

Matematika A1 előadás

GTK NG,PSZ 2022. ősz

Balla-S.né Béla Szilvia

belus@math.bme.hu

geometria.math.bme.hu/bela-szilvia

1. előadás:
**A halmazelmélet alapjai,
egyenletek és egyenlőtlenségek,
matematikai állítások szerkezete és
bizonyítási módszerek**

Halmazok

Alapfogalom (Axióma): olyan alapfeltevés melyet bizonyítás nélkül fogadunk el. A **"halmaz"** és **"halmazhoz tartozás"** alapfogalmak.

" Meghatározott és jól megkülönböztethető dolgok összesége. "
Cantor (1895)

Egy halmaz akkor adott, ha minden objektumról eldönthető, hogy hozzá tartozik-e, továbbá ha bármely két elemről eldönthető, hogy azonosak-e.

Jelölés:

halmazok: A, B, \dots nagybetűk

elemek: a, b, \dots kisbetűk

$a \in A$ eleme, $b \notin A$ nem eleme

Megadás:

- Az elemek felsorolásával: $A = \{a, b, c\}$
- Rögzítsünk egy (alap)halmazt, amely tartalmazza az összes vizsgálható objektumot, és adjunk meg egy minden elemre egyértelműen eldönthető logikai tulajdonságot:

$$A = \{a \text{ szám} \mid a \leq 1 \text{ és egész}\} = \{1, 0, -1, -2, \dots\}$$

Tartalmazás

- Az A halmaz **részalmazza** a B halmaznak (jel: $A \subseteq B$), ha A minden eleme egyúttal eleme B -nek is.
- Az A halmaz **valódi(szigorú) részalmazza** a B halmaznak (jel: $A \subset B$), ha A minden eleme eleme B -nek is, de van olyan B -beli elem, amely nem eleme A -nak.
- Az A és B **halmazok egyenlők**, ha A részalmazza B -nek és B is részalmazza A -nak (azaz, pontosan ugyanazok az elemeik).
- Az **üres halmaz** az a halmaz (jel: \emptyset vagy $\{ \}$), amelynek egyetlen szóba jöhető objektum sem eleme.
- A és B **diszjunkt**, ha nincs közös elemük.

Műveletek

- A és B halmazok **uniója** azon $A \cup B$ halmaz, amelynek minden eleme az A és B halmazok közül legalább az egyikben benne van.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ vagy } x \in B\}.$$

- A és B halmazok **metszete** azon $A \cap B$ halmaz, amelynek minden eleme az A és B halmazoknak is eleme.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ és } x \in B\}.$$

- A halmaz és B halmaz ebben a sorrendben vett **különbsége** azon $A \setminus B$ halmaz, amely tartalmazza A halmaznak minden olyan elemét, amely B halmazban nincs benne.

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ és } x \notin B\}.$$

- Ha H az alaphalmaz, akkor $\overline{A} = H \setminus A$ lesz a **komplementer** halmaza.
- Az A és a B halmazok **Descartes-szorzata** olyan rendezett elempárok halmaza, melyek első eleme A -ból, második eleme B -ből való:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Példa:

Legyen $A = \{1; 2\}$ és $B = \{2; 3\}$.

Mi lesz $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \times B$, $B \times A$ és $(A \times B) \setminus (B \times A)$?

Példa:

Legyen $A = \{1; 2\}$ és $B = \{2; 3\}$.

Mi lesz $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \times B$, $B \times A$ és $(A \times B) \setminus (B \times A)$?

$$A \cup B = \{1; 2; 3\}.$$

$$A \cap B = \{2\}.$$

$$A \setminus B = \{1\}.$$

$$A \times B = \{(1, 2); (1, 3); (2, 2); (2, 3)\}$$

$$B \times A = \{(2, 1); (2, 2); (3, 1); (3, 2)\}$$

$$(A \times B) \setminus (B \times A) = \{(1, 2); (1, 3); (2, 3)\}$$

Halmazok

Néhány nevezetes számhalmaz:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ természetes számok (0 is benne van!)

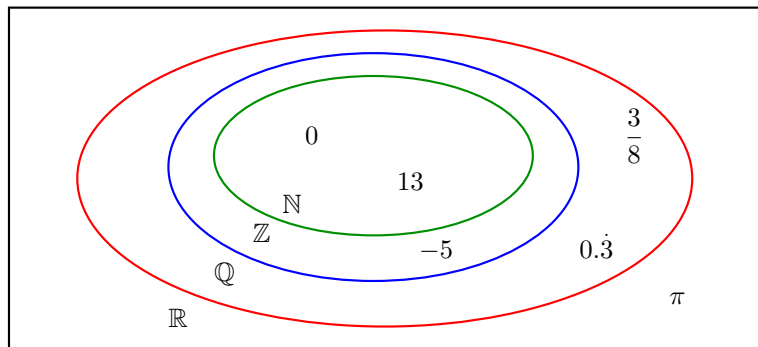
$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ egész számok,

$\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, \dots\}$ pozitív egész számok

$\mathbb{Q} = \{p/q \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ racionális számok

\mathbb{R} valós számok

Számhalmazok Venn-diagrammjá:



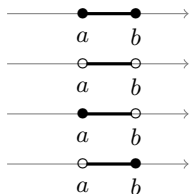
Intervallumok

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ **zárt** intervallum

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ **nyílt** intervallum

$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ félig nyílt/zárt

$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ félig nyílt/zárt



Egy $[a, b]$ **intervallum hossza** a végpontok távolsága $d(a, b) := |b - a|$.

Ha a és/vagy $b = \pm\infty$, akkor ott csak nyílt lehet az intervallum:

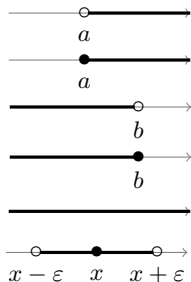
$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$ nyílt intervallum

$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$ zárt intervallum

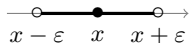
$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$ nyílt intervallum

$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$ zárt intervallum

$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ valós számok



x valós szám $\varepsilon > 0$ sugarú környezete: $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$



Egy egyenlet megoldása

Egy x -re felírt egyenlet megoldása azt jelenti, hogy keressük az alap számhalmaz azon elemeit, melyekre az egyenletet teljesül.

Példa: Oldjuk meg az $x + 1 = \sqrt{7 + x}$ egyenletet a valós számok halmazán!

Egy egyenlet megoldása

Egy x -re felírt egyenlet megoldása azt jelenti, hogy keressük az alap számhalmaz azon elemeit, melyekre az egyenletet teljesül.

Példa: Oldjuk meg az $x + 1 = \sqrt{7 + x}$ egyenletet a valós számok halmazán!

$$x + 1 = \sqrt{7 + x} \quad \text{négyzetre emelés:}$$

↓

$$(x + 1)^2 = 7 + x \quad \text{kifejtés:}$$

⇕

$$x^2 + 2x + 1 = 7 + x \quad \text{átrendezés:}$$

⇕

$$x^2 + x - 6 = 0$$

Másodfokú megoldóképlet:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (-6)}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{matrix} 2 \\ -3 \end{matrix}$$

Visszahelyettesítve az $x_1 = 2$ megoldás, míg az $x_2 = -3$ nem, a négyzetre emelés során nyertük ezt a hamis gyököt.

Egy egyenlőtlenség megoldása

Egy x -re felírt egyenlőtlenség megoldása azt jelenti, hogy keressük az alap számhalmaz azon részeit (rendszerint intervallumokat vagy azok unióját), melyekre az egyenlőtlenség teljesül.

Példa: Oldjuk meg a $|2x + 3| \leq 5$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.

Egy egyenlőtlenség megoldása

Egy x -re felírt egyenlőtlenség megoldása azt jelenti, hogy keressük az alap számhalmaz azon részeit (rendszerint intervallumokat vagy azok unióját), melyekre az egyenlőtlenség teljesül.

Példa: Oldjuk meg a $|2x + 3| \leq 5$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.

A $|2x + 3| \leq 5$ egyenlőtlenség pontosan azt jelenti, hogy

$$-5 \leq 2x + 3 \leq 5$$

$$-8 \leq 2x \leq 2$$

$$-4 \leq x \leq 1$$

Tehát a megoldás a $[-4, 1]$ intervallum.

Állítások szerkezete

Alap kijelentésekből képzünk állításokat a "nem", "és", "vagy", "ha...akkor", "akkor és csak akkor" logikai kapcsolatok segítségével.

Fontos jelölések:

\forall	-	minden
\exists / \nexists	-	létezik/nem létezik
\neg	-	nem
\wedge / \vee	-	és/vagy
$A \implies B$	-	ha A , akkor B
$A \iff B$	-	A akkor és csak akkor B
$:=$	-	definiáló egyenlőség (a bal oldalt a jobb oldallal egyenlőként értelmezzük)

Példa: halmazok különbségének definíciója

$$x \in A \setminus B \iff (x \in A) \wedge \neg(x \in B)$$

vagy

$$A \setminus B := \{x \in A \mid x \notin B\}$$

A **direkt** bizonyítási eljárás során a már korábban bizonyított vagy axiómaként elfogadott megállapításokból kiindulva helyes logikai következtetésekkel igazoljuk az állításunkat.

Az **indirekt** bizonyítás olyan eljárás, melynek során feltesszük, hogy állításunk nem igaz, és ebből kiindulva helyes logikai következtetéseket levonva ellentmondáshoz jutunk. Így igazoljuk, hogy a kiindulási feltevés téves volt, azaz a bizonyítandó állítás helyes.

Példa (indirekt bizonyítás):

Állítás: végtelen sok prímszám létezik.

Indirekt feltevés: véges sok prím létezik, pontosan k darab p_1, p_2, \dots, p_k .

Ekkor tekintsük a $q = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k + 1$ számot. Ez nem lehet prím, mert az ellentmondana a feltevésnek. Ekkor viszont létezik osztója, ami nem p_1, p_2, \dots, p_k . Ez szintén ellentmond a feltevésünknek, hiszen akkor lenne olyan prímosztója is, mely nincs az összes prím között. Így a feltevésünk hamis volt, tehát az eredeti állítás igaz.

Bizonyítási módszerek

A **teljes indukció** bizonyítási módszerét a természetes számok közül végtelen sokra kimondott állítások igazolására használjuk.

Az érvelésünk menete a következő:

1. igazoljuk $n = 0$, vagy 1 stb. esetben (megfelelően kicsi n -re) az állítást,
2. tegyük fel, hogy igaz $n = N$ rögzített számra (indukciós feltevés) igaz az állítás,
3. igazoljuk a rákövetkező $n = N + 1$ -re is,

így az adott állítást beláttuk minden n -re, mely nagyobb vagy egyenlő az 1. pontban igazolt esetről.

Bizonyítási módszerek

Példa (teljes indukció):

Bizonyítsuk be teljes indukcióval minden $n \in \mathbb{N}$ természetes számra, hogy

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Ha $n = 1$

$$1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2} = 1$$

Tegyük fel $n = N$ -re igaz, azaz

$$\sum_{k=1}^N k = \frac{N(N+1)}{2} \quad (\text{indukciós feltétel})$$

Vizsgáljuk $n = N + 1$ -re

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N+1} k &= \sum_{k=1}^N k + (N+1) \quad (\text{ind.felt.}) \\ &= \frac{N(N+1)}{2} + (N+1) = \frac{N(N+1) + 2(N+1)}{2} = \frac{(N+1)(N+2)}{2}. \end{aligned}$$