



Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Matematika Intézet

A Matematika A1a tárgy
gyakorlati anyaga
vegyész, környezetmérnök és biomérnök hallgatóknak

Összeállította: Ruzsa Zoltán
Szerkesztette: Nagy Ilona

BME Budapest
2013

1. feladatsor: halmazok, komplex számok

1. Így szokás halmazokat definiálni: $\{x \in \text{alaphalmaz} \mid \text{feltételek } x\text{-re}\}$. Definiáljuk:
- a) 1-nél kisebb pozitív valós számok halmaza,
 - b) racionális; irracionális számok halmaza,
 - c) a négyzetszámok halmaza,
 - d) a második síknegyed pontjai,
 - e)^{hf} páros számok halmaza,
 - f)^{hf} prímszámok halmaza,
 - g)^{hf} az egységsugarú gömbön belüli pontok,
 - h)^{hf} harmadfokú polinomok halmaza.
2. Fogalmazzuk meg, hogy mit mondanak a következő állítások. Melyek igazak és melyek nem a valós számok körében? Írjuk fel az állítások tagadását!
- a) $\forall x \exists y (y > x)$
 - b) $\exists a \forall b (b^a > 0)$
 - c) $p > 0 \Rightarrow [\exists q (p = q^2)]$
 - d)^{hf} $\forall x \forall y \exists z (x = y^z)$
 - e)^{hf} $x > 0 \Leftrightarrow [\exists y (y > 0 \wedge x - y > 0)]$
 - f)^{hf} $[x \in \mathbb{N} \wedge y \in (\mathbb{N} \setminus \{1, x\})] \Rightarrow x/y \notin \mathbb{N}$
3. Bizonyítsuk be, hogy az alábbiak igazak minden $n \in \mathbb{N}$ esetén!
- a) $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + \dots + n(3n + 1) = n(n + 1)^2;$
 - b) $2^n > n;$
 - c)^{hf} $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n + 1)} = \frac{n}{n + 1};$
 - d)^{hf} $9 \mid (4^n + 15n - 1);$
4. Legyen $z = 1 - 4i$. Mi lesz $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, \bar{z} , $|z|$, $\arg z$?
5. Ábrázoljuk a komplex számsíkon a következő halmazokat:
- a) $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$
 - b) $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 3\}$
 - c) $\{z \in \mathbb{C} : |z| < -2\}$
 - d) $\{z \in \mathbb{C} : |z - 3| = 2\}$
 - e) $\{z \in \mathbb{C} : |z + i| = |z - 2|\}$
 - f) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 3\}$
 - g) $\{z \in \mathbb{C} : 1 < \arg z < 2\}$
 - h)^{hf} $\{z \in \mathbb{C} : |z + 2i| = \pi\}$
 - i)^{hf} $\{z \in \mathbb{C} : |z + i| \geq |z|\}$
 - j)^{hf} $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq \operatorname{Re} z\}$
 - k)^{hf} $\{z \in \mathbb{C} : -3 > \operatorname{Re} z \geq 0\}$
 - l)^{hf} $\{z \in \mathbb{C} : z = \bar{z}\}$
6. Mi lehet z , ha
- a) $\bar{z} - z = 3, \operatorname{Im} z = 2$
 - b) $\operatorname{Im} z = 1, |z| = \sqrt{2}$
 - c)^{hf} $\arg z = 3\pi/4, \operatorname{Re} z = 5$
 - d)^{hf} $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z, |z - 2| = 3$

Emlékeztető

- Logikai jelek: \forall minden; \exists létezik; $\exists!$ létezik egyetlen; \wedge és; \vee vagy; \neg nem; \Rightarrow következik; \Leftrightarrow ekvivalens;
- Halmazok: \mathbb{N} természetes számok; \mathbb{Z} egészek; \mathbb{Q} racionálisok; \mathbb{R} valós számok; \emptyset üres halmaz.
- A *komplex számok* a $z = a + ib$ ($a, b \in \mathbb{R}$) alakú számok, ahol $i = \sqrt{-1}$. Az itt szereplő a a szám *valós része*, azaz $\operatorname{Re}(z) = a$, míg b az *imaginárius*, vagy *képzetes része*, azaz $\operatorname{Im}(z) = b$. Minden 0-tól különböző komplex szám alkalmas $r \geq 0, 0 \leq \varphi < 2\pi$ -vel egyértelműen írható $z = r \cos \varphi + ir \sin \varphi$ alakba. Itt r a szám *abszolút értéke*, azaz $|z| = r$, φ az *argumentuma*, azaz $\arg(z) = \varphi$.
- Egy $z = a + ib$ komplex szám *konjugáltja*: $\bar{z} = a - ib$.

2. feladatsor: komplex számok, n -edik gyökvonás

1. Írjuk a következő komplex számokat $a + ib$ alakba!

a) $(1 + 4i)(4 - 2i)$ b) i^7 c) $\frac{3 - 2i}{-2 + i}$ d) $\frac{3 - 2i}{3i}$
e)^{hf} i^{2009} f)^{hf} $\frac{1}{i}$ g)^{hf} $\frac{2 - i}{i - 1}$ h)^{hf} $(2 + i)^{37}(2 - i)^{38}$

2. Ábrázoljuk a komplex számsíkon a következő halmazokat:

a) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z + 1) = |z - 1|\}$
b) $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 5, \operatorname{Im}(z) \geq \operatorname{Re}(z)\}$
c)^{hf} $\{z \in \mathbb{C} : |z| < |z - 2i|, |z - i| \leq 1\}$
d)^{hf} $\{z \in \mathbb{C} : |z + i| + |z + 3| = 7\}$

3. Írjuk a következő komplex számokat $a + ib$, esetleg $r \cos \varphi + ir \sin \varphi$ alakba!

a) $(1 - i)^{997}$ b) $\sqrt{2}$ c) \sqrt{i}
d) $\sqrt[3]{1}$ e) $\sqrt[3]{1 + i}$ f)^{hf} $\sqrt[3]{27i}$
g)^{hf} $(1 + i\sqrt{3})^{100}$ h)^{hf} $\sqrt{\frac{i}{i - 3}}$ i)^{hf} $\frac{\sqrt{i}}{1 - i}$

4. Oldjuk meg a következő egyenleteket a komplex számok körében. Az egyenletekben szereplő polinomoknak írjuk fel a gyöktényezőző felbontását!

a) $z^2 - iz + 3 + 2i = 0$
b) $z^3 - 8 = 0$
c)^{hf} $\bar{z} - z = 0$
d)^{hf} $3z^2 - iz^2 + 3iz + 6 - i = 0$
e)^{hf} $z^6 + 16z^2 = 0$

5. Adjuk meg az összes olyan z komplex számot, amelyre

a) $\operatorname{Re}(z) + 2\operatorname{Im}(z) = 0$ és $\operatorname{Re}(z^2) - 2\operatorname{Im}(z) = 1$
b) $z^2 + \bar{z} = 0$
c)^{hf} $\operatorname{Re}(z^2) = 2\operatorname{Im}(z)$ és $\operatorname{Im}(z^2) = 2\operatorname{Re}(z)$

6. Hány komplex gyöke lehet egy hetedfokú valós együtthatós polinomnak?

7. Egy szabályos hatszög egyik csúcsa $2 + i$, középpontja $3 + 2i$. Írjuk fel a többi csúcsát!

8.^{hf} Van-e olyan z komplex szám, amelyre \bar{z}^2 , (azaz $(\bar{z})^2$) és z^{-2} (azaz $(z)^{-2}$) egyenlő?

9.^{hf} Hol a hiba? $-1 = i^2 = i \cdot i = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1 \cdot 1} = \sqrt{1}\sqrt{1} = (\sqrt{1})^2 = 1$

Emlékeztető

- $(r \cos \alpha + ri \sin \alpha)(s \cos \beta + si \sin \beta) = rs(\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)).$

- $\sqrt[n]{r(\cos \alpha + i \sin \alpha)} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n} \right) \right)$ ahol $k = 0, 1, \dots, (n-1)$

3. feladatsor: sorozatok határértéke

1. Állapítsuk meg, hogy nullsorozat-e! Ha igen, akkor oldjuk meg a *közelítés alapfeladatát*, azaz a definíció alapján keressünk N küszöböt tetszőleges $\varepsilon > 0$ -hoz.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } a_n = 0 & \text{b) } b_n = \frac{1}{n} & \text{c) } c_n = (-1)^n \\ \text{d) } d_n = \frac{1}{n^2} & \text{e) } e_n = \sin n & \text{f) } f_n = \frac{(-1)^n}{\log_{10} n} \end{array}$$

2. Határozzuk meg a határértékeket, és keressünk N küszöböt ε -hoz a definíció alapján!

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim \frac{3n-1}{4n+99} & \text{b) } \lim \frac{3n^2+4n+7}{n^2+n+1} & \text{c) } \lim \frac{n^2-10^8}{5n^6+2n^3-1} \\ \text{d) } \lim \frac{7n+4}{2n-1} & \text{e) } \lim \frac{5n^3-2}{n^3+3} & \text{f) } \lim \frac{n-6}{6n^2+16} \end{array}$$

3. Írjuk fel formulával (minél kevesebb zárójellel) az a_n sorozatra vonatkozó állításokat:

- a) a_n korlátos,
- b) a_n monoton növekvő,
- c) $a_n \not\rightarrow a$,
- d) a_n divergens.

4. Számítsuk ki az $a_n = \left(\sqrt{n^2+n-3} - n\right)$ sorozat határértékét, és keressünk N küszöbindexet az $\varepsilon = 0.01$ hibahatárhoz! Bizonyítsuk be, hogy tényleg annyi a határérték!

5. Egy egyre pontosodó mérési sorozat n -edik mérésének eredménye $a_n = 1 + (-1)^{n+1}2^{3-n}$. Hányadik mérés után csökken a mért mennyiség és a mért érték eltérése (azaz a hiba) $\varepsilon = 10^{-4}$ alá?

6. Vizsgáljuk konvergencia szempontjából az alábbi sorozatokat:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } a_n = \frac{(n+1)!}{(5-2n)n!} & \text{b) } b_n = \frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{3}} \end{array}$$

7. A gonosz varázsló mindennap arannyá változtatja a Földön lévő vízmennyiség felét. Mennyi idő múlva csökken a vízkészlet 1 poháryi alá? (A Földön kb. $1386 \cdot 10^6 \text{ km}^3$ víz van.) Mennyi idő múlva marad csak 1 vízmolekula?

Emlékeztető

- Az $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots$ valós számokból álló sorozatot (a_n) jelöli.
- Az a_n sorozat *nullsorozat*, ha $\forall \varepsilon > 0$ -hoz $\exists N \in \mathbb{N}$, hogy $n > N$ esetén $|a_n| < \varepsilon$. Ezt kétféleképp lehet jelölni: $a_n \rightarrow 0$ vagy $\lim a_n = 0$.
- Az a_n sorozat *határértéke az a szám*, jelölve $a_n \rightarrow a$ vagy $\lim a_n = a$, ha $a_n - a$ nullsorozat. Ekkor a_n *konvergens*, különben *divergens*.
(Közvetlenül ez így is fogalmazható: $\lim a_n = a$, ha $\forall \varepsilon > 0$ -hoz $\exists N \in \mathbb{N}$, hogy $n > N$ esetén $|a_n - a| < \varepsilon$.)

4. feladatsor: sorozatok határértéke

1. Vizsgáljuk: korlátosság, supremum, infimum, határérték.

a) $\frac{\cos(n\pi)}{n} + (-1)^{n+1}$ b) $(-2)^n + \frac{1}{n!}$ c) $n^{\text{hf}} n^{-n}$ d) $n^{\text{hf}} n^{(-1)^n}$

2. Mennyi lehet $\lim a^n$ értéke (a -tól függően, $a \in \mathbb{R}$)?

3. Számoljuk ki a határértékeket:

a) $\lim \frac{n^{-1}}{1+n^{-2}}$ b) $\lim \frac{n^5 - 216n^2 + n - 2}{-n^8 + 500n^4 + 86}$

c) $\lim \frac{n^{22} + 18n^{18}}{8n^{22} - 4n^2}$ d) $\lim \frac{2^n + 82n^{47} + 23610}{-14n^{25} + 2n^8 + 3}$

e) $\lim \frac{5^n + 401n + 402}{2^{2n} + n - 88}$ f) $\lim \frac{25n! + n^{25}}{25n^n}$

g) $\lim \left(\sqrt{4n-3} - \sqrt{n+9} \right)$ h) $\lim \left(\sqrt{2n^2 + 5n} - \sqrt{2n^2 - n} \right)$

i) $\lim \left(\sqrt{n^4 + 2n} - n^2 \right)$ j) $\lim \frac{1}{n - \sqrt{n^2 + 3n + 5}}$

4. Igaz? Hamis?

a) ha $a_n \rightarrow a$, akkor $a_n^2 \rightarrow a^2$

b) ha $a_n^2 \rightarrow a^2$, akkor $a_n \rightarrow a$

c) ha $a_n > 0$ és $b_n \rightarrow \infty$, akkor $a_n b_n \rightarrow \infty$

d) $a_n \rightarrow 0 \Rightarrow 1/a_n \rightarrow \infty$

e) $a_n \rightarrow \infty \Rightarrow 1/a_n \rightarrow 0$

f) [$a_n > 0$ és a_n konvergens] $\Rightarrow \lim a_n > 0$

g) [a_n korlátos, $b_n \rightarrow 0$] $\Rightarrow a_n b_n \rightarrow 0$

5.^{hf} Számoljuk ki a következő határértékeket:

a) $\lim \frac{n^{2/3} + 8n^{\sqrt{3}} + \sqrt{n} + 12}{n^2 + 5n - 7}$

b) $\lim \frac{n^{-2} + 4}{2n^{-3} - 1}$

c) $\lim \frac{9\sqrt[3]{n} - 3\sqrt{2n} + 1}{\sqrt[4]{n} + \sqrt{3n}}$

d) $\lim \frac{\log_{10}(n^2) + 3}{\log_3(n) - 1}$

e) $\lim \frac{(-3)^{n+1} + 2^{2n+3}}{8 + 5^n}$

f) $\lim \frac{n^3 \cdot 2^n + 3^n}{2^{2n} - 3n^2}$

g) $\lim \frac{4^{n-1} + n^5 \cdot 3^{n+3}}{2^{2n+3} + 2^{n-3}}$

h) $\lim \frac{7^n + n^7 + 7}{2^{2n} + (2n)^2 + 2}$

i) $\lim \left(\sqrt{9n^2 + 7} - \sqrt{9n^2 + 2n + 5} \right)$ j) $\lim \left(\sqrt[3]{n^3 - 3n + 3} - \sqrt[3]{n^3 + 123n^2 - 1} \right)$

6.^{hf} Legyen $p(x)$ és $q(x)$ egy-egy polinom. Adjunk módszert $\lim \frac{p(n)}{q(n)}$ meghatározására!

Emlékeztető

- Ha a_n divergens, de $\forall K$ -hoz $\exists N \in \mathbb{N}$, hogy $n > N$ esetén $a_n > K$, akkor $a_n \rightarrow \infty$.
- Egy $H \subset \mathbb{R}$ halmaz *infimuma* (azaz $\inf H$) a H halmaz alsó korlátjai közül a legnagyobb. H *supremuma* (azaz $\sup H$) pedig H felső korlátjai közül a legkisebb. H *minimuma* l , ha $l \in H$ és $l = \inf H$. H *maximuma* h , ha $h \in H$ és $h = \sup H$. Egy sorozat infimuma, supremuma az elemei által alkotott halmaz infimuma, supremuma.

5. feladatsor: speciális sorozatok, limesz superior, limesz inferior

1. Számoljuk ki:

a) $\lim \left(1 - \frac{3}{n^3}\right)^{n^3}$

b) $\lim \left(\frac{n-1}{n+2}\right)^{n-3}$

c) $\lim \left(\frac{n^2+2}{n^2+3}\right)^{n^2+7}$

d) $\lim \left(\frac{3n+5}{3n-4}\right)^{3n}$

e) $\lim \left(\frac{4n+1}{4n-3}\right)^{\frac{n}{2}+1}$

f) $\lim \frac{\left(5 - \frac{1}{n}\right)^n}{\left(5 + \frac{1}{n}\right)^n}$

g)^{hf} $\lim \left(1 + \frac{1}{n^2+3}\right)^{4n^2}$

h)^{hf} $\lim \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$

i)^{hf} $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$

2. Felhasználva hogy $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$ és $\sqrt[p]{p} \rightarrow 1$ ($p > 0$), számoljuk ki az alábbi határértékeket:

a) $\lim \sqrt[2n]{2n}$

b) $\lim \sqrt[n]{2n}$

c) $\lim \sqrt[2n]{n}$

d) $\lim \sqrt[99n]{99n^{99}}$

e) $\lim \sqrt[n]{n+5}$

f) $\lim \sqrt[n]{2n^3+3}$

g)^{hf} $\lim \sqrt[n]{\frac{2n^2+3}{4n^2+n}}$

h)^{hf} $\lim \sqrt[n^2]{n}$

3.^{hf} A plutónium-238 felezési ideje 87.7 év. Jelöljük a_n -el egy gyártáskor 50 kilogramm Pu-238-at tartalmazó atombombában n év eltelte után maradó Pu-238 tömegét. Írjuk fel az a_n sorozatot! Hányadik évben fog a Pu-238 tömege 0.1 kilogramm alá csökkenni?

4. Határozzuk meg a következő sorozatok limesz superiorját, limesz inferiorját, és ha létezik a limeszét!

a)^{hf} $a_n = \frac{4-n^2}{n+3}$

b) $b_n = \left(\cos n\frac{\pi}{2}\right) \frac{2n^2-3}{n^2+n+8}$

c) $c_n = \left(\cos n\frac{\pi}{2}\right) \frac{2n^2-3}{n^3+n+8}$

d) $d_n = \frac{(-3)^n+8}{5+2^{2n+1}}$

e) $e_n = \frac{(-4)^n+8}{5+2^{2n+1}}$

Emlékeztető

- A *rendőrszabály* vagy *csendőrelv*: Ha $a_n \leq b_n \leq c_n$, és $\lim a_n = \lim c_n = h$, akkor $b_n \rightarrow h$ is.
- Előadáson szerepelt, hogy az $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ sorozat konvergens, és a határértékére bevezettük az e jelölést. Ekkor $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén $\lim \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$.
- \limsup és \liminf mindig létezik (lehet $\pm\infty$).
- \lim pontosan akkor létezik, ha $\limsup = \liminf$, és ekkor $\lim = \limsup = \liminf$.

6. feladatsor: határértékszámolás, folytonosság

1. A definíció alapján határozzuk meg a határértékeket. Számoljuk ki, hogy x -nek mennyire kell közel lennie x_0 -hoz ahhoz, hogy a függvényérték a határértéket legalább $\varepsilon = 10^{-2}$ pontossággal megközelítse.

a) $\lim_{x \rightarrow 4} 3x - 1$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sgn} x$

c) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(x^2 - 1)}{x + 1}$

d) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 - 2x}{x + 3}$

e) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{8 - 2x^2}{x + 2}$

f) $\lim_{x \rightarrow -3} \sqrt{1 - 5x}$

2. Definiáljuk a következő fogalmakat:

a) $\lim_{x \rightarrow 7^+} f(x) = -\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$

3. Számoljuk ki a határértékeket:

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^9 + 4x^6 + 1)$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 3x + 2}{(x^2 - 1)^2}$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{(x^2 - 1)^2}$

d) $\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{[6 - x]}{2 + \{3x\}}$

e) $\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{[6 - x]}{2 + \{3x\}}$

f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt{3x^2 + 1} - 2x}$

g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 3})$

h) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt{4x^2 + 3x} - 2x)$

i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4x} + x}$

j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9 + x} - 3}{\sqrt{4 + x} - 2}$

k) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x^2 - 1} + \frac{3}{x^3 - 1} \right)$

l) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^5 - 3x^2 + 1}{x^7 + 4x^3 + 5}$

4. Számoljuk ki a határértékeket:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{\sin 3x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 9x^2}{x^2}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x^2}{\operatorname{tg} 3x^2}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x - \sin 8x}{7x + \sin 2x}$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos x}$

5. Ábrázoljuk a függvényeket, majd határozzuk meg a határértékeket.

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sin x$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$

6. Mutassunk példát olyan $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényre, amely

a) minden pontban folytonos

b) semely pontban sem folytonos

c) pontosan egy pontban nem folytonos

d) pontosan egy pontban folytonos

Emlékeztető

– Egy $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek a *határértéke* x_0 -ban a , (jelölésben $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$), ha minden $(x_n) \rightarrow x_0$, $x_i \neq x_0$ sorozat esetén $f(x_n) \rightarrow a$. Ekvivalens definíció: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, ha $\forall \varepsilon > 0$ -hoz $\exists \delta$, hogy $|x - x_0| < \delta$, és $x \neq x_0$ esetén $|f(x) - a| < \varepsilon$.

– f *folytonos* az x_0 pontban, ha $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. f *folytonos*, ha az értelmezési tartományának minden pontjában folytonos.

7. feladatsor: differenciálszámítás

1. Hol deriválhatóak a következő függvények? Adjuk meg a deriváltakat!

- | | | | |
|--|--------------------------------------|-----------------------------|---|
| a) x^7 | b) $ x $ | c) $1/x^{111}$ | d) $x^{-7}\sqrt[5]{x}$ |
| e) $\sin x^3$ | f) $\operatorname{ctg} x$ | g) $x \sin x$ | h) 7^x |
| i) $\frac{x^2 + 2x - 1}{x^7 + 2x + 1}$ | j) $\frac{\sin x}{x^3} + e^x \cos x$ | k) $\sin^5(x^3)$ | l) ^{hf} $\operatorname{sgn} x$ |
| m) ^{hf} $x \sin x \cos x$ | n) ^{hf} $\log_3 x$ | o) ^{hf} $\log_x x$ | p) ^{hf} $(x^3 - 3x + 8)^7$ |
| q) ^{hf} $\frac{x^2 + 1}{\sqrt{1 + 2x^2}}$ | r) ^{hf} $(\sin^3(x) + 2)^7$ | s) ^{hf} x^x | t) ^{hf} $(\sin x)^{\cos x}$ |

2. a) Legyen $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$. Mutassuk meg, hogy $f'(0)$ nem létezik!
 b) Legyen $f(x) = \sqrt[3]{x^2} \cdot \sin \sqrt[3]{x^2}$. $f'(x) = ?$ ($x = 0$ -ban használjuk a definíciót.)
 c)^{hf} Legyen $f(x) = |x - 1| \cdot \sin(2x - 2)$. $f'(x) = ?$ ($x = 1$ -ben használjuk a definíciót.)

3. Legyen $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}$, ha $x \neq 1$ és $f(1) = \beta$.

- a) Megválasztható-e β értéke úgy, hogy az f függvény folytonos legyen $x = 1$ -ben?
 b) $f'(x) = ?$, ha $x \neq 1$
 c) $\lim_{x \rightarrow 1} f'(x) = ?$ Létezik-e $f'(1)$?

4. Írjuk fel az alábbi függvények grafikonjának x_0 abszcisszájú pontjához húzott érintőegyenest egyenletét!

- | | |
|--|---|
| a) $f(x) = x^3$, $x_0 = 2$; | b) $f(x) = \ln 3x$, $x_0 = e^2/3$; |
| c) ^{hf} $f(x) = \sin x$, $x_0 = \pi$; | d) ^{hf} $f(x) = 1 + \sin(xe^{2x+1})$, $x_0 = 0$. |

5. Milyen α és β mellett deriválható?

- | | |
|---|--|
| a) $f(x) = \begin{cases} \alpha + \cos x & \text{ha } x > 0 \\ \beta x & \text{különben} \end{cases}$ | b) ^{hf} $g(x) = \begin{cases} \sin(\alpha x) & \text{ha } x > 0 \\ x + \beta & \text{különben} \end{cases}$ |
|---|--|

6. Pista ceruzájának a hegye a $(4, 0)$ pontban van, és innen érintőegyenest szeretne húzni az $f(x) = x^2/3$ függvényhez. Hány fokban szögben kell elindítania a ceruzáját?

7.^{hf} Van-e az $f(x) = x^2 - 1$ parabolának olyan érintője, amely átmegy a $(2, 2)$ ponton? Ha igen, írjuk fel az érintő egyenletét!

8.^{hf} Ha a holdon felfelé elhajítanánk egy követ 24m/s kezdősebességgel, akkor t másodperc múlva $24t - 0.8t^2$ magasan lenne.

- | | |
|---|----------------------------------|
| a) Írjuk fel a kő sebességét az idő függvényében. | b) Milyen magasra repül a kő? |
| c) Mekkora a holdon a gravitációs gyorsulás? | d) Mennyi idő alatt esik vissza? |

Emlékeztető

- Ha az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény értelmezve van x_0 egy környezetében, akkor a $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ számot (amennyiben létezik és véges) f x_0 -beli *deriváltjának* nevezzük, és $f'(x_0)$ -val jelöljük.
- Az $x \mapsto f'(x)$ függvényt f *derivált függvényének*, vagy röviden *deriváltjának* nevezzük, és f' -vel jelöljük.

A deriválás alapszabályai

$$c' = 0$$

$$(cf)' = cf'$$

$$(f + g)' = f' + g'$$

$$(fg)' = f'g + g'f$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

$$(f \circ g)' = (f' \circ g)g'$$

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

$$(cf(x))' = cf'(x)$$

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g(x)^2}$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$$

$$(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Az alapfüggvények deriváltjai

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$$

$$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$$

$$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{-1}{1+x^2}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$$

$$(\operatorname{cth} x)' = \frac{-1}{\operatorname{sh}^2 x}$$

$$\left(\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \quad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} \right)$$

Függvényvizsgálat

az $[a, b]$ intervallumon $f' \geq 0$ \Rightarrow f monoton növekszik $[a, b]$ -n
az $[a, b]$ intervallumon $f' \leq 0$ \Rightarrow f monoton csökken $[a, b]$ -n
 $f'(a) = 0$, és f' előjelet vált a -nál \Rightarrow f -nek lokális szélsőértéke van a -ban

az $[a, b]$ intervallumon $f'' \geq 0$ \Rightarrow f konvex $[a, b]$ -n
az $[a, b]$ intervallumon $f'' \leq 0$ \Rightarrow f konkáv $[a, b]$ -n
 $f''(a) = 0$, és f'' előjelet vált a -nál \Rightarrow f -nek a inflexió pontja

8. feladatsor: L'Hospital-szabály, szélsőérték-keresés

1. Milyen α, β -ra deriválhatóak a következő függvények?

$$\text{a) } \begin{cases} \alpha - \cos x & \text{ha } x > 0 \\ \beta x & \text{különben} \end{cases} \quad \text{b) }^{\text{hf}} \begin{cases} \sin x & \text{ha } x > 0 \\ \alpha x + \beta & \text{különben} \end{cases} \quad \text{c) }^{\text{hf}} \begin{cases} x^3 + \alpha & \text{ha } x > 1 \\ 2 - \beta x & \text{különben} \end{cases}$$

2. Kiszámolandó határértékek:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x - 1} & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^3} & \text{c) } \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-5x} \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow 1} (\ln x) \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} x & \text{e) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x + \sin x} & \text{f) }^{\text{hf}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3} \\ \text{g) }^{\text{hf}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} & \text{h) }^{\text{hf}} \lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{x \cos x}{(2\pi - x)^2} & \text{i) }^{\text{hf}} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \sin x} \right) \\ \text{j) }^{\text{hf}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln x^7 & \text{k) }^{\text{hf}} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) & \text{l) }^{\text{hf}} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\operatorname{tg} x} \\ \text{m) }^{\text{hf}} \lim_{x \rightarrow \pi/4} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x} & \text{n) }^{\text{hf}} \lim_{x \rightarrow 0^+} (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}} \end{array}$$

3. Keressük meg az alábbi függvények lokális szélsőértékeit:

$$\text{a) } f(x) = x^3 - 3x^2 - 18x + 5 \quad \text{b) }^{\text{hf}} f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + 7$$

4. Zsiga pálinkafőzdeje hetente x hordó pálinkát $x^3 - 6x^2 + 15x$ ezer forint költséggel képes előállítani, és y hordót $9y$ ezer forintért tud eladni. Mennyit kell termelnie, hogy maximális legyen a profitja?

5. Keressük meg a függvények adott intervallumon vett szélsőértékeit.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f(x) = x^2 + 2x - 3, & I = [-3, 1] \quad \text{b) } f(x) = |x|, \quad I = (-1, 1) \\ \text{c) }^{\text{hf}} f(x) = \sin x, & I = [-1, 2] \quad \text{d) }^{\text{hf}} f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5, \quad I = [-1/2, 4) \end{array}$$

6.^{hf} Ede akkora téglalap alakú folyóparti telket kap, amekkorát 1000 méternyi drótkerítéssel körül tud keríteni. (A folyópart egy egyenes, a teleknek erre kell illeszkednie. A telek folyóparti oldalára nem kell kerítés.) Milyen alakban kell felépítenie a kerítést, hogy a lehető legnagyobb területű legyen a telke?

7.^{hf} Hogyan válasszunk két pozitív számot úgy, hogy az összegük 50 legyen, a szorzatuk pedig a lehető legnagyobb?

Hogyan válasszunk két pozitív számot, hogy a szorzatuk 50 legyen, az összegük pedig a lehető legnagyobb?

Emlékeztető

– A *L'Hospital-szabály*: Legyenek az f és g függvények differenciálhatóak az x_0 egy környezetében, és legyen itt $g(x) \neq 0$ és $g'(x) \neq 0$. Legyen továbbá $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$

vagy $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)| = +\infty$. Ha $\frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g'(x)} = A$, akkor $\frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = A$, ahol x_0 és A

lehet valós szám vagy $\pm\infty$.

Szöveges szélsőérték-feladatok

1. Egy téglalap alakú, 1×2 méteres kartonpapírból felül nyitott, téglalap alakú dobozt hajtogatunk úgy, hogy a papír négy sarkából négy egybevágó négyzetet vágunk ki, majd felhajtjuk a doboz oldalait. Mekkora négyzeteket kell kivágnunk, hogy a doboz térfogata maximális legyen?
2. Egy épülő atlétikapályán két párhuzamos egyenes szakaszból és az őket összekötő félkörívекből áll a futópálya. Hogyan kell kialakítani a pálya alakját, hogy a futópálya hossza 400 méter legyen, és a lehető legnagyobb területű téglalap alakú focipálya férjen el a belsejében?
3. A Populista Párt vezetője tudja, hogy ha hatalomra kerülése esetére a bérek x -szeresére való növelését ígéri meg, akkor a szavazók $30(x - 1)^2$ százaléka nem fog hinni neki, viszont a maradék szavazók $50(x - 1)$ százaléka a pártra fog szavazni. Hányszoros bérnövekedést kell ígérnie, hogy a lehető legtöbb szavazatot kapja?
4. Egy derékszögű háromszög átfogója 10 cm. Maximum mennyi lehet a területe?
5. Egy egyenes körkúp alapkörének a sugara 2 méter, magassága 5 méter. Határozzuk meg a kúpba írható maximális térfogatú henger adatait!
- 6.^{hf} Magyarországon a teljes lakosság 1 év alatt összesen 10^{13} forintnyi jövedelmet kap. Tudjuk, hogy ha a keresetek $(100y)\%$ -át kéne jövedelemadóként befizetni, akkor a lakosság a befizetendő adó $(100y^3)\%$ -át elcsalná (nem fizetné be). Ilyen feltételek mellett mekkorára kéne az adókulcsot állítani, hogy a lehető legtöbb pénz folyjon be?
- 7.^{hf} Egy egyenlő szárú trapéz két szára és az alapja 1 cm hosszú. Hogyan kell megválasztani a száraznak az alappal bezárt szögét, hogy a területe maximális legyen?
- 8.^{hf} Lenke elhatározta, hogy feltölti a 10000 literes úszómedencéjét, melyhez a vizet a közeli kútról fogja vödörrel hordani. Tetszőlegesen nagy vödört választhat a munkához, de tudja, hogy ha egy fordulóval l liter vizet hoz, akkor a forduló $64 + l^2$ másodpercig fog tartani. Hogyan válassza meg l értékét, hogy a lehető leggyorsabban végezzen?
- 9.^{hf} Roland elhatározza, hogy kifesti a szobáját. Persze ehhez előbb a bútorokat többé-kevésbé össze kell tologatnia, hogy mindenütt hozzáférjen a falhoz. Roland tudja, hogy ha t órát fordít a bútorok összetologatására, akkor a festéssel $10(1 + 1/t)$ óra alatt végez, viszont a festés után megint t órát vesz igénybe a bútorok eredeti helyzetbe való állítása. Hogyan kell t értékét megválasztania, hogy a lehető leghamarabb legyen kész?
- 10.^{hf} Egy hajó üzemeltetési költségeit a fűtőanyag-fogyasztás és egyéb kiadások képezik. Az óránként felhasznált fűtőanyag A értéke függ a sebességtől; az összefüggést az $A = 0,03 \cdot v^3$ képlet fejezi ki, ahol v (km/h) a sebesség; az egyéb kiadások B forintot tesznek ki. Határozzuk meg, milyen sebességgel haladjon a hajó, hogy a kilométerenkénti költség a lehető legkisebb legyen. (Vegyük B -t pl. 480 Ft-nak.)
- 11.^{hf} Két egymást merőlegesen metsző folyosó szélessége 2,4 m, illetve 1,6 m. Mekkora az a leghosszabb létra, amelyet (vízszintes helyzetben) az egyik folyosóról a másikra át lehet vinni?
- 12.^{hf} Egy házra olyan ablakokat terveznek, amelyeknek alsó része téglalap alakú, felső része pedig a téglalaphoz illő félkör. Egy-egy ablak adott kerülete K . Hogyan kell megválasztani az ablakok méreteit, hogy minél több fényt engedjenek át?

9. feladatsor: Taylor-polinom, függvényvizsgálat

- Számoljuk ki a következő Taylor-polinomokat, és írjuk fel a hozzájuk tartozó hibtagot!
 - $f(x) = (x - 2)^{-2}$, középpont: 3, $T_3(x) = ?$
 - $f(x) = \sin x$, középpont: π , $T_n(x) = ?$
 - $f(x) = e^x$, középpont: 0, $T_5(x) = ?$
 - $f(x) = \ln \cos x$, középpont: 0, $T_6(x) = ?$
- $\ln(1.1)$ -et szeretnénk közelítőleg kiszámolni a $\ln(1 + x)$ függvény 0 középpú Taylor-polinomja segítségével. Hányadik tagig kell elmennünk, hogy a közelítés hibája 10^{-8} alá csökkenjen?
- Írjuk fel az $f(x) = x^2 + 5x - 3 + \sin 2x$ függvény $x_0 = 0$ középpontú harmadrendű Taylor-polinomját és a hozzá tartozó hibtagot! Legfeljebb mekkora hibát követünk el, ha $f(0.1)$ értékét $T_3(0.1)$ értékével közelítjük?
- Számoljuk ki közelítőleg a megadott számokat egy alkalmas függvény 2., 3., 4. rendű Taylor-polinomját használva eszközül. Becsüljük meg a közelítés hibáját!
 - $\sqrt{2}$
 - $\sin 33^\circ$
 - e
- Végezzük el a függvényvizsgálatot, rajzoljuk le a függvényt.
 - $2x^6 - 15x^5 + 20x^4$
 - $\frac{7}{x} - x$
 - $\frac{x}{x^2 - 1}$
 - $\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 1}$
 - $\frac{x}{(1 + x)^2}$
 - $x^3 e^{-x}$
 - e^{-x^2}
 - $\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$
- Már láttuk, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$, sőt, $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x} = 1$.
 - deriváljuk az $\sqrt[x]{x}$ függvényt!
 - hol veszi fel az $\sqrt[x]{x}$ függvény a maximumát?
 - ábrázoljuk a $\sqrt[x]{x}$ függvényt!
 - $\max\{\sqrt[n]{n} \mid n \in \mathbb{N}\} = ?$
- Keressük meg az $y^2 = x$ parabolának azt a pontját, amely a $(6, 0)$ ponthoz a legközelebb van!

Emlékeztető

– Egy n -szer deriválható függvény a körüli n . rendű Taylor-polinomja:

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k. \text{ A közelítés hibtagja: } R_n(x, \xi) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - a)^{n+1}$$

Taylor tétele: Ha $f^{(n)}$ differenciálható az $[a, b]$ intervallumon, akkor létezik egy $\xi \in [a, b]$, hogy $f(b) = T_n(b) + R_n(b, \xi)$.

– *Függvényvizsgálat* alatt azt értjük, hogy a függvény első két deriváltjának az előjelét megvizsgálva megállapítjuk, hogy a függvény hol monoton, hol konvex, hol vannak lokális szélsőértékei, inflexiós pontjai, majd ezek ismeretében lerajzoljuk a függvény grafikonját.

10. feladatsor: primitívfüggvény-keresés

1. Keressük meg a primitív függvényeket.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \int (3x^9 - 2x^2 + 1) dx & \text{b)} \int \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x} dx & \text{c)} \int \frac{x^2 - 7x + 8}{x^2} dx \\ \text{d)}^{\text{hf}} \int \frac{x^2}{x^2 + 1} dx & \text{e)}^{\text{hf}} \int \operatorname{tg}^2 x dx & \text{f)}^{\text{hf}} \int \frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x} dx \end{array}$$

2. Keressük meg a primitív függvényeket.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \int (2x + 3)^5 dx & \text{b)} \int \frac{1}{(2x + 3)^5} dx & \text{c)} \int \frac{2}{9x + 1} dx \\ \text{d)} \int \frac{2}{(9x + 1)^2} dx & \text{e)} \int \frac{2}{9x^2 + 1} dx & \text{f)} \int \frac{2}{9x^2 + 3} dx \\ \text{g)} \int \frac{2x}{9x^2 + 3} dx & \text{h)} \int \sqrt{5x - 8} dx & \text{i)} \int \sqrt[3]{1 - 2x} dx \\ \text{j)} \int e^{11x} + \cos(11x) dx & \text{k)}^{\text{hf}} \int \frac{x^3}{x^4 + 5} dx & \text{l)}^{\text{hf}} \int \operatorname{tg} x dx \\ \text{m)}^{\text{hf}} \int \frac{e^{3x}}{e^{3x} + 5} dx & \text{n)}^{\text{hf}} \int \frac{1}{x \ln x} dx & \text{o)}^{\text{hf}} \int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2} \cdot \arcsin x} dx \end{array}$$

3. Keressük meg a primitív függvényeket.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \int x^2(x^3 - 2)^5 dx & \text{b)} \int x \cdot \sqrt[3]{x^2 + 1} dx & \text{c)} \int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx \\ \text{d)} \int \frac{x}{\sqrt{(x^2 + 1)^3}} dx & \text{e)} \int e^{9x}(e^{9x} + 1)^9 dx & \text{f)} \int x e^{3x^2} dx \\ \text{g)} \int \frac{e^{\sqrt{t}} dt}{\sqrt{t}} & \text{h)} \int \sin^3 x \cos x dx & \text{i)} \int \frac{\ln x}{x} dx \\ \text{j)} \int \frac{\ln^3 x}{x} dx & \text{k)} \int \frac{1}{x \ln^3 x} dx & \text{l)} \int x \cos x dx \\ \text{m)} \int x e^{2x} dx & \text{n)} \int x^2 e^x dx & \text{o)}^{\text{hf}} \int \ln x dx \\ \text{p)}^{\text{hf}} \int \operatorname{arctg} x dx & \text{q)}^{\text{hf}} \int e^x \sin x dx & \text{r)}^{\text{hf}} \int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx \end{array}$$

4.^{hf} Hol a hiba? $\ln|x| = \int \frac{1}{x} dx = \int \frac{100}{100x} dx = 100 \int \frac{1}{100x} dx = 100 \frac{\ln|100x|}{100} = \ln|100x|$

Emlékeztető

– Legyen $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ tetszőleges függvény. Ha egy $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvényre $F' = f$, akkor F az f *primitív függvénye*. f primitív függvényeinek halmazát $\int f$ jelöli. Szokásos még az $\int f(x) dx$ jelölés is, illetve a *határozatlan integrál* elnevezés.

$$\begin{array}{l} \int f(ax + b) dx = \frac{F(ax + b)}{a} \quad (\int f = F); \quad \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)|; \\ - \int f'(x) f^\alpha(x) dx = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha + 1} \quad (\text{ha } \alpha \neq -1); \quad \int f(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) \quad (\int f = F); \\ \int f'(x) e^{f(x)} dx = e^{f(x)} \end{array}$$

– A *parciális integrálás*: $\int f g' = f g - \int f' g$.

11. feladatsor: helyettesítéses integrálás, törtfüggvény

1. Alkalmos helyettesítéssel számoljuk ki a következő integrálokat (dolgozatban a helyettesítést mindig megadjuk):

a) $\int x^2 \sin(x^3) dx$

b) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

c) $\int \sin x e^{\cos x} dx$

d) $\int \sin^4 x \cos x dx$

e)^{hf} $\int \frac{2^{\ln x}}{x} dx$

f)^{hf} $\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}} dx$

g)^{hf} $\int \sqrt{4-x^2} dx$

h)^{hf} $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x}}$

i)^{hf} $\int \frac{4 dx}{1+(2x+1)^2}$

j)^{hf} $\int \frac{2x dx}{\sqrt{1-x^4}}$

k)^{hf} $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

l)^{hf} $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$

2. Keressük meg a primitív függvényeket.

a) $\int \frac{5x-3}{x^2-2x-3} dx$

b) $\int \frac{2x^3-4x^2-x-3}{x^2-2x-3} dx$

c) $\int \frac{x+5}{x^2+6x+9} dx$

d) $\int \frac{2x+3}{4x^2-4x+10} dx$

e)^{hf} $\int \frac{1}{(x-1)^2(x^2+1)} dx$

f)^{hf} $\int \frac{x^4}{x^2+x-2} dx$

Emlékeztető

– A *helyettesítéses integrálás*: $\int f(x) dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt|_{t=\varphi^{-1}(x)}$, amennyiben $\varphi'(t) < 0$ vagy $\varphi'(t) > 0$ a kérdéses intervallumon.

(Nem korrekt, ám könnyen megjegyezhető erre így gondolni: $\int f(x) dx = \int f(x) \left(\frac{dt}{dx}\right) dx = \int f(x) \frac{dx}{dt} dt = \int f(x(t))x'(t) dt$. Ekkor valójában egy $x = x(t)$ helyettesítést végzünk. A kapott eredmény t függvénye, azaz vissza kell helyettesíteni t helyébe az $x(t)$ függvény inverzét.)

– $\int \frac{\alpha x + \beta}{ax^2 + bx + c} dx$ kiszámolása: Legyen a nevező diszkriminánsa D .

Ha $D = 0$: A nevező teljes négyzet, így $= \int \frac{A}{\left(x + \frac{b}{2a}\right)} + \frac{B}{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} dx = A \ln \left|x + \frac{b}{2a}\right| - \frac{B}{x + \frac{b}{2a}}$.

Ha $D > 0$: Parciális törtekre kell bontani: $= \int \frac{A}{x+a} + \frac{B}{x+b} dx = A \ln|x+a| + B \ln|x+b|$.

Ha $D < 0$: $= A \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx + B \int \frac{1}{f(x)} dx = A \ln|f(x)| + B \operatorname{arctg}(\dots)$.

12. feladatsor: Riemann-integrál

1. Egy 2 méter hosszú vályú keresztmetszetét az $f(x) = 15x^2$, $x \in [-0.1, 0.1]$ függvény írja le.
- Mennyi víz fér a vályúba?
 - Ha 10 liter vizet öntünk bele, milyen magas lesz a vízszint?

2. Mekkora az f és g függvények grafikonja által közrefogott síkidom területe, ha
- $f(x) = x + 2$ és $g(x) = x^2$
 - ^{hf} $f(x) = x^2$ és $g(x) = x^3$
 - ^{hf} $f(x) = x^2$ és $g(x) = -x^2 + 2$

3. Számoljuk ki az integrálokat!

a) $\int_0^2 |1 - x| dx$

b) $\int_0^{5.5} [x] dx$

c) $\int_{-1}^1 3x^2 \sqrt{x^3 + 1} dx$

d) $\int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx$

e) $\int_0^{\ln 2} x e^{-x} dx$

f) ^{hf} $\int_{-3}^3 \{x\} dx$

g) ^{hf} $\int_0^{10\pi} (1 - \cos 3x) \sin 3x dx$

h) ^{hf} $\int_{1/e}^e |\ln x| dx$

i) ^{hf} $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$

4. ^{hf} Mekkora területet vág ki az $x^2 + y^2 \leq 8$ körlapból az $y^2 = 2x$ parabola?

Emlékeztető

- A *Newton-Leibniz-szabály*: Ha $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrálható, és F egy primitív függvénye, akkor

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b := F(b) - F(a).$$

- Helyettesítés határozott integrálra: Ha g szigorúan monoton növekvő vagy csökkenő, akkor

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(y))g'(y) dy. \quad (\text{Ha a képletben minden integrál létezik.})$$

13. feladatsor: improprius integrál, integrálfüggvény

1. Számoljuk ki a következő improprius integrálokat:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \int_1^{\infty} \frac{1}{x^3} dx & \text{b)} \int_{-\infty}^{\infty} x^3 dx & \text{c)} \int_0^{\infty} \sin x dx & \text{d)} \int_3^6 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-5)^2}} dx \\ \text{e)} \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx & \text{f)} \int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx & \text{g)} \int_0^{1/e} \frac{1}{x \ln^2 x} dx & \text{h)} \int_0^1 \ln x dx \\ \text{i)} \int_0^3 \frac{1}{x-1} dx & \text{j)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} dx & \text{k)} \int_{-\infty}^2 \frac{2}{x^2+4} dx & \text{l)} \int_{-\infty}^0 \frac{1}{(3x-2)^2} dx \end{array}$$

2. Határozzuk meg $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, $D(x)$ deriváltját.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} A(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} dt & \text{b)} B(x) = \int_0^{4x} \sqrt{1+t^8} dt \\ \text{c)} C(x) = \int_0^{x^3} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} dt & \text{d)} D(x) = \int_x^{x^3} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} dt \end{array}$$

3. Számoljuk ki a következő határértékeket:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \ln(1+t) dt}{x^2} = ? & \text{b)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{2x} \sqrt{1+t^4} dt}{x^3} = ? \end{array}$$

4. Mennyi a következő függvények x tengely körüli pörgetésével kapott testek felszíne, térfogata?

$$\begin{array}{ll} \text{a)} a(x) = x \quad (x \in [0, 6]) & \text{b)} b(x) = \sqrt{x} \quad (x \in [0, 9]) \\ \text{c)} c(x) = [x] \quad (x \in [0, 4]) & \text{d)} d(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \quad (x \in [-r, r]) \end{array}$$

5. * Tekintsük az $f(x) = 1/x$, $x \in [1, \infty)$ függvény x tengely körüli megpörgetésével keletkező végtelen „vázát”.

- Lássuk be, hogy a váza felszíne végtelen, a térfogata véges.
- Próbáljuk meg a vázát befesteni pirosra. Sikerülhet ez, ha a felszíne végtelen? És ha teletöltjük a vázát festékkel, majd kiöntjük? Akkor befestődik belülről! Hogyan lehet ez?

Emlékeztető

– Az *improprius integrálnak* két alapesete van:

1) Ha az integrációs tartomány nem korlátos. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ integrálható függvény. Ekkor $\int_a^\infty f(x) dx := \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_a^\omega f(x) dx$, ha ez a határérték létezik. Hasonlóan definiálható $\int_{-\infty}^b f(x) dx$.

$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^\infty f(x) dx$, amennyiben az összeg létezik.

2) Ha a függvény nem korlátos. Legyen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ nem korlátos, de korlátos és integrálható tetszőleges $\varepsilon > 0$ -ra az $[a + \varepsilon, b]$ intervallumon. Ekkor $\int_a^b f(x) dx := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$, ha ez a határérték létezik.

– Az $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ függvény az $f(x)$ *integrálfüggvénye*. Amennyiben f integrálható és létezik primitív függvénye, akkor F az f egy primitív függvénye lesz.

– Ha az $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonosan diffható függvény grafikonját az x tengely körül megpörgetjük, akkor a kapott test felszíne: $2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$, térfogata: $\pi \int_a^b f(x)^2 dx$.