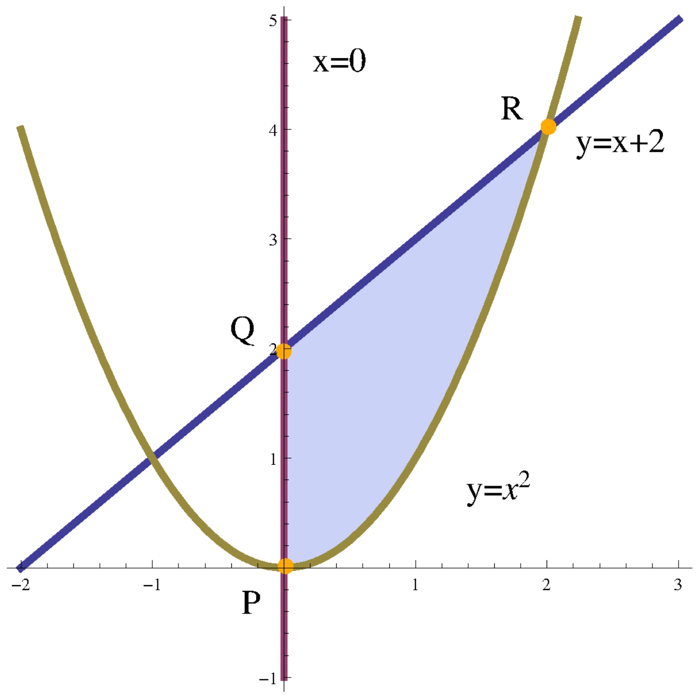
Feladat : Integráljuk az f(x,y)=x^2 + *y* függvényt az *y* – tengely az *y* = *x*+2 egyenes és az y=x^2 parabola által közrezárt tartományon.



megoldás :

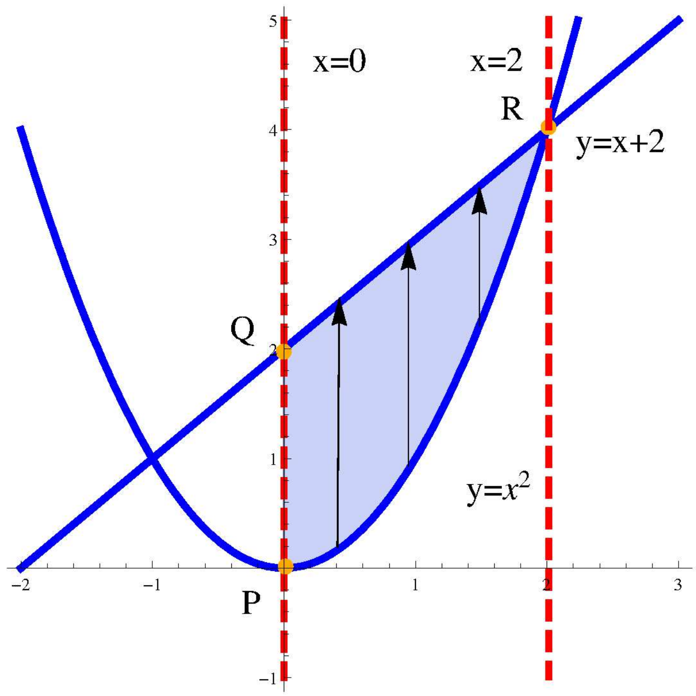
Írjuk fel a tartományt, mint x - szerinti normáltartományt. Azaz:

$$T_x = \{ (x, y) \mid a \le x \le b , \; g(x) \le y \le h(x) \}$$

alakban, ahol x∈[a,b]⊂ℝ intervallum, g(x) és h(x) pedig olyan függvények, melyek [a,b]-n értelmezve vannak.

Ehhez szükség van a görbék meszéspontjainak meghatározására. Az y-tengely az egyenest a P(0,2), a parabolát a Q(0,0) pontban metszi. Az y=x+2 egyenes és a parabola metszéspontja: R(x,y), ahol x+2=x^2. Ekkor
x^2-x-2=0, tehát x=-1 illetve 2 lehet. A két metszéspont közül a jobb oldalon lévőre van szükségünk (x=2), így tehát R(2,4). Ekkor a tartomány:

$$T_x = \left\{ (x, y) \mid 0 \le x \le 2 , \; x^2 \le y \le x + 2 \right\}$$



ekkor az integrál T_x – en :

$$\iint_{T_x} x^2 + y \, dF =$$

$$\int_{x=0}^{2}\int_{y=x^2}^{x+2} x^2 + y \, dy \, dx = \int_{x=0}^{2}\left[x^2 y + \frac{y^2}{2}\right]_{y=x^2}^{x+2} dx = \int_{x=0}^{2} x^2 (x+2) + \frac{(x+2)^2}{2} - \frac{3}{2}x^4 \, dx =$$

$$\int_{x=0}^{2} 2 + 2x + \frac{5x^2}{2} + x^3 - \frac{3x^4}{2} \, dx = \left[2x + x^2 + \frac{5x^3}{6} + \frac{x^4}{4} - \frac{3x^5}{10}\right]_{x=0}^{2} = \frac{136}{15}$$

2. megoldás:

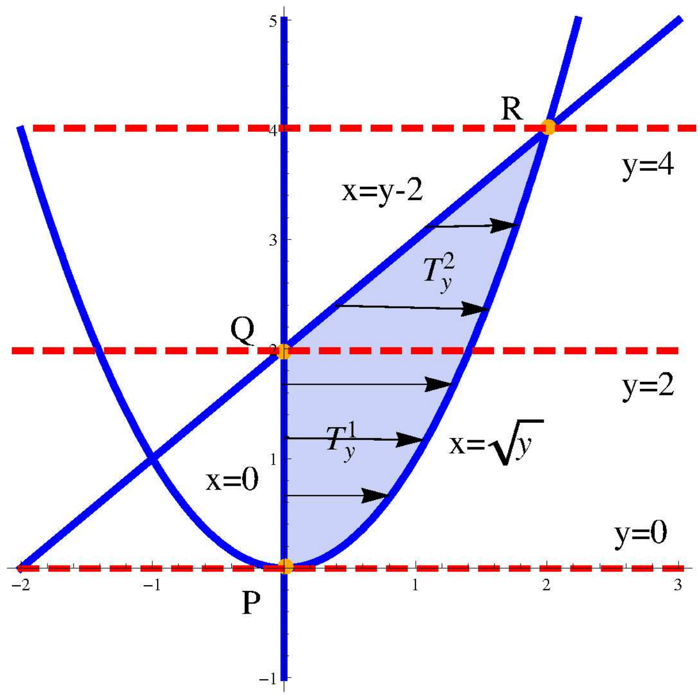
Írjuk fel a T tartományt, mint y - szerinti normáltartományt . Azaz:

$T_y = \{(x, y) \mid c \le y \le d, \; g(y) \le x \le h(y)\}$ alakban.

Mivel itt a tartományt határoló függvények több darabból állnak, ezért a tartományt két y-szerinti normál-tartomány összegeként tudjuk felírni:

$T_y^1 = \left\{(x, y) \mid 0 \le y \le 2, \; 0 \le x \le \sqrt{y}\right\}$ és

$T_y^2 = \left\{(x, y) \mid 2 \le y \le 4, \; y - 2 \le x \le \sqrt{y}\right\}$.



$\mathrm{T_y} = \mathrm{T_y^1} \bigcup \mathrm{T_y^2}$, így az integrálást a két résztartományon hajtjuk végre.

ekkor az integrál :

$$\iint_{T_y} x^2 + y \, dF =$$

$$\iint_{T_y^1} x^2 + y \, dF + \iint_{T_y^2} x^2 + y \, dF = \int_{y=0}^{2} \int_{x=0}^{\sqrt{y}} x^2 + y \, dx \, dy + \int_{y=2}^{4} \int_{x=y-2}^{\sqrt{y}} x^2 + y \, dx \, dy =$$

$$\int_{y=0}^{2} \left[\frac{x^3}{3} + xy \right]_{x=0}^{\sqrt{y}} dy + \int_{y=2}^{4} \left[\frac{x^3}{3} + xy \right]_{x=y-2}^{\sqrt{y}} dy = \int_{y=0}^{2} \frac{\sqrt{y}^3}{3} + \sqrt{y}^3 \, dy + \int_{y=2}^{4} \frac{\sqrt{y}^3}{3} +$$

$$\sqrt{y}^3 - \frac{(y-2)^3}{3} - y\,(y-2) \, dy = \left[\frac{8\sqrt{y}^5}{15} \right]_{y=0}^{2} + \left[\frac{8\sqrt{y}^5}{15} - \frac{(y-2)^4}{12} - \frac{y^3}{3} + y^2 \right]_{y=2}^{4} =$$

$$\frac{8 \times 2^5}{15} - \frac{2^4}{12} - \frac{4^3}{3} + 16 + \frac{8}{3} - 4 = \frac{136}{15}$$