

A2 Gyakorlat

Műszaki Menedzser szakos hallgatóknak

1. hét - Analitikus Térgéometria

Elmélet:

P és Q pontok távolsága:

$$d(P, Q) = \left| \overrightarrow{PQ} \right| = \sqrt{(q_x - p_x)^2 + (q_y - p_y)^2 + (q_z - p_z)^2}$$

P ponton keresztül, \underline{v} irányú e egyenes paraméteres vektoregyenlete:

$$e: \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \underline{v}, \text{ ahol } t \in \mathbb{R}$$

$$x = p_x + tv_x; \quad y = p_y + tv_y; \quad z = p_z + tv_z; \quad \text{ahol } t \in \mathbb{R}$$

Egyenes egyenletrendszere: ha $v_x, v_y, v_z \neq 0$, akkor $\frac{x - p_x}{v_x} = \frac{y - p_y}{v_y} = \frac{z - p_z}{v_z}$.

P ponton keresztül, \underline{n} normálvektorú sík vektoregyenlete:

$$\langle \underline{n}, \overrightarrow{PX} \rangle = 0, \text{ vagy } n_x(x - p_x) + n_y(y - p_y) + n_z(z - p_z) = 0$$

Sík Hesse-féle normálalakja: $\frac{n_x(x - p_x) + n_y(y - p_y) + n_z(z - p_z)}{|\underline{n}|} = 0$

A pont és e egyenes távolsága: $d(A, e) = \frac{|\overrightarrow{PA} \times \underline{v}|}{|\underline{v}|}$.

A pont és σ sík távolsága: $d(A, \sigma) = \frac{|\langle \underline{n}_0, \overrightarrow{PA} \rangle|}{|\underline{n}|} = \frac{|n_x(a_x - p_x) + n_y(a_y - p_y) + n_z(a_z - p_z)|}{|\underline{n}|}$.

Feladatok:

1. Feladat. Az e egyenes áthalad az $A(1, -1, 1)$ és $B(-2, 1, 2)$ pontokon. Az f egyenes irányvektora $\underline{v}(-2, 0, 2)$ és illeszkedik a $P(1, 1, -1)$ pontra. Metszőek-e ezek az egyenesek? Ha igen, írjuk fel a közös síkjukat! Számítsuk ki mindkét egyenes metszéspontját a $\sigma: x + y = 1$ síkkal. Milyen távol van a két egyenes közös pontja ettől a σ síktól?

2. Feladat. Írja fel az alábbi adatok által meghatározott egyenesek paraméteres alakját és egyenletrendszerét is:

a) $P(-2, 5, 1)$ pontja és $\underline{v}(-1, 2, -3)$ irányvektora,

b) $A(3, 1, 2)$ és $B(-1, 1, 3)$ pontjai,

c) párhuzamos a $\mathbf{k}(0, 0, 1)$ vektorral és átmegy az $A(5, 1, 4)$ ponton,

d) párhuzamos az $\frac{x - 8}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z + 9}{7}$ egyenessel és átmegy a $P(3, -1, -2)$ ponton,

e) pontja a $P(6, -3, 4)$ és merőleges a $\underline{u}(-2, 3, 1)$ és $\underline{v}(2, 0, 1)$ vektorokra,

f) keresztül megy a $P(1, 2, 5)$ ponton és párhuzamos az $5x - 3y + 2z - 7 = 0$ és $2x + 4y + 3z + 9 = 0$ síkokkal.

3. Feladat. Igazolja, hogy

a) a $P(-3, 2, 5)$ pont illeszkedik az $x = 15 - 2t; y = -43 + 5t; z = -22 + 3t$ egyenesre,

b) az $x = 1 + t; y = 4 - t; z = 3 + 2t$ és az $x = -1 + 2t; y = 7 - 3t; z = 4 - t$ egyenesek egy síkban vannak,

c) az $e: x = 2 + 2t; y = -1 - 4t; z = 5 + 3t$ és az $f: x - 3 = -y - 2 = z - 3$ egyenesek kitérők.

4. Feladat. Milyen t paraméterérték esetén

a) lesz az alábbi két egyenes merőleges?

$$e: \frac{x+2}{2} = \frac{-y}{3} = \frac{z-1}{4}, \quad f: \frac{x-3}{t} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-7}{2}$$

b) metszi egymást az alábbi két egyenes?

$$e: x-1 = \frac{y+1}{2} = -\frac{z+1}{t}, \quad f: x+2 = y-1 = z$$

Adjuk meg a metszéspont koordinátáit! Írjuk fel a két metsző egyenes által meghatározott síkot. Milyen szögben metszik egymást az egyenesek?

5. Feladat. Adott az $A(1, 0, -1), B(2, 2, 1), C(1, 1, 1)$ háromszög. Írjuk fel a háromszög síkjának egyenletét. Határozzuk meg az \overline{AB} oldalhoz tartozó magasság egyenesét. Hol lesz a magasság talppontja? Írjuk fel a C ponton áthaladó súlyvonal egyenesének paraméteres egyenletét.

6. Feladat. Határozzuk meg annak a síknak az egyenletét, mely

a) kerestülmegy a $P(1, 0, -1)$ ponton és párhuzamos az $6x + 3y + 2z = 6$ síkkal,

b) merőleges az $\frac{x-1}{2} = \frac{-y}{3} = z+1$ egyenesre és kerestülmegy a $P(3, 2, 5)$ ponton,

c) párhuzamos az $x = \frac{y}{7} = \frac{z}{8}$ egyenessel, és illeszkedik rá az $y = 3x + 5$ és $z = 2x - 1$ síkok metszésvonala,

d) az x, y, z koordinátatengelyeket rendre $-4, 5,$ és 7 értékeknél metszi,

e) az $A(-3, 7, 6)$ és $B(1, -5, 0)$ pontokat összekötő szakasz felezőmerőleges síkja.

7. Feladat. Adottak $A(2, -1, 4), B(-1, 0, 3), C(3, -1, 0)$ és $D(1, 1, 2)$ pontok.

a) Egy síkban vannak-e ezek a pontok?

b) Írjuk fel az A és B pontokon átmenő e egyenes egyenletét!

c) Írjuk fel az A, B és C pontokon átmenő σ sík egyenletét!

d) Milyen távol van a D pont e -től és σ -tól?

8. Feladat. Számítsa ki a $2x - 3y + 6z = 14$ és $4x - 6y + 12z + 21 = 0$ két párhuzamos sík távolságát.

9. Feladat. Mi a hajlásszöge

a) az $e: \frac{x-1}{3} = \frac{2y}{5} = -\frac{z+1}{3}$ és az $f: x = t; y = 2t - 3; z = -5$ egyeneseknek,

b) az $e: x = 2t - 5; y = -t + 1; z = 3t - 6$ egyenesnek és a $\sigma: 2x + y - 3z + 5 = 0$ síknak.

10. Feladat. Határozzuk meg

a) az $\frac{x+3}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{-6}$ egyenes és az $x - 2y + z + 15 = 0$ sík közös pontját,

b) a $2x + y - 5z + 3 = 0$ és $x - y + 2z = 0$ síkok metszésvonalát.

11. Feladat. Tükrözzük a $P(2, 4, -3)$ pontot

a) a $Q(1, 3, 7)$ pontra,

b) az $x = 2y = 2z$ egyenesre,

c) a $x - 2y + 5z = 0$ síkra.