

A2 Gyakorlat

Műszaki Menedzser szakos hallgatóknak

7. hét - Lineáris egyenletrendszerek

Elmélet:

Elemi sorműveletek: 1) sorok cseréje (det -1-szeres), 2) sorok λ -szorososa (det λ -szoros) 3) egyik sor plusz másik sor számszorosa (det nem változik).

$\text{rang}(\mathbf{A})$ =lépcsős alakban a nem nulla átlóelemek száma=lineárisan független sorvektorok maximális száma =lineárisan független oszlopvektorok maximális száma=legnagyobb nem nulla determinánsú négyzetes részmátrix mérete.

$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ n -változós lineáris egyenletrendszernek:

- 1) pontosan 1 egyértelmű megoldása van, ha $\text{rang}(\mathbf{A}) = \text{rang}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = n$
- 2) végtelen sok megoldása van, ha $\text{rang}(\mathbf{A}) = \text{rang}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) < n$ ekkor a megoldásrendszer $n - \text{rang}(\mathbf{A})$ paraméteres
- 3) nincs megoldás, ha $\text{rang}(\mathbf{A}) \neq \text{rang}(\mathbf{A}|\mathbf{b})$

Cramer-szabály: ha $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ n -változós lineáris egyenletrendszerre $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, ekkor

$$x_i = \frac{\det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}{\det(\mathbf{A})}$$

Feladatok:

1. Feladat. Határozza meg a következő egyenletrendszerek megoldását a Cramer-szabály segítségével:

$$\begin{array}{l} \text{a)} \quad \begin{array}{l} x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{b)}^{\text{hf}} \quad \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = -2 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_4 = -2 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 11x_4 = 0 \end{array} \end{array}$$

2. Feladat. Oldja meg a következő egyenletrendszereket:

$$\begin{array}{l} \text{a)} \quad \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 7 \\ x_1 - x_3 = -2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 7 \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{b)}^{\text{hf}} \quad \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 4 \\ 3x_1 - x_2 = 2 \\ -3x_1 + 5x_2 = 2 \\ x_1 + 2x_2 = 1 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{c)}^{\text{hf}} \quad \begin{array}{l} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 0 \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{d)} \quad \begin{array}{l} 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 7 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 0 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{e)} \quad \begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 5x_3 - 8x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 9x_3 - 14x_4 = 0 \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{f)}^{\text{hf}} \quad \begin{array}{l} 7x_1 + 14x_2 - 21x_3 = 7 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \\ 5x_1 + 10x_2 + 15x_3 = 5 \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 = 3 \end{array} \end{array}$$

3. Feladat. Határozza meg a következő egyenletrendszerek megoldását a benne szereplő paraméter(ek) függvényében:

$$\begin{array}{l} \text{a)} \quad 3x_1 - 2x_2 - x_3 = -3 \\ \quad -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ \quad \quad x_2 + ax_3 = 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{b)} \quad 3x_1 + 5x_2 - x_3 = 1 \\ \quad x_1 + ax_2 + 2x_3 = 2 \\ \quad x_1 + 9x_2 - 5x_3 = b \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{c)} \quad x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ \quad 2x_1 + (a-1)x_2 + 4x_3 = 0 \\ \quad 3x_1 - 5x_2 + (2-a)x_3 = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{d)}^{\text{hf}} \quad -x_1 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ \quad 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 9x_4 = 0 \\ \quad x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ \quad 3x_1 + ax_3 = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{e)}^{\text{hf}} \quad 2x_1 + x_2 = 0 \\ \quad x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ \quad \quad x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ \quad \quad \quad x_3 + ax_4 = b \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{f)} \quad 3x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2 \\ \quad x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ \quad x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 = 2 \\ \quad x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 3x_4 = a \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{g)}^{\text{hf}} \quad 3x_1 - 8x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 \\ \quad 5x_1 - 7x_2 - 3x_3 - 8x_4 = 5 \\ \quad 3x_1 - 11x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 3 \\ \quad x_1 + ax_2 - x_3 + 2ax_4 = -a \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{h)}^{\text{hf}} \quad ax_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ \quad x_1 + (a+1)x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ \quad x_1 + x_2 + (a+1)x_3 + x_4 = 4 \\ \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \end{array}$$