

A2 Gyakorlat

Műszaki Menedzser szakos hallgatóknak

9. hét - Mátrixok sajátértékei, sajátvektorai

Elmélet:

λ az \mathbf{A} mátrix sajátértéke és \mathbf{v} a hozzá tartozó sajátvektor, ha $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$.

Sajátértékek kiszámítása: $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$ egyenletből.

Sajátvektorok egy adott λ sajátértékre: $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ egyenletrendszer megoldásvektorai.

Egy sajátvektorokból alkotott ortonormált vektorrendszerre való bázisváltáskor a mátrix diagonális lesz, átlóelemei a sajátértékek.

Feladatok:

1. Feladat. Határozza meg az alábbi mátrix sajátértékeit és sajátvektorait:

$$\begin{aligned} a) \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, & \quad b) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, & \quad c) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \\ d) {}^{\text{hf}} \begin{pmatrix} 2 & 5 & -6 \\ 4 & 6 & -9 \\ 3 & 6 & -8 \end{pmatrix}, & \quad e) {}^{\text{hf}} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, & \quad f) {}^{\text{hf}} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. Feladat. Határozza meg az alábbi transzformációk mátrixát. A mátrix sajátértékei és sajátvektorai segítségével írja fel a leképezés invariáns altereit:

- a) tükrözés az xz -síkra és y -tengely körüli 45° -os forgatás
- b) ${}^{\text{hf}}$ tükrözés az $x = z$ síkra és z -tengely körüli 60° -os forgatás
- c) ${}^{\text{hf}}$ y -tengely körüli 30° -os forgatás és vetítés az yz -síkra
- d) x -irányú 2-szeres nyújtás és x -tengely körüli 90° -os forgatás

3. Feladat. Határozza meg az alábbi szimmetrikus mátrix sajátértékeit és sajátvektorait, írja fel a mátrixot a sajátvektorokból alkotott bázisban:

$$\begin{aligned} a) \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}, & \quad b) {}^{\text{hf}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, & \quad c) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \\ d) {}^{\text{hf}} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & \quad e) {}^{\text{hf}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}, & \quad f) \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4. Feladat. Alakítsuk az alábbi kvadratikus kifejezéseket kanonikus alakra:

- a) ${}^{\text{hf}}5x^2 + 8xy + 5y^2 = 9$
- b) $4x^2 - xy + y^2 = -7$
- c) ${}^{\text{hf}}6xy + 8y^2 = -11$