

## A2 Gyakorlat

### Műszaki Menedzser szakos hallgatóknak

#### 10. hét - Többváltozós függvények: határérték, folytonosság

**Elmélet:**

$z = f(x, y)$  nívógörbéi:  $c = f(x, y)$  implicit síkgörbék.

Az  $f(x, y)$  függvény határértéke  $h$  az  $(x_0, y_0)$  pontban, ha bármely  $\varepsilon > 0$ -hoz létezik  $\delta_x$  és  $\delta_y$ , úgy hogy ha  $|x - x_0| < \delta_x$  és  $|y - y_0| < \delta_y$ , akkor  $|f(x, y) - h| < \varepsilon$ .

Az  $f(x, y)$  folytonos egy pontban, ha létezik a határértéke és megegyezik a függvényértékkel.

**Feladatok:**

**1. Feladat.** Határozza meg az alábbi kétváltozós függvények értelmezési tartományát:

a)  ${}^{\text{hf}}f(x, y) = \frac{1}{9 - x^2 - y^2}$

b)  $f(x, y) = \ln(x + y)$

c)  ${}^{\text{hf}}f(x, y) = \sqrt{x + y}$

d)  $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

**2. Feladat.** Ábrázolja az alábbi felületeket a koordinátasíkokkal vett metszeteket és a nívógörbék segítségével:

a)  ${}^{\text{hf}}f(x, y) = x^2 - y$

b)  $f(x, y) = e^{x+y}$

c)  $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$

d)  ${}^{\text{hf}}f(x, y) = \cos \sqrt{x^2 + y^2}$

e)  $f(x, y) = \sqrt{2x^2 + 3y^2}$

f)  ${}^{\text{hf}}f(x, y) = \frac{1}{y - x + 1}$

**3. Feladat.** Írjuk fel a következő forgásfelületek egyenletét:

a)  $y = 0$  síkban a  $z = x^2$ -nek a  $z$ -tengely körüli megforgatása

b)  $z = 0$  síkban az  $y = \sqrt{1 - x^2}$ -nek az  $x$ -tengely körüli megforgatása

c)  ${}^{\text{hf}}y = 0$  síkban a  $z = \ln(x)$ -nek a  $z$ -tengely körüli megforgatása

d)  $y = 0$  síkban a  $z = \ln(x)$ -nek az  $x$ -tengely körüli megforgatása

**4. Feladat.** Számítsa ki a definíció alapján az alábbi kétváltozós függvények határértékét (folytonosak, vagy folytonossá tehetőek-e a függvények?):

a)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2} + 4} - 2$

b)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (3,\infty)} \frac{xy - 1}{y + 1}$

c)  ${}^{\text{hf}}\lim_{(x,y) \rightarrow (0,\infty)} \frac{2xy}{x^2 + y^2}$

**5. Feladat.** Számítsa ki az alábbi kétváltozós függvények határértékét a  $(0, 0)$  pontban az  $x$  és  $y$ -tengelyek, az  $y = mx$  egyenes illetve az  $y = x^2$  parabola mentén! Mire következtethetünk a kapott határértékekből?

a)  $f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}$

b)  ${}^{\text{hf}}f(x, y) = \frac{xy - x + y}{xy + x + y}$

c)  $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

d)  ${}^{\text{hf}}f(x, y) = \frac{xy^2}{x^3 + y^3}$

e)  $f(x, y) = \frac{x^2y}{x^4 + y^2}$

f)  ${}^{\text{hf}}f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^4 + y^4}}$