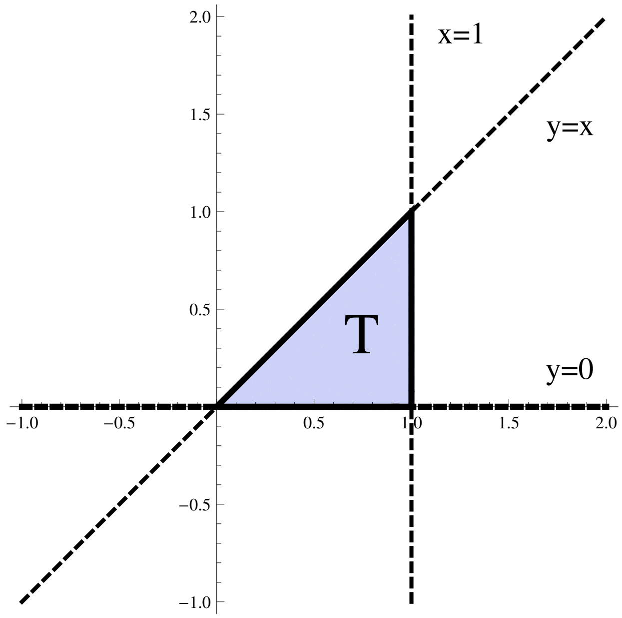
Feladat : Adott az x = 1, y = 0 és y = x egyenesek által határolt háromszögtartomány T.

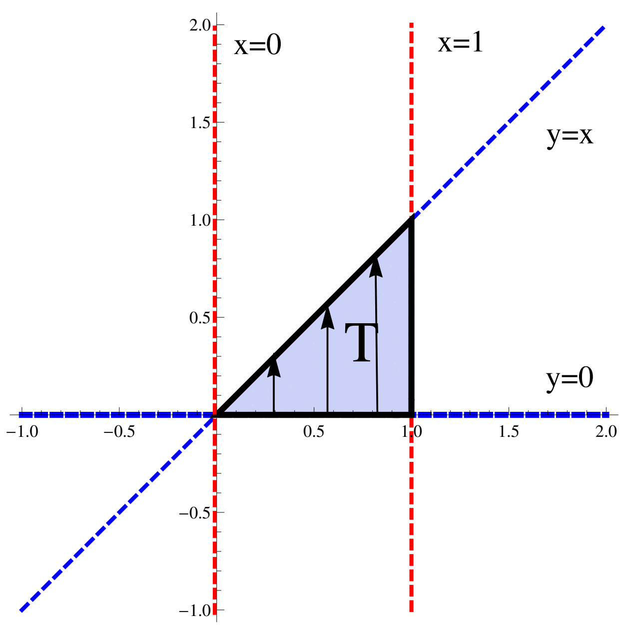


a. Integráljuk az f (x, y) = 1 függvényt a T tartományon!

megoldás :

Írjuk fel a T tartományt, mint x - szerinti normáltartományt:

$T_x = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x\}$

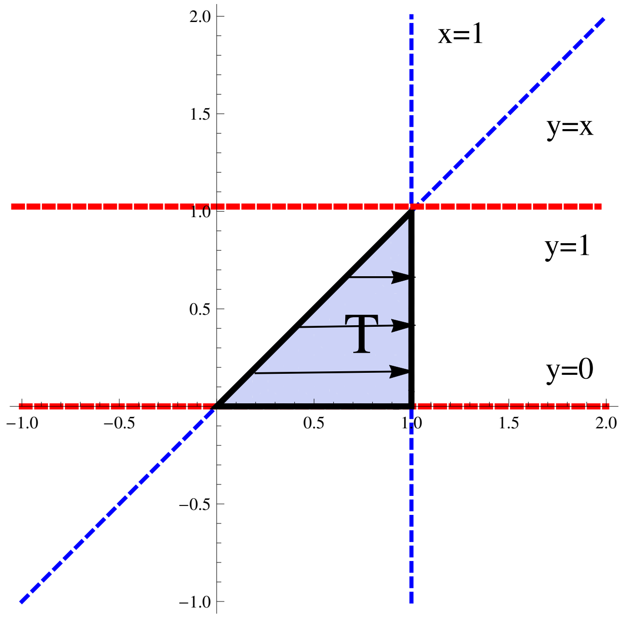


ekkor az integrál T_x – en :

$$\iint_T 1\, dF = \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{x} 1\, dy\, dx = \int_{x=0}^{1} [y]_{y=0}^{x}\, dx = \int_{x=0}^{1} x - 0\, dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{1} = \frac{1}{2}$$

Írjuk fel a T tartományt, mint y - szerinti normáltartományt:

$T_y = \{(x, y) \mid 0 \le y \le 1, \; y \le x \le 1\}$



ekkor az integrál T_y – on :

$$\int_{y=0}^{1}\int_{x=y}^{1} 1\, dx\, dy = \int_{y=0}^{1} [x]_{x=y}^{1}\, dy = \int_{y=0}^{1} 1 - y\, dx = \left[y - \frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{1} = 1 - \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

Megjegyzés : mintkét esetben a T tartomány területét kaptuk eredményül!

b. Végezzük ez a T tartomány feletti integrálást az $f(x, y) = e^{x^2}$ függvénye is.

megoldás :

Ha a T tartományt, mint x - szerinti normáltartományt vesszük :

$$\iint_T f(x, y)\, dF =$$

$$\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{x} e^{x^2}\, dy\, dx = \int_{x=0}^{1}\left[e^{x^3}\, y\right]_{y=0}^{x} dx = \int_{x=0}^{1} e^{x^2} \cdot x - 0\, dx = \left[\frac{e^{x^2}}{2}\right]_{x=0}^{1} = \frac{e}{2} - \frac{1}{2}$$

Ha a T tartományt, mint y - szerinti normáltartományt vesszük :

$$\int_{y=0}^{1}\int_{x=y}^{1} e^{x^2}\, dx\, dy = \text{a primitív függvény nem írható fel !!!}$$

c. Számítsuk ki a T tartománynak, mint síklapnak a tömegét és tömegközéppontját/súlypontját, ha:

i) a síklap homogén sűrűség,

ii) a síklap pontjain a sűrűség eloszlását a $\rho(x,y)=e^{x+2y}$ sűrűségfüggvény adja meg!

megoldás :

Ha a T tartományt, mint síklap sűrűség eloszlását a ρ(x,y) adja meg, akkor a tömege az:

$m = \iint_T \rho(x, y)\, dF$ integrállal számítható ki.

A tartomány tömegközéppontját az x - és y - tengelyekre vonatkozó elsőrendű nyomatékok segítségével számoljuk, úgy hogy :

$m_x = \iint_T x \cdot \rho(x, y)\, dF$ az x – tengelyre vonatkozó elsőrendű nyomaték nagysága,

$m_y = \iint_T y \cdot \rho(x, y)\, dF$ pedig az y – tengelyre vonatkozó elsőrendű nyomaték nagysága.

Ekkor a tömegkközéppont (súlypont) az xy – sík azon pontja, melynek $S(s_x, s_y)$ koordinátái

$s_x = \frac{m_x}{m}$ és $s_y = \frac{m_y}{m}$ alakban számolhatóak.

i) Ha a síklap homogén sűrűségű, akkor ρ(x,y)=1, ekkor a síklap tömege a területének mérőszámával egyezik meg, azaz:

$$m = \iint_T \rho(x, y)\, dF = \int_{y=0}^{1}\int_{x=y}^{1} 1\, dx\, dy = \frac{1}{2}$$

Ekkor az elsőrendű nyomatékok:

$$m_x = \iint_T x \cdot \rho(x, y)\, dF =$$

$$\int_{y=0}^{1}\int_{x=y}^{1} x \cdot 1\, dx\, dy = \int_{y=0}^{1} \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=y}^{1} dy = \int_{y=0}^{1} \frac{1}{2} - \frac{y^2}{2}\, dy = \left[\frac{y}{2} - \frac{y^3}{6}\right]_{y=0}^{1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} - 0 = \frac{1}{3}$$

$$m_y = \iint_T y \cdot \rho(x, y)\, dF =$$

$$\int_{y=0}^{1}\int_{x=y}^{1} y \cdot 1\, dx\, dy = \int_{y=0}^{1} [xy]_{x=y}^{1}\, dy = \int_{y=0}^{1} y - y^2\, dy = \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{6}$$

Ekkor a súlypont koordinátái : $S\left(\frac{m_x}{m}, \frac{m_y}{m}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$,

ami megegyezik *a T* tartománynak, mint háromszögnek *a* súlypontjával.

ii) Ha sűrűségfüggvénye $\rho(x, y) = e^{x+2y}$, ekkor a síklap tömege a területének mérőszámával egyezik meg, azaz:

$$m = \iint_T \rho(x, y)\, dF = \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{x} e^{x+2y}\, dy\, dx =$$

$$\int_{x=0}^{1} \left[\frac{1}{2} e^{x+2y}\right]_{y=0}^{x} dx = \int_{x=0}^{1} \frac{1}{2} e^{3x} - \frac{1}{2} e^{x}\, dx = \left[\frac{1}{6} e^{3x} - \frac{1}{2} e^{x}\right]_{x=0}^{1} = \frac{1}{6}\left(2 - 3e + e^3\right)$$

Ekkor az elsőrendű nyomatékok:

$$m_x = \iint_T x \cdot \rho(x, y)\, dF =$$

$$\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{x} x \cdot e^{x+2y}\, dy\, dx = \int_{x=0}^{1}\left[\frac{x}{2} e^{x+2y}\right]_{y=0}^{x} dx = \int_{x=0}^{1} \frac{x}{2}\left(e^{3x} - e^{x}\right) dx = \left[\frac{x}{2}\left(\frac{e^{3x}}{3} - e^{x}\right)\right]_{x=0}^{1} -$$

$$\int_{x=0}^{1} \frac{1}{2}\left(\frac{e^{3x}}{3} - e^{x}\right) dx = \left[\frac{x}{2}\left(\frac{e^{3x}}{3} - e^{x}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{e^{3x}}{9} - e^{x}\right)\right]_{x=0}^{1} =$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{e^{3}}{3} - e\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{e^{3}}{9} - e\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{9} - 1\right) = \frac{1}{9}\left(e^{3} - 4\right)$$

$$m_y = \iint_T y \cdot \rho(x, y)\, dF = \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{x} y \cdot e^{x+2y}\, dy\, dx = \int_{x=0}^{1}\left[\frac{y}{2} e^{x+2y}\right]_{y=0}^{x} - \int_{y=0}^{x} \frac{1}{2} \cdot e^{x+2y}\, dy\, dx =$$

$$\int_{x=0}^{1}\left[\frac{y}{2} e^{x+2y} - \frac{1}{4} \cdot e^{x+2y}\right]_{y=0}^{x} dx = \int_{x=0}^{1} \frac{x}{2} e^{3x} - \frac{1}{4} \cdot e^{3x} + \frac{1}{4} \cdot e^{x}\, dx =$$

$$\left[\frac{x}{6} e^{3x} - \frac{1}{12} \cdot e^{3x} + \frac{1}{4} \cdot e^{x}\right]_{x=0}^{1} - \int_{x=0}^{1} \frac{1}{6} e^{3x}\, dx = \left[\frac{x}{6} e^{3x} - \frac{1}{12} \cdot e^{3x} + \frac{1}{4} \cdot e^{x} - \frac{1}{18} e^{3x}\right]_{x=0}^{1} =$$

$$\frac{1}{6} e^{3} - \frac{1}{12} \cdot e^{3} + \frac{1}{4} \cdot e - \frac{1}{18} e^{3} + \frac{1}{12} - \frac{1}{4} + \frac{1}{18} = \frac{1}{36}\left(-4 + 9e + e^{3}\right)$$

Ekkor a tömegközéppont koordinátái : $S\left(\frac{m_x}{m}, \frac{m_y}{m}\right) = \left(\frac{2e^{3} - 8}{6 - 9e + 3e^{3}}, \frac{-4 + 9e + e^{3}}{12 - 18e + 6e^{3}}\right).$