1. Differenciálegyenletek

(1) Mi a lehető legbővebb $A \subset \mathbb{R}^2$, ahol az alábbi differenciálegyenletek megoldásait kereshetjük? Melyikre nem teljesül az MVLL tulajdonság?

(a)	$y' = \operatorname{ch} x - 3xy$	(b)	$y' = \frac{x-1}{y}$	(c)	$y' = x^2 + y^2$
(d)	$y' = \sqrt{\lvert y\rvert}$	(e)	$y' = \frac{1}{2xy}$	(f)	$y' = 3y^{2/3}$

(2) Megoldhatóak-e a következő kezdeti érték problémák? Egyértelmű-e a megoldás?

(a)	$y' = y \operatorname{tg} x, \quad y(0) = 0$	(b)	$y' = x \ln y, \quad y(0) = 0$
(c)	$y' = \sqrt{\lvert y\rvert}, \quad y(1) = 0$	(d)	$y' = 3 + 3y^{2/3}, \quad y(-1) = 0$

(3) Milyen differenciálegyenletek megoldásai a következő görbék?

(a)	$y = Cx^2$	(b)	$x^2 + y^2 = Cx$	(c)	$y = Ce^{x/C}$
(d)	$y = C_1x^2 + C_2e^{2x}$	(e)	$(x - C)^2 + y^2 = C^2$		

2. Szeparábilis differenciálegyenletek

(1) Oldjuk meg a következő szeparábilis differenciálegyenleteket és kezdeti érték problémákat.

(a)	$(1 + x^2)y' + 1 + y^2 = 0$	(b)	$(1 - x^2)y' = \sqrt{1 - y^2}$
(c)	$xyy' + y^2 - 1 = 0$	(d)	$y' = (\sin \ln x + \cos \ln x + a)y$
(e)	$y' - xe^x - xe^{x-y} = 0, \quad y(1) = 0$	(f)	$xy' = y \ln y, \quad y(1) = e$

(2) Keressük meg az új $u(x) = y(x)/x$ függvény bevezetésével szeparábilissé tehető differenciálegyenletek megoldásait.

(a)	$x(\cos \frac{y}{x})y' = y(\cos \frac{y}{x}) - x$	(b)	$xy(\sin \frac{y}{x})y' = xy(\cos \frac{y}{x}) + (y^2 - x^2) \sin \frac{y}{x}$
(c)	$xy' = y - x \cos^2 \frac{y}{x}$	(d)	$x^2y' = xy + y^2e^{-\frac{y}{x}}$
(e)	$2xyy' = 2y^2 - x^2$		

(3) A következő feladatokban a differenciálegyenletek megoldásához az ismeretlen f függvény helyett az f^{-1} inverz függvényt keressük. Bevezetjük az új $u(y) = f^{-1}(y)/y = x/f(x)$ függvényt és így az $f'(x) = \frac{1}{(f^{-1})'(f(x))} = \frac{1}{f(x)u'(f(x)) + u(f(x))} = \frac{1}{yu'(y) + u(y)}$ segítségével átírt differenciálegyenletek, ahol $u(y)$ az ismeretlen függvény, szeparábilisek.

(a) $$(x + 2f(x))e^{-x/f(x)} f'(x) = 2x + f(x)e^{-x/f(x)}$$

(b) $$(f(x)^2 + x^2e^{x/f(x)})f'(x) = (f(x)^2 + xf(x))e^{x/f(x)}$$

3. Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek

(1) Oldjuk meg a következő differenciálegyenleteket és kezdeti érték problémákat.

(a) $$y' - y/x = x^2$$

(b) $$y' + y\cos x = \sin x \cos x$$

(c) $$y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$$

(d) $$y' - (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)y = -4\sin^2 x$$

(e) $$xy' - (x+1)y = x^2 - x^3$$

(f) $$y' + y \operatorname{th} x = 1$$

(g) $$y'\cos x + y \sin x = 1, \qquad y(\pi/2) = -1$$

(h) $$y' + y = \cos x, \qquad y(0) = 1$$

(i) $$y' \sin x - y\cos x = e^x \sin^2 x, \qquad y(\pi/6) = e^{\pi/6}$$

(j) $$xy' - y = x^3 + 1, \qquad y(0) = 2$$

4. Egzakt differenciálegyenletek

(1) Oldjuk meg a következő differenciálegyenleteket és kezdeti érték problémákat.

(a) $$2xy + (x^2+1)y' = 0$$

(b) $$y(1+xy) + (x^2y + y + x)y' = 0$$

(c) $$2x + y + (x - 2y)y' = 0$$

(d) $$1 + y^2 \sin(2x) - 2y(\cos^2 x)y' = 0$$

(e) $$3x^2(1 + \ln y) + (x^3/y - 2y)y' = 0$$

(f) $$y^2 e^{xy^2} + 4x^3 + (2xye^{xy^2} - 3y^2)y' = 0$$

(g) $$2x + y + 1 + (x + 3y + 2)y' = 0, \qquad y(0) = 0$$

(h) $$2xy + 3y^2 + (x^2 + 6xy - 2y)y' = 0, \qquad y(1) = -1/2$$

(i) $$2x + y + (x - 2y)y' = 0, \qquad y(1) = 1$$

(j) $$3x^2 + e^y y' = 0, \qquad y(0) = 0$$

(2) Tegyük egzakttá valamilyen $m(x,y) = x$, $m(x,y) = y$, $m(x,y) = x + y$, stb., multiplikátorral és oldjuk meg a következő differenciálegyenleteket.

(a) $$x^2 + y^2 + x + xyy' = 0$$

(b) $$x^2 - 1 - y + xy' = 0$$

(c) $$y - x^2y^2 + xy' = 0$$

(d) $$y + \ln x - xy' = 0$$

(e) $$y + xy^2 + (x - x^2y)y' = 0$$

(f) $$5x - 6y + xy' = 0$$

(g) $$y^3 - 2x^2y + (2xy^2 - x^3)y' = 0$$

(h) $$1 - 2x \sin y + x^2(\cos y)y' = 0$$

5. n-edrendű lineáris differenciálegyenletek

(1) Oldjuk meg a következő differenciálegyenleteket és kezdeti érték problémákat.

(a) $$y'' + y' - 2y = 0$$

(b) $$y'' - 2y' = 0$$

(c) $$2y'' - 5y' + 2y = 0$$

(d) $$y'' - 4y' + 5y = 0, \qquad y(0) = 0, y'(0) = -1$$

(e) $$y'' + 2y' + 10y = 0, \qquad y(1) = -1, y'(1) = 1/2$$

(f) $$y'' + y = 0, \qquad y(0) = 1, y'(0) = 1$$

(g) $$y''' - y'' - y' + y = 0$$

(h) $$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0, \qquad y(0) = 1, y'(0) = 1, y''(0) = -2$$

(i) $$y^{(5)} - 2y^{(4)} - 16y' + 32y = 0$$

(j) $$y^{(5)} - 10y^{(3)} + 9y' = 0$$

(k) $$y^{(5)} + 8y^{(3)} + 16y' = 0, \qquad y(0) = 1, y'(0) = 1, y''(0) = -2, y'''(0) = 1, y^{(4)}(0) = -2$$

(l) $$y'' - 2y' + ay = 0$$