak nincs valódi unitér részfélcsoportja, akkor a félcsoport véges.

Bizonyítás. A 2.4 Következményt és a 3.13 Tételt felhasználva kapjuk, hogy egy permutatív S félcsoportnak pontosan akkor nincs nemtriviális homomorf képe, ami csoport vagy nullelemes ccsoport, ha S-nek nincs valódi unitér részfélcsoportja. Így az állítás adódik a 3.3 Következményből. □

4. fejezet

Szeparátor a Gauss-gyűrű multiplikatív félcsoportjában

Ebben a fejezetben Nagy Attila Separators of Ideals in Multiplicative Semigroups of Unique Factorization Domains című cikkében közölt eredményeket ismertetjük ([5]). Foglalkozunk kommutatív félcsoport ideál által definiált főkongruenciája szerinti faktorfélcsoportjával. Ehhez definiálunk egyszerűsítésként egy többször használt gyűjtőfeltételt. Ezután Gauss-gyűrűk multiplikatív félcsoportján vizsgálunk speciális oszthatósággal kapcsolatos kongruenciákat, és kimondunk egy összefüggést nem asszociált osztók számára a Gauss-gyűrűben. Végül egy speciális számelméleti alkalmazással fejezzük be a fejezetet.

4.1 Bevezetés

Legyen S egy nullelemes kommutatív félcsoport. Az S minden s eleme esetén definiáljuk az $A(s)$ annihilátor részhalmazt a következőképp:

$$A(s) = \{x \in S \mid xs = 0\} \ .$$

Az annihilátor ideál S-ben.

Egy $s \in S$ elemet torziós elemnek nevezünk, ha $A(s) \neq \{0\}$. Jelölje S_T az S torziós elemeinek halmazát.

4.1 Lemma. Ha S egy nullelemes kommutatív félcsoport, amelyre $|S| \geq 2$, akkor S_T ideál az S-ben.

Bizonyítás. Legyen S egy nullelemes kommutatív félcsoport, amelyre $|S| \geq 2$. Ekkor $0 \in S_T$. Ha $a \in S_T$, akkor létezik egy $b \neq 0$ elem S S-ben, amelyre $b \in A(a)$. Így egy tetszőleges $s \in S$ elemre $(sa)b = s(ab) = s0 = 0$, amiből $0 \neq b \in A(sa)$ következik, vagyis $sa \in S_T$. $\square$

4.1 Definíció. A továbbiakban akkor mondjuk, hogy az S félcsoport kielégíti a ★-feltételt, ha igazak rá a következők:

1. S nullelemes kommutatív monoid;
2. S minden nem-egység eleme torziós elem;
3. $\forall s, t \in S$ esetén $A(s) = A(t) \Rightarrow s = t$.

4.1 Megjegyzés. Az egyetlen elemet, jelöljük ezt e-vel, tartalmazó $S = \{e\}$ félcsoport teljesíti a ★-feltételt, mivel e itt egyszerre egységelem és nullelem, és S-nek nincs nem-egység eleme.

4.1 Példa. Legyen $S = \{0, 1, 2\}$ egy félcsoport a következő Cayley-művelettáblával:

$\bullet$	1	2	0
1	1	2	0
2	2	0	0
0	0	0	0

Ez a félcsoport egy nullelemes kommutatív monoid, amelyben 0 a null-, míg 1 az egységelem. Az annihilátor definíciója alapján:

- $A(0) = \{1, 2, 0\}$,
- $A(1) = \{0\}$,
- $A(2) = \{2, 0\}$.

Következésképp S kielégíti a ★-feltételt.

A természetes kvázi-rendezést (reflexív, tranzitív, de nem feltétlen antiszimmetrikus) egy S monoid esetén az oszthatóság által meghatározott reláció adja meg: $a \leq b$ valamilyen $a, b \in S$ esetén, ha $bS \subseteq aS$. Ha ez a kvázi-rendezés részbenrendezés S-en, akkor természetes részbenrendezésről beszélünk, s azt mondjuk, hogy S természetesen részbenrendezett monoid. Egy ilyen monoidban az 1-gyel jelölt egységelem az egyetlen invertálható elem, ami azt jelenti, hogy: $\forall a, b \in S$ esetén $ab = 1 \Leftrightarrow a = 1$ és $b = 1$, tehát az egységcsoport egyelemű.

4.2 Lemma. Minden félcsoport, ami teljesíti a ★-feltételt, az természetesen részbenrendezett monoid.

Bizonyítás. Legyen S egy félcsoport, ami kielégíti a ★-feltételt. Tegyük fel, hogy $a \leq b$ és $b \leq a$ valamilyen $a, b \in S$ esetén. Ekkor $Sa = Sb$, vagyis léteznek $x, y \in S$ elemek, hogy $a = xb$ és $b = ya$. Legyen $s \in A(a)$ tetszőleges. Ekkor $bs = (ya)s = y(as) = y0 = 0$, tehát $s \in A(b)$. Vagyis $A(a) \subseteq A(b)$. Hasonlóan következik, hogy $A(b) \subseteq A(a)$, és így $A(a) = A(b)$. Mivel S teljesíti a ★-feltételt, ezért $a = b$, ami azt jelenti, hogy a $\leq$ reláció antiszimmetrikus is. Következésképp $\leq$ részbenrendezés, az S pedig természetesen részbenrendezett monoid. $\square$

4.2 Kommutatív félcsoportok

4.1 Tétel. Legyen S egy kommutatív félcsoport. Ha I egy ideálja S-nek úgy, hogy $\mathrm{Sep}\, I \neq \emptyset$, akkor a következők igazak:

1. P_I kongruencia S-en;
2. I és $\mathrm{Sep}\, I$ az S-ben P_I-osztályok;
3. S/P_I teljesíti a $\bigstar$-feltételt.

Megfordítva pedig, ha α kongruencia egy S kommutatív félcsoporton, akkor az S/α faktorfélcsoport kielégíti a $\bigstar$-feltételt és létezik egy I ideálja S-nek, hogy $\alpha = P_I$.

Bizonyítás. Legyen S egy kommutatív félcsoport, amelyben I egy ideál, amelyre $\mathrm{Sep}\, I \neq \emptyset$.

Ha $I = S$, akkor $\mathrm{Sep}\, I = S$ és P_I az univerzális reláció S-en. Ebben az esetben I és $\mathrm{Sep}\, I$ nyilvánvalóan P_I-osztályok, és az S/P_I faktorfélcsoport egy egyelemű félcsoport, ami a 4.1 Megjegyzés szerint teljesíti a $\bigstar$-feltételt.

Most nézzük azt az esetet, amikor $I \neq S$. Ekkor az 1.3 Megjegyzés alapján $I \cap \mathrm{Sep}\, I = \emptyset$. A 2.2 és a 2.3 Tételek alapján P_I kongruencia S-en, amelyre $\mathrm{Sep}\, I$ az S/P_I faktorfélcsoport egységeleme, és I előáll P_I-osztályok uniójaként. Mivel $I \ldots a = S \times S$ minden $a \in I$ esetén, ezért az I egy P_I-osztály S-en, mégpedig az S/P_I faktorfélcsoport nulleleme. Következésképp S/P_I egy nullelemes kommutatív monoid.

Tetszőleges $x \in S$ elemre jelölje $[x]_I$ azt az S-beli P_I-osztályt, amely tartalmazza x-et. Ha $[s]_I$ egy nem-egység elem az S/P_I-ben, akkor $s \in S \setminus \mathrm{Sep}\, I$. Mivel $s \in S = \mathrm{Id}\, I$, ezért $s \notin \mathrm{Id}\, \overline{I}$, hiszen $s \notin \mathrm{Sep}\, i$. Tehát létezik egy $b \in \overline{I}$ elem, amelyre $sb \in I$. Ekkor $[b]_I$ egy nem-nulla elem az S/P_I-ben, hiszen $b \notin I$, és $[s]_I[b]_I$ viszont az S/P_I nulleleme. Emiatt $[b]_I \in A([s]_I)$, vagyis $[s]_I \in (S/P_I)_T$. Következésképp S/P_I minden eleme torziós elem.

Tegyük fel, hogy $[a]_I \neq [b]_I$ valamely $a, b \in S$ esetén. Ez azt jelenti, hogy $(a, b) \notin P_I$, amiből $I \ldots a \neq I \ldots b$. Eszerint létezik egy $(x, y) \in S \times S$, amelyre vagy $(x, y) \in I \ldots a$ és $(x, y) \notin I \ldots b$, vagy $(x, y) \in I \ldots b$ és $(x, y) \notin I \ldots a$ lesz az igaz.

Nézzük az előbbi esetet:

$$(x, y) \in I \ldots a \quad \text{és} \quad (x, y) \notin I \ldots b \; .$$

Vagyis

$$xay \in I \quad \text{és} \quad xby \notin I \; ,$$

amiből

$$axy \in I \quad \text{és} \quad bxy \notin I \; ,$$

és így az S/P_I faktorfélcsoportban

$$[a]_I[xy]_I = 0 \quad \text{és} \quad [b]_I[xy]_I \neq 0 \ .$$

Következésképp $[xy]_I \in A([a]_I)$ és $[xy]_I \notin A([b]_I)$, tehát $A([a]_I) \neq A([b]_I)$. Hasonlóan adódik, hogy $A([a]_I) \neq A([b]_I)$ az $(x,y) \in I \ldots b$ és $(x,y) \notin I \ldots a$ esetben. Mivel mindkét esetben $A([a]_I) \neq A([b]_I)$, ezért az $A([a]_I) = A([b]_I) \Rightarrow [a]_I = [b]_I$ teljesül minden $a, b \in S$ esetén.

Az eddigi eredmények azt mutatják, hogy S/P_I teljesíti a $\bigstar$-feltételt.

Hogy belássuk a megfordítást, legyen α egy olyan kongruencia az S félcsoporton, amelyre az S/α faktorfélcsoport teljesíti a $\bigstar$-feltételt. Jelölje I azt az α-osztályt S-ben, amelyik a nullelem az S/α-ban; míg H azt, amelyik az egységelem ugyanitt. Világos, hogy I ideál S-ben.

Belátjuk, hogy $\operatorname{Sep} I = H$. Tetszőleges $x \in S$ elemre jelölje $[x]_\alpha$ azt az S-beli α-osztályt, amely tartalmazza x-et. Mivel H az egységeleme S/α-nak, ezért minden $x \in S$-re $H[x]_\alpha \subseteq [x]_\alpha$, vagyis $H \subseteq \operatorname{Sep} I$. Legyen $a \notin H$ tetszőleges S-beli elem. Ekkor $[a]_\alpha$ nyilván nem az S/α egységeleme, és így $A([a]_\alpha) \neq \{0\}$, mert torziós elem a $\bigstar$-feltétel miatt. Emiatt létezik $b \notin I$ az S-ben, hogy $[a]_\alpha[b]_\alpha \subseteq I$, és így $ab \in I$. Következésképp $a \notin \operatorname{Id} \overline{I}$, ezért $a \notin \operatorname{Sep} I$ tetszőleges $a \notin H$ elemre, vagyis $H = \operatorname{Sep} I$.

Most megmutatjuk, hogy $\alpha = P_I$. Tegyük fel, hogy $(a,b) \in \alpha$ valamilyen $a, b \in S$ esetén. Ekkor a kongruencia definíciójából létezik minden $x, y \in S$ esetén egy $c \in S$ elem, hogy $xay, xby \in [c]_\alpha$.

Mivel I egy α-osztály S-ben, ezért $xay \in I \Leftrightarrow xby \in I$. Vagyis $I \ldots a = I \ldots b$, ami éppen azt jelenti, hogy $(a,b) \in P_I$, és így $\alpha \subseteq P_I$.

Hogy megmutassuk a $P_I \subseteq \alpha$ tartalmazást is, legyen $(a,b) \in P_I$ valamilyen $a, b \in S$ esetén. Tegyük fel indirekt módon, hogy $(a,b) \notin \alpha$. Ekkor $[a]_\alpha \neq [b]_\alpha$, amiből $A([a]_\alpha) \neq A([b]_\alpha)$, mivel az S/α faktorfélcsoport teljesíti a $\bigstar$-feltételt. Vagyis létezik egy $[x]_\alpha \in S/\alpha$, amelyre vagy $[a]_\alpha[x]_\alpha \subseteq I$ és $[b]_\alpha[x]_\alpha \subseteq \overline{I}$, vagy $[a]_\alpha[x]_\alpha \subseteq \overline{I}$ és $[b]_\alpha[x]_\alpha \subseteq I$.

Nézzük az előbbi esetet:

$$[a]_\alpha[x]_\alpha \subseteq I \quad \text{és} \quad [b]_\alpha[x]_\alpha \subseteq \overline{I} \ .$$

Ekkor

$$ax \in I \quad \text{és} \quad bx \notin I \ ,$$

és így egy tetszőleges $h \in H = \operatorname{Sep} I$ esetén

$$hax \in I \quad \text{és} \quad hbx \notin I \ ,$$

amiből
$$(h,x) \in I \dots a \quad \text{és} \quad (h,x) \notin I \dots b\ .$$

Következésképp $I \dots a \neq I \dots b$. Ugyanehhez az eredményhez jutunk a másik esetben, tehát $(a,b) \notin P_I$, ami ellentmondás. Vagyis $P_I \subseteq \alpha$ tartalmazás is teljesül, és így $\alpha = P_I$. □

4.2 Megjegyzés. Legyen S egy nullelemes kommutatív félcsoport, amelyben a nemnulla elemek részfélcsoportot alkotnak, és ezt S^*-gal jelöljük. S egy $I \neq \{0\}$ ideáljára legyen $I^* = I \setminus \{0\}$. Ekkor:

1. I^* ideál S^*-ban;
2. P_I megszorítása S^*-ra megegyezik P_{I^*} kongruenciával.

P_I az S I ideálja által, míg P_{I^*} az S^* I^* ideálja által definiált főkongruenciája. Mivel I egy P_I-osztály és I^* egy P_{I^*}-osztály a 4.1 Tétel miatt, ezért $S/P_I \cong S^*/P_{I^*}$.

4.2 Tétel. Egy S kommutatív félcsoport M maximális ideáljára a következők ekvivalensek:

1. M prímideál;
2. $\operatorname{Sep} M \neq \emptyset$
3. az S/P_M faktorfélcsoport kételemű nullelemes monoid.

Bizonyítás. 1. ⇒ 2.: Legyen M egy prímideál S-ben. Ekkor az 1.9 Tétel szerint $\overline{M}$ unitér részfélcsoport, amire az 1.8 Tétel alapján $\operatorname{Sep}\overline{M} = \overline{M}$ az igaz. Vagyis felhasználva még az 1.1 Megjegyzést $\operatorname{Sep} M = \operatorname{Sep}\overline{M} = \overline{M} \neq \emptyset$.

2. ⇒ 1.: Legyen M egy maximális ideál S-ben, amelyre $\operatorname{Sep} M \neq \emptyset$. Tegyük fel, hogy $AB \subseteq M$ valamilyen $A \nsubseteq M$, $B \nsubseteq M$ ideáljaira S-nek. Mivel M maximális ideál S-ben, valamint $M \cup A$ és $M \cup B$ is ideálok S-ben, ezért $M \cup A = S$ és $M \cup B = S$. Így $\overline{M} \subseteq A$ és $\overline{M} \subseteq B$. Mivel $\operatorname{Sep} M \subseteq \overline{M}$ hiszen M ideál, ezért $\operatorname{Sep} M \subseteq A$ és $\operatorname{Sep} M \subseteq B$. Ekkor tetszőleges $x, y \in \operatorname{Sep} M$ elempárra $xy \in AB \subseteq M$. Ez ellentmondás, mert $\operatorname{Sep} M$ részfélcsoport S-ben, ennélfogva $xy \in \operatorname{Sep} M \subseteq \overline{M}$. Következésképp S minden A és B ideáljára $AB \subseteq M \Rightarrow A \subseteq M$ vagy $B \subseteq M$. Így M prímideál, mert az S kommutatív félcsoport.

1. ⇒ 3.: Legyen M egy prímideál S-ben. Ekkor a prímideál definíciójából világos, hogy $\overline{M}$ részfélcsoport S-ben. Felhasználva az 1.1 Megjegyzést, az 1.8 Tételt és az 1.9 Tételt kapjuk, hogy $\operatorname{Sep} M = \operatorname{Sep}\overline{M} = \overline{M}$. Így a 4.1 Tétel alapján a P_M kongruenciának két kongruencia-osztálya van, és emiatt az S/P_M faktorfélcsoport egy kételemű nullelemes monoid.

3. $\Rightarrow$ 1.: Tegyük fel, hogy az S/P_M faktorfélcsoport egy kételemű nullelemes monoid. Legyen $c \in \overline{M}$ olyan elem, amelyre $M \ldots c = S \times S$. Az S kommutativitásából látszik, hogy $K = \{s \in S \mid M \ldots s = S \times S\}$ halmaz ideál S-ben. $M \subset K$, mert $c \in K$, de $c \notin M$. Emiatt $K = S$, mivel M maximális ideál S-ben. Eszerint P_M az univerzális reláció S-en. Ez ellentmondás, mert ekkor S/P_M egyelemű. Ebből az következik, hogy minden $c \in \overline{M}$ esetén $M \ldots c \neq S \times S$. Viszont $M \ldots s = S \times S$ minden $s \in M$ esetén, tehát M egy P_M-osztály S-en. Mivel S/P_M egy kételemű nullelemes monoid, így $\overline{M}$ részfélcsoport lesz a faktorfélcsoport egységeleme. Ekkor $\operatorname{Sep} \overline{M} = \overline{M}$, tehát az 1.8 Tétel és az 1.9 Tétel miatt M prímideál S-ben. □

4.3 Gauss-gyűrű multiplikatív félcsoportjai

Legyen D egy egységelemes integritási tartomány. Jelölje e ennek az egységelemét és D_{mult} a multiplikatív félcsoportját. Ekkor D_{mult} egy kommutatív monoid, és így egyik ideáljának szeparátora sem üres. Bármely $a, b \in D$ elem esetén $a \sim b$ jelentse, hogy az a és b asszociált elemek. Ismert, hogy $\sim$ ekvivalencia-reláció D-n. Belátható, hogy $\sim$ kongruencia-reláció D_{mult}-on és $D' = D_{mult}/\sim$ kommutatív monoid, melynek az egységeleme $[e]_\sim$. ($[x]_\sim$ jelöli azt a D_{mult}-beli $\sim$-osztályt, amely tartalmazza x-et.) $[e]_\sim$ az egyetlen egység (invertálható elem) és $[0]_\sim$ az egyetlen nullosztó D'-ben.

4.3 Lemma. Legyen D egy egységelemes integritástartomány. Ekkor D_{mult} bármely I ideálja esetén $\sim \subseteq P_I$.

Bizonyítás. Legyen $a, b \in D$ olyan elempár, amelyre $a \sim b$. Ekkor léteznek olyan $\epsilon, \epsilon' \in D$ egységek, hogy $a = \epsilon b$ és $b = \epsilon' a$. Tegyük fel, hogy $xay \in I$ valamilyen $x, y \in D$ esetén. Ekkor $xby = x\epsilon' ay = \epsilon' xay \in I$.

Hasonlóan tejesül $xby \in I \Rightarrow xay = \epsilon xby \in I$. Következésképp $I \ldots a = I \ldots B$, és így $(a, b) \in P_I$, vagyis $\sim \subseteq P_I$. □

4.4 Lemma. Legyen D egy egységelemes integritástartomány és ϕ a kanonikus homomorfizmusa D_{mult}-nak $D' = D_{mult}/\sim$-re. Ekkor D_{mult} bármely I ideálja esetén $\phi(\operatorname{Sep} I) = \operatorname{Sep} \phi(I)$

Bizonyítás. Legyen I a D_{mult} tetszőleges ideálja. I és $\operatorname{Sep} I$ a 4.1 Tétel szerint D_{mult}-beli P_I-osztályok. A 4.3 Lemma miatt pedig megkapjuk, hogy $\phi(\operatorname{Sep} I) = \operatorname{Sep} \phi(I)$. □

4.2 Definíció. Egy integritástartományt Gauss-gyűrűnek nevezünk, ha minden nem-nulla, nem-egység eleme felírható irreducibilis elemek szorzataként az egységszorzók és a sorrend erejéig egyértelműen.

Jelöljön D a továbbiakban egy Gauss-gyűrűt. D bármely két a és b eleme esetén létezik ezek legnagyobb közös osztója, amit $\text{lnko}(a,b)$ jelöl. Világos, hogy $D_{mult}/\sim$ faktorfélcsoportban minden $a,b \in D$ esetén $[\text{lnko}(a,b)]_\sim = \text{lnko}([a]_\sim,[b]_\sim)$.

Egy $m \in D$ esetén jelölje τ_m a D következő relációját:

$$\forall a,b \in D \quad \text{esetén} \quad (a,b) \in \tau_m \Leftrightarrow \text{lnko}(a,m) \sim \text{lnko}(b,m) .$$

Mivel $\sim$ ekvivalencia-reláció D-n, ezért τ_m is az.

4.5 Lemma. Bármely D Gauss-gyűrűben $\tau_0 = \sim$.

Bizonyítás. Mivel $\text{lnko}(a,0) \sim a$ tetszőleges $a \in D$ esetén, ezért minden $a,b \in D$ esetén $(a,b) \in \tau_0 \Leftrightarrow a \sim b$, és így $\tau_0 = \sim$. $\square$

Egy D Gauss-gyűrű egy m eleme estén jelölje $J(m)$ az m által generált ideálját D-nek. Ismert, hogy $J(m) = mD$. Ez az ideál fontos a τ_m reláció leírásában D egy nem-nulla m eleme esetén.

4.3 Tétel. Legyen m egy D Gauss-gyűrű nem-nulla eleme. Ekkor $\tau_m = P_{J(m)}$ és τ_m olyan kongruenciája D_{mult}-nak, hogy D_{mult}/τ_m kielégíti a $\bigstar$-feltételt.

Bizonyítás. Legyen m egy D Gauss-gyűrű nem-nulla eleme.

Először vegyük azt az esetet, amikor $m \sim e$, ahol e a D egységelemét jelöli. Ekkor m egység a D-ben, amiből $J(m) = mD = D$, és így $\text{Sep}\, J(m) = D$. Emiatt $P_{J(m)}$ és τ_m is megegyezik D univerzális relációjával, vagyis a tételbeli állítások teljesülnek.

Most vegyük azt az esetet, amikor $m \nsim e$. Ekkor $J(m) \neq D$. Mivel D-nek van egységeleme, ezért $\text{Sep}\, J(m) \neq \emptyset$. A 4.1 Tétel szerint $D_{mult}/P_{J(m)}$ teljesíti a $\bigstar$-feltételt, valamint $J(m)$ és $\text{Sep}\, J(m)$ különböző $P_{J(m)}$-osztályok D_{mult}-ban: $J(m)$ a nulleleme, míg $\text{Sep}\, J(m)$ az egységeleme a $D_{mult}/P_{J(m)}$ faktorfélcsoportnak.

Azt, hogy $\tau_m = P_{J(m)}$, beláthatjuk, ha először megmutatjuk, hogy $\tau_m \subseteq P_{J(m)}$, majd azt, hogy minden $a,b \in D$ esetén $(a,b) \notin \tau_m \Rightarrow (a,b) \notin P_{J(m)}$.

Legyen $a,b \in D$ tetszőlegesek, amelyekre jelölje d_a és d_b a következőket:

$$d_a = \text{lnko}(a,m) \quad \text{és} \quad d_b = \text{lnko}(b,m) .$$

Ekkor léteznek az $a^*, b^*, m_a, m_b \in D$ elemek, amelyekre a következők teljesülnek:

$$a = d_a a^*, \quad m = d_a m_a, \quad b = d_b b^*, \quad m = d_b m_b \quad .$$

Megjegyezzük, hogy $\text{lnko}(a^*, m_a) \sim e$ és $\text{lnko}(b^*, m_b) \sim e$.

Tegyük fel, hogy $(a,b) \in \tau_m$, vagyis $d_a \sim d_b$. Megmutatjuk, hogy $(a,b) \in P_{J(m)}$. Mivel $d_a \mid d_b$ és $d_b \mid d_a$, ezért léteznek az $x,y \in D$ elemek, hogy

$$d_b = d_a x \quad \text{és} \quad d_a = d_b y .$$

Tegyük fel, hogy $uav \in J(m)$ valamilyen $u, v \in D$ elempárra. Ekkor $uav = mt$ valamely $t \in D$ elemre, és így $ud_a a^* v = d_a m_a t$.

Mivel $d_a \neq 0$, ezért $ua^*v = m_a t$, amiből $m_a \mid uva^*$.

Az iméntiből $\text{lnko}(a^*, m_a) \sim e$ miatt azt kapjuk, hogy $m_a \mid av$. Tehát létezik $k \in D$, amelyre $uv = m_a k$. Következésképp:

$$ubv = buv = bm_a k = d_b b^* m_a k = d_a x b^* m_a k = mxb^* k \in J(m) \ .$$

Hasonlóan belátható, hogy $ubv \in J(m) \Rightarrow uav \in J(m)$.

Tehát $J(m) \ldots a = J(m) \ldots b$, vagyis $(a, b) \in P_{J(m)}$. Így beláttuk, hogy $\tau_m \subseteq P_{J(m)}$.

Most nézzük azt az esetet, amikor feltesszük, hogy $(a, b) \notin \tau_m$, vagyis $d_a \nsim d_b$, ami azt jelenti, hogy $d_a \nmid d_b$ vagy $d_b \nmid d_a$. Belátjuk, hogy ekkor $(a, b) \notin P_{J(m)}$.

Tegyük fel, hogy $d_a \nmid d_b$ teljesül. Ekkor $m_b \mid m_a$ esetén $m_a = m_b w$ valamilyen $w \in D$ elemre, amiből $d_a m_b w = d_a m_a = m = d_b m_b$. Felhasználva, hogy $m_b \neq 0$ és D egyszerűsíthető, azt kapjuk, hogy $d_a w = d_b$, ami ellentmondana annak, hogy $d_a \nmid d_b$, vagyis $m_b \nmid m_a$.

Teljesül $(m_a, e) \in J(m) \ldots a$, mivel $m_a a e = m_a a = m_a a^* d_a = ma^* \in J(m)$. Belátjuk, hogy $(m_a, e) \notin J(m) \ldots b$ is igaz. Tegyük fel indirekt módon, hogy $(m_a, e) \in J(m) \ldots b$. Ekkor $m_a b e = m_a b \in J(m)$, és így $m_a b = mw$ valamilyen $w \in D$ elemre. Így

$$m_a (b^* d_b) = (m_b d_b) w \ ,$$

amiből felhasználva, hogy $d_b \neq 0$ és D egyszerűsíthető kapjuk, hogy

$$m_a b^* = m_b w \ .$$

Tehát $m_b \mid m_a b^*$, és ezért $m_b \mid m_a$ ellentmondáshoz jutunk $\text{lnko}(m_b, b^*) \sim e$ miatt. Következésképp $(m_a, e) \notin J(m) \ldots b$, vagyis $(m_a, e) \in J(m) \ldots a$ miatt

$$J(m) \ldots a \neq J(m) \ldots b \ .$$

Ha azt tesszük fel, hogy $d_b \nmid d_a$, akkor az iméntihez hasonló módon beláthatjuk, hogy $(m_b, e) \in J(m) \ldots b$, de $(m_b, e) \notin J(m) \ldots a$. Így ebben az esetben is $J(m) \ldots a \neq J(m) \ldots b$ teljesül, vagyis mindkét esetben igaz, hogy

$$(a, b) \notin P_{J(m)} \ .$$

A kapott megállapítások, egyrészt $(a, b) \notin \tau_m \Rightarrow (a, b) \notin P_{J(m)}$, másrészt $\tau_m \subseteq P_{J(m)}$, együtt adják, hogy

$$\tau_m = P_{J(m)} \ .$$

A 4.1 Tétel miatt τ_m kongruenciája a D_{mult} félcsoportnak, és a D_{mult}/τ_m faktorfélcsoport teljesíti a ★-feltételt. $\square$

4.1 Következmény. Ha D Gauss-gyűrűben az m elem nem nullelem és nem egység, akkor $\operatorname{Sep} J(m) = \{k \in D \mid \operatorname{lnko}(k, m) \sim e\}$.

Bizonyítás. A 4.3 Tétel alapján $P_{J(m)} = \tau_m$. A 4.1 Tétel miatt pedig $\operatorname{Sep} J(m)$ egy $P_{J(m)}$-osztály, és így τ_m-osztály D-ben. Mivel $e \in \operatorname{Sep} J(m)$, ezért

$$\operatorname{Sep} J(m) = \{k \in D \mid \operatorname{lnko}(k, m) \sim \operatorname{lnko}(e, m) \sim e\} \ .$$

$\square$

4.2 Következmény. Legyen m egy D Gauss-gyűrű tetszőleges eleme. Ekkor bármely $a, b, s \in D$ elemek esetén:

$$\operatorname{lnko}(a, m) \sim \operatorname{lnko}(b, m) \ \Rightarrow\ \operatorname{lnko}(sa, m) \sim \operatorname{lnko}(sb, m)$$

Bizonyítás. A 4.5 Lemma és a 4.3 Tétel alapján τ_m kongruenciája D_{mult}-nak minden $m \in D$ esetén. Emiatt az állítás nyilvánvaló. $\square$

A 4.3 lemma alapján egy D egységelemes integritástartomány D_{mult} multiplikatív félcsoportjának bármely I ideáljára $\sim \subseteq P_I$. Ekkor a $P_I/\sim$ relációt a $D' = D_{mult}/\sim$ faktorfélcsoporton a következőképp definiáljuk:

$$\forall a, b \in D_{mult} \quad \text{esetén} \quad ([a]_\sim, [b]_\sim) \in P_I/\sim \quad \Leftrightarrow \quad (a, b) \in P_I \ .$$

Ez a reláció kongruencia a $D_{mult}/\sim$-en, és a [17] 5.6 Tétele alapján

$$(D_{mult}/\sim)/(P_I/\sim) \cong D_{mult}/P_I \ .$$

4.6 Lemma. Legyen D egy egységelemes integritástartomány. A $D' = D_{mult}/\sim$ faktorfélcsoportban D bármely nem-nulla m elemére $P_{J(m)}/\sim = P_{J([m]_\sim)}$, ahol $J([m]_\sim)$ jelöli D'-nek $[m]_\sim = \phi(m)$ által generált ideálját, és $P_{J([m]_\sim)}$ a D'-n $J([m]_\sim)$ által meghatározott főkongruencia.

Bizonyítás. A 4.3 Lemma miatt $J(m)$ előáll D_{mult}-beli $\sim$-osztályok uniójaként, s ezért

$$[x]_\sim[a]_\sim[y]_\sim \in \phi(J(m)) \ \Leftrightarrow\ xay \in J(m) \ .$$

Így $([a]_\sim, [b]_\sim) \in P_{\phi(J(m))} \Leftrightarrow (a, b) \in P_{J(m)}$, vagyis $([a]_\sim, [b]_\sim) \in P_{J(m)}/\sim$. A lemmát így beláttuk, mert $\phi(J(m)) = J([m]_\sim)$ és az iménti alapján $P_{J(m)}/\sim = P_{\phi(J(m))}$. $\square$

Legyen D egy Gauss-gyűrű. Ekkor a $D' = D_{mult}/\sim$ bármely két $[a]_\sim$ és $[b]_\sim$ eleme pontosan akkor asszociáltak, ha $[a]_\sim = [b]_\sim$.

Egy tetszőleges $[m]_\sim \in D'$ elem esetén jelölje $\tau'_{[m]_\sim}$ a következő relációt minden $[a]_\sim, [b]_\sim \in D'$ esetén:

$$([a]_\sim, [b]_\sim) \in \tau'_{[m]_\sim} \;\Leftrightarrow\; \text{lnko}(([a]_\sim, [m]_\sim)) = \text{lnko}(([b]_\sim, [m]_\sim)) \; .$$

Mivel a 4.5 Lemma alapján $\tau_0 = \sim$, és a 4.3 Tétel valamint a 4.3 Lemma alapján minden nem-nulla $m \in D$ esetén $\sim \subseteq P_{J(m)} = \tau_m$, így $\tau_m/\sim$ létezik.

4.7 Lemma. Legyen D egy Gauss-gyűrű. Ekkor a $D' = D_{mult}/\sim$ faktorfélcsoportban $\tau_m/\sim = \tau'_{[m]_\sim}$.

Bizonyítás. Tetszőleges $a, b \in D_{mult}$ esetén

$$\begin{aligned}([a]_\sim, [b]_\sim) \in \tau_m/\sim \Leftrightarrow\; & (a, b) \in \tau_m \;\Leftrightarrow \\ & \text{lnko}(a, m) \sim \text{lnko}(b, m) \;\Leftrightarrow\; [\text{lnko}(a, m)]_\sim = [\text{lnko}(b, m)]_\sim \;\Leftrightarrow \\ & \text{lnko}([a]_\sim, [m]_\sim) = \text{lnko}([b]_\sim, [m]_\sim) \;\Leftrightarrow\; ([a]_\sim, [b]_\sim \in \tau'_{[m]_\sim} \; .\end{aligned}$$

□

4.3 Következmény. Legyen D egy Gauss-gyűrű. Ekkor a $D' = D_{mult}/\sim$ minden nem-nulla $[m]_\sim$ elemére $\tau'_{[m]_\sim} = P_{J([m]_\sim)}$. Emiatt pedig $D'/\tau'_{[m]_\sim}$ faktorfélcsoport pedig kielégíti a ★-feltételt.

Bizonyítás. A 4.3 Lemma és a 4.3 Tétel miatt teljesül, hogy $\sim \subseteq P_{J(m)} = \tau_m$, amiből $P_{J(m)}/\sim = \tau/\sim$ adódik a D'-ben. A 4.6 Lemmából $P_{J(m)}/\sim = P_{J([m]_\sim)}$, míg a 4.7 Lemmából $\tau_m/\sim = \tau'_{[m]_\sim}$ következik. Így $\tau'_{[m]_\sim} = P_{J([m]_\sim)}$, vagyis a 4.1 Tétel miatt $D'/\tau'_{[m]_\sim}$ teljesíti a ★-feltételt. □

Ismert, hogy Gauss-gyűrűben az irreducibilis elemek és a prímelemek megegyeznek. Tehát, ha a egy D Gauss-gyűrű tetszőleges nem-nulla eleme, akkor a vagy egység D-ben vagy felírható (véges sok) prímelem szorzataként a sorrend és az egységszorzók erejéig egyértelműen.

Jelölje $d(a)$ az a összes páronként nem-asszociált osztóinak számát. Ez megegyezik $[a]_\sim$ páronként különböző osztóinak számával $D' = D_{mult}/\sim$-ben. Ha a egység a D Gauss-gyűrűben, akkor $d(a) = 1$.

4.2 Példa. Legyen D a $\mathbb{Q}[x]$, azaz a racionális számok teste feletti polinomok gyűrűje. Ebben legyen $a = f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$. Ekkor $f(x) = (x-1)(x+1)(x+2)$. Tehát $f(x)$ páronként nem-asszociált egy főegyütthatójú polinom osztói a következő táblázat elemei:

1	(x-1)	(x+1)	(x+2)
(x-1)(x+1)(x+2)	(x+1)(x+2)	(x-1)(x+2)	(x-1)(x+1)

Vagyis $d(f(x)) = 8$.

4.4 Tétel. Ha a egy nem-nulla elem egy D Gauss-gyűrűben, akkor a $P_{J([a]_\sim)}$ kongruencia indexe a $D' = D_{mult}/\sim$ félcsoportban véges, és $d(a) = |D'/P_{J([a]_\sim)}|$.

Bizonyítás. Legyen a a D Gauss-gyűrű tetszőleges eleme, és ennek c egy tetszőleges osztója, így pedig $\mathrm{lnko}([c]_\sim, [a]_\sim) = [\mathrm{lnko}(c, a)]_\sim = [c]_\sim$. Tehát, ha x és y nem-asszociált osztói a-nak, akkor a $D' = D_{mult}/\sim$ faktorfélcsoportban

$$\mathrm{lnko}([x]_\sim, [a]_\sim) = [x]_\sim \neq [y]_\sim = \mathrm{lnko}([y]_\sim, [a]_\sim) \ ,$$

vagyis

$$([x]_\sim, [y]_\sim) \notin \tau'_{[a]_\sim} \ .$$

Legyen c a D Gauss-gyűrű tetszőleges eleme. Ekkor

$$\mathrm{lnko}(\mathrm{lnko}(c, a), a) \sim \mathrm{lnko}(c, a) \ ,$$

mivel $\mathrm{lnko}(c, a)$ osztója a-nak, és így

$$(\mathrm{lnko}(c, a), c) \in \tau_a \ ,$$

amiből adódik, hogy

$$([\mathrm{lnko}(c, a)]_\sim, [c]_\sim) \in \tau_a/\sim = \tau'_{[a]_\sim} \ .$$

Mivel $[\mathrm{lnko}(c, a)]_\sim = \mathrm{lnko}([c]_\sim, [a]_\sim)$, ezért

$$(\mathrm{lnko}([c]_\sim, [a]_\sim), [c]_\sim) \in \tau'_{[a]_\sim} \ ,$$

és eszerint $\mathrm{lnko}([c]_\sim, [a]_\sim)$ a D' ugyanazon $\tau'_{[a]_\sim}$-osztályában van, ahol $[c]_\sim$ is. A fenti, a nem-asszociált osztóira vonatkozó, és az iménti eredmény miatt a D' minden $\tau'_{[a]_\sim}$-osztálya $[a]_\sim$ pontosan egy osztóját tartalmazza. Felhasználva a 4.3 Következményt kapjuk, hogy

$$d(a) = |D'/\tau'_{[a]_\sim}| = |D'/P_{J([a]_\sim)}| \ .$$

□

4.4 Alkalmazások

Most megvizsgáljuk az eddigi eredményeket speciális Gauss-gyűrűkön.

4.5 Tétel. Egy $\mathbb{F}$ test feletti $\mathbb{F}[x]$ polinomgyűrű tetszőleges nem-nulla $f(x)$ polinomja esetén:

$$d(f(x)) = |(\mathbb{F}[x])'/P_{J([f(x)]_\sim)}|, \text{ ahol } (\mathbb{F}[x])' = \mathbb{F}[x]_{mult}/\sim \ .$$

Bizonyítás. A 4.4 Tétel alapján nyilvánvaló. □

4.6 Tétel. Ha N a pozitív egészek multiplikatív félcsoportja, és $P_{J(m)}$ egy tetszőleges N-beli m elem által generált $J(m)$ ideál szerint definiált főkongruenciája N-nek, akkor $d(m) = |N/P_{J(m)}|$.

Bizonyítás. Az egész számok $\mathbb{Z}$ gyűrűje Gauss-gyűrű. Jelölje most is N a pozitív egészek multiplikatív félcsoportját. Ekkor a $\mathbb{Z}' = \mathbb{Z}_{mult}/\sim$ faktorfélcsoport izomorf az $N \cup \{0\}$ félcsoporttal. Legyen m egy pozitív egész szám. Ekkor a 4.4 Tétel alapján $d(m) = |\mathbb{Z}'/P_I|$, ahol I az $[m]_\sim$ által generált ideál $\mathbb{Z}'$-ben, ami izomorf az m által $N \cup \{0\}$-ben generált ideállal. Jelölje ezt is az I. A 4.1 Megjegyzés miatt $(N \cup \{0\})/P_I \cong N/P_{I\setminus\{0\}}$, és mivel $I \setminus \{0\}$ megegyezik a tételben jelölt $J(m)$ ideállal, kapjuk, hogy $d(m) = |N/P_{J(m)}|$. □

4.3 Példa. Legyen $S = \{0, 1, 2, 3\}$ egy félcsoport, amelynek Cayley-művelettáblája::

$\bullet$	1	2	3	0
1	1	2	3	0
2	2	2	0	0
3	3	0	3	0
0	0	0	0	0

S egy félháló, vagyis egy kommutatív félcsoport és minden eleme idempotens. Ellenőrizhető, hogy $S \cong N/P_{J(6)}$, és így a 4.6 Tétel alapján $d(6) = 4$.

A $\mathcal{Q}$ feletti d szerinti kvadratikus számtestet $\mathcal{Q}[\sqrt{d}]$ jelöli, ahol d olyan pozitív vagy negatív egész, amely nem négyzetszám $\mathcal{Q}$-ban. Elemei pedig az $a + b\sqrt{d}$ alakú komplex számok, ahol $a, b \in \mathcal{Q}$. Egy $\mathcal{Q}[\sqrt{d}]$ kvadratikus számtestet valósnak nevezünk, ha $d > 0$, és komplexnek, ha $d < 0$.

Egy α komplex számot algebrai számnak nevezünk, ha létezik egy racionális együtthatójú $p(x)$ polinom, amelyre $p(\alpha) = 0$. Az egy főegyütthatójú $p(x)$ polinomot, amely az $f(x) \to f(\alpha)$ homomorfizmus magját generálja ($f(x) \in \mathbb{Q}[x]$), az α $\mathbb{Q}$ feletti irreducibilis polinomjának nevezzük.

Egy algebrai számot algebrai egésznek nevezünk, ha a $\mathbb{Q}$ feletti (egy főegyütthatójú) irreducibilis polinomjának együtthatói egészek. A [18] 13.1.6 Állítása alapján egy kvadratikus számtest algebrai egészei gyűrűt alkotnak.

4.7 Tétel. Legyen d a következő egészek egyike:

$$-1, -2, -3, -7, -11, -19, -43, -67, -163\ .$$

Ha A egy nem csak a nullelemet tartalmazó ideálja a $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ komplex kvadratikus számtest algebrai egészei által alkotott R gyűrűnek, akkor:

- $\exists 0 \neq m \in R$, amelyre $P_A = \tau_m$;
- $\exists 0 \neq n \in \mathbb{N}$, amelyre $P_{A\overline{A}} = \tau_m$.

A második pontban ezúttal $\overline{A} = \{\overline{a} \mid a \in A\}$, vagyis A komplex konjugáltja.

Bizonyítás. Legyen d a tétel szerint választott egész. Ekkor a komplex kvadratikus számtest algebrai egészei által alkotott R gyűrű Gauss-gyűrű a [18] 13.2.5 Tétele alapján. Továbbá a [18] 13.5.6 Tétele miatt pedig R főideálgyűrű. Így, ha A egy nem csak a nullelemet tartalmazó ideálja az R gyűrűnek, akkor létezik egy $0 \neq m \in R$ elem, amelyre $A = J(m) = mR$. A 4.3 Tétel alapján kapjuk, hogy $P_A = P_{J(m)} = \tau_m$.

A [18] 13.4.8 Lemmája szerint pedig létezik egy n pozitív egész szám úgy, hogy $A\overline{A} = J(n)$ és ismét a 4.3 Tételt használva adódik, hogy $P_{A\overline{A}} = P_{J(n)} = \tau_n$. $\square$

Utószó

Sikerült megismerkedni félcsoport részhalmazának szeparátorával. Kiindultunk egy egyszerűen megfogalmazható absztrakt algebrai fogalomból, és ennek segítségével érdekes összefüggésekhez jutottunk el. Beláttunk ismertebb félcsoportelméleti fogalmakhoz köthető megállapítások esetén olyan ekvivalens állításokat, amelyek használják a szeparátor fogalmát. Például unitér részfélcsoportok vagy ideálok esetén. A szakdolgozatban sikerült teljes képet adni a félcsoport részhalmazának szeparátorával kapcsolatos félcsoportelméleti eredményekről. Valamint ezen eredményeknek számelmélettel kapcsolatos gyűrűelméleti alkalmazhatóságáról. A félcsoportelméleti eredmények egy része a szeparátorokkal kapcsolatos bizonyos feltételeket teljesítő félcsoportok szerkezetének leírását jelentette. Meglepő, hogy a szeparátor, ami csak egy egyszerű részhalmazból felépített struktúra milyen sok tulajdonságát megörökli annak a félcsoportnak, ahonnan kiindultunk, többek között a csoport tulajdonságot. Figyelemreméltó még, hogy speciális kongruenciák, például monoid-kongruenciák esetén a kongruenciák teljes leírására is felhasználható a bevezetett fogalom. Ezen kongruenciák között pedig volt olyan, ami végül számelméleti kitekintésünkhöz vezetett minket. A szeparátorra épített további számelméleti összefüggések feltárása akár későbbi vizsgálatok tárgyát képezheti.

Végezetül szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek. Köszönöm neki, hogy felhívta figyelmemet a választott témára, valamint köszönök neki minden segítséget, javaslatot, amelyet a szakdolgozat elkészítése során kaptam.

Irodalomjegyzék

[1] Attila Nagy. The separator of a subset of a semigroup. *Publicationes Mathematicae Debrecen*, 27(1-2):25–30, jan 1980.

[2] Attila Nagy. On monoid congruences of commutative semigroups. In *Notes on Semigroups IX*, pages 7–11. Karl Marx University of Economics, Budapest, 1983-1984.

[3] Attila Nagy. On commutative monoid congruences of semigroups. *Pure Mathematics and Applications*, 13(3):389–392, jan 2002.

[4] Attila Nagy. On the separator of subsets of semigroups. *Semigroup Forum*, 83(2):289–303, oct 2011.

[5] Attila Nagy. Separators of ideals in multiplicative semigroups of unique factorization domains. *Semigroup Forum*, pages 1–14, jun 2015.

[6] Lev N. Shevrin. Completely simple semigroups without zero and idealizers of subsemigroups. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 55(6):157–160, 1966.

[7] László Rédei. *Algebra*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1959.

[8] A. H. Clifford and G. B. Preston. *The Algebraic Theory of Semigroups*, volume I. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1961.

[9] A. H. Clifford and G. B. Preston. *The Algebraic Theory of Semigroups*, volume II. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1967.

[10] Thomas E. Nordahl. On permutative semigroup algebras. *Algebra Universalis*, 25(1):322–333, 1988.

[11] Mohan S. Putcha and Adil Yaqub. Semigroups satisfying permutation identities. *Semigroup Forum*, 3(1):68–73, 1971.

[12] Attila Nagy. *Félcsoportok*. Typotex Kiadó, 2013. (a TÁMOP 4.1.2.A/1-11/0064 projekt keretében készült elektronikus jegyzet).

[13] Christophe Reutenauer. Semisimplicity of the algebra associated to a biprefix code. *Semigroup Forum*, 23(1):327–342, 1981.

[14] Attila Nagy. *Special Classes of Semigroups*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 2001.

[15] Attila Nagy and Peter R. Jones. Permutative semigroups whose congruences form a chain. *Semigroup Forum*, 69(3):446–456, 2004.

[16] Antonio Restivo and Christophe Reutenauer. On the burnside problem for semigroups. *Journal of Algebra*, 89:102–104, 1984.

[17] John M. Howie. *An Introduction to Semigroup Theory*. Academic Press, London, 1976.

[18] Michael Artin. *Algebra*. Addison-Wesley (Pearson), Boston, second edition, 2010.