1. Differenciálegyenletek, egzisztencia és unicitás tételek. Szétválasztható változójú és elsőrendű lineáris differenciálegyenletek.

Definíció 1.1 (Tartomány). Ha $A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ összefüggő és nyílt, akkor A egy tartomány.

Definíció 1.2 (Differenciálegyenlet). Ha $f\colon A \to \mathbb{R}$ folytonos és $(t_0, p_0) \in A$, akkor egy olyan I nyílt intervallumon értelmezett $u\colon I \to \mathbb{R}$ deriválható függvényt, amire

(1) $(t, u(t)) \in A$ minden $t \in I$-re
(2) $f(t, u(t)) = u'(t)$
(3) $t_0 \in I$
(4) $u(t_0) = p_0$

teljesül, az f-el megadott differenciálegyenlet egy megoldásának, illetve a (t_0, p_0) kezdetiérték probléma egy megoldásának nevezünk.

Definíció 1.3 (Iránymező, izoklina). Ha $u'(t) = f(t, u(t))$ egy d.e., amit az $f : A \to \mathbb{R}$ függvény ad meg, akkor azt a diagramot, ami a t, p koordináta redszerben minden (t, p) ponthoz egy $f(t, p)$ meredekségű vonalelemet rajzol, iránymezőnek nevezzük. A

$$\{(t, p) \in A : f(t, p) = C\}$$

halmazt pedig a C értékhez tartozó izoklínának hívjuk. A differenciálegyenlet megoldásait az iránymező integrálgörbéinek is nevezzük.

Például az $f(t, p) = \sqrt{|p|}$, ahol $(t, p) \in \mathbb{R}^2$, az

$$u'(t) = \sqrt{|u(t)|}$$

differenciálegyenletet határozza meg. A megoldások az

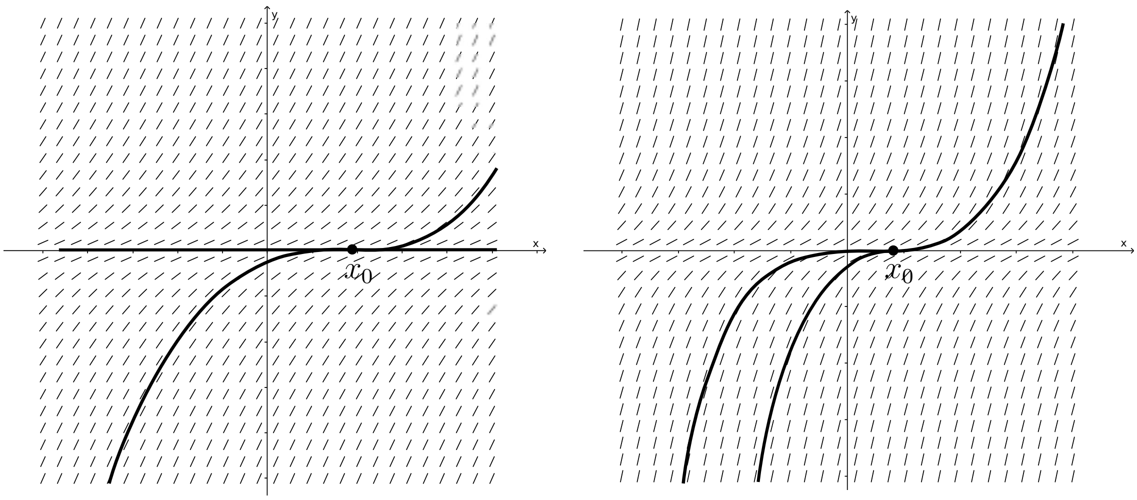
$$u(t) = 0,$$

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{ha } t \le C \\ (t-C)^2/4 & \text{ha } C \le t, \end{cases}$$

$$u(t) = \begin{cases} -(t-C)^2/4 & \text{ha } t \le C \\ 0 & \text{ha } C \le t \le D \\ (t-D)^2/4 & \text{ha } D \le t, \end{cases}$$

$$u(t) = \begin{cases} -(t-C)^2/4 & \text{ha } t \le C \\ 0 & \text{ha } C \le t, \end{cases}$$

egész számegyenesen értelmezett függvények, ahol $C \le D$ tetszőleges konstansok. Látszik, hogy az $u(t_0) = 0$ k.é.p.-nak végtelen sok megoldása van, ld. 1. ábra.



Ábra 1. Két iránymező és az általuk meghatározott $y(x)' = f(x, y(x))$ differencálegyenletek néhány $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ megoldásának grafikonja. Az első ábrán $f(x, y) = \sqrt{|y|}$, ennek egyik megoldása a baloldali ábrán látható konstans 0 függvény, egy másik pedig az ábrázolt görbe. A jobboldali ábrán $f(x, y) = 3y^{2/3}$, az általa meghatározott differenciálegyenletnek is két megoldását tüntettük fel. Látható, hogy mindkét differenciálegyenlet esetén például az $y(x_0) = 0$ kezdetiérték problémának több megoldása is van.

Vagy az $f(t, p) = 3p^{2/3}$ függvény az $u'(t) = 3u(t)^{2/3}$ differenciálegyenletet határozza meg, ennek is végtelen sok megoldása van minden $u(x_0) = 0$ k.é.p.-hoz, ld. 1. ábra. Még több példát láthatunk a 2. ábrán.

Tétel 1.4 (Lokális megoldhatóság, egyértelmű megoldhatóság). *Legyen $a, b > 0$ olyan, hogy*

$$H = [t_0 - a, t_0 + a] \times [p_0 - b, p_0 + b] \subset A.$$

Legyen

$$M = \max\{|f(t, p)| : (t, p) \in H\}$$

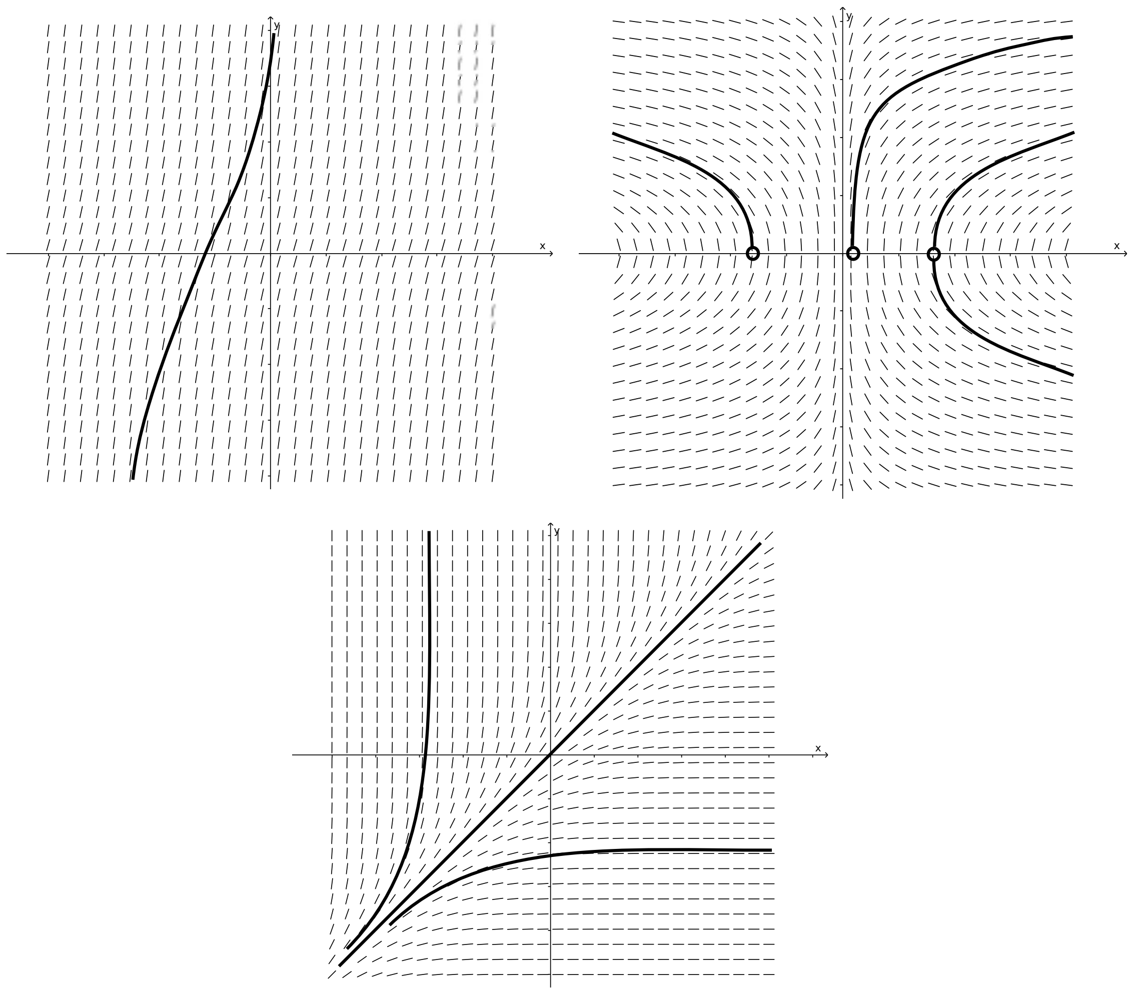
és $r < \min\{a, b/M\}$. Ekkor

(1) *létezik megoldás a $(t_0 - r, t_0 + r)$ intervallumon,*
(2) *ha még minden $t \in [t_0 - a, t_0 + a]$-ra létezik olyan $C > 0$ konstans, hogy minden $p_1, p_2 \in [p_0 - b, p_0 + b]$ esetén*

$$|f(t, p_1) - f(t, p_2)| \leq C|p_1 - p_2|$$

is teljesül, akkor a megoldás egyértelmű a t_0 középpontú és $\min\{r, 1/C\}$-nél szigorúan kisebb sugarú intervallumon.

Bizonyítás. Az (1)-es bizonyítása elég bonyolult, ezért csak a (2)-est mutatjuk meg. Először definiálunk egy műveletet, ami egy függvényből egy másik függvényt



ÁBRA 2. Az $f(x,y) = 3y^{2/3} + 3$, $f(x,y) = \frac{1}{2xy}$ és $f(x,y) = e^{y-x}$ által meghatározott iránymezők. Mindhárom esetben minden k.é.p.-nak egyértelműen létezik megoldása. A második ábrán az integrálgörbék nem metszik a koordináta tengelyeket és f nincsen értelmezve az $\{(x,y) : xy = 0\}$ halmazon. A harmadik ábrán látható, hogy az $y' = e^{y-x}$ differenciálegyenlet megoldásai vagy az egész $\mathbb{R}$-en, vagy csak egy nyílt félegyenesen vannak értelmezve és ez utóbbi esetben függőleges aszimptotái vannak a megoldásoknak. A megoldásai egyébként a három differenciálegyenletnek sorban az $y(x)^{1/3} - \arctan(y(x)^{1/3}) = x + C$ impliciten megadott y függvény, az $y^2(x) = \ln|x| + C$ impliciten megadott y függvény és az $y(x) = -\ln(e^{-x} - C)$ függvény, ahol C tetszőleges valós paraméter.

csinál. Jelölje I a $[t_0 - r, t_0 + r]$ intervallumot, ahol persze $0 < r < a$. Ha

$$u \colon I \to (p_0 - b, p_0 + b)$$

egy folytonos függvény, akkor legyen

$$\tilde{u}(t) = p_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\mathrm{d}s,$$

ami szintén egy I-n értelmezett folytonos függvény. Ráadásul $\tilde{u}$ szintén $(p_0 - b, p_0 + b)$-be képez, mert $\tilde{u}(t)$ eltérése p_0-tól

$$|\tilde{u}(t) - p_0| = |\int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\mathrm{d}s| \leq \int_{t_0}^{t} |f(s, u(s))|\mathrm{d}s \leq \int_{t_0}^{t} M\mathrm{d}s = M|t - t_0| \leq Mr$$

és a feltétel szerint $Mr < b$.

Azt fogjuk megmutatni, hogy létezik olyan u folytonos függvény, hogy

$$u = \tilde{u},$$

amiből következik, hogy u deriválható is, hiszen $\tilde{u}$ deriválható. Ebből pedig az fog következni, hogy

$$u'(t) = f(t, u(t))$$

a $(t_0 - r, t_0 + r)$ intervallumon. Jelölje

$$|u - v|$$

két $u, v \colon I \to \mathbb{R}$ függvény esetén a

$$\max\{|u(s) - v(s)| : s \in I\}$$

értéket. Tetszőleges két $u, v \colon I \to \mathbb{R}$ függvényre igaz az, hogy minden t-re

$$|\tilde{u}(t) - \tilde{v}(t)| = |\int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\mathrm{d}s - \int_{t_0}^{t} f(s, v(s))\mathrm{d}s| =$$

$$|\int_{t_0}^{t} f(s, u(s)) - f(s, v(s))\mathrm{d}s| \leq \int_{t_0}^{t} C|u(s) - v(s)|\mathrm{d}s = C\int_{t_0}^{t} |u(s) - v(s)|\mathrm{d}s \leq Cr|u - v|.$$

Tehát minden $t \in I$-re

$$|\tilde{u}(t) - \tilde{v}(t)| \leq Cr|u - v|,$$

amiből az következik, hogy

$$|\tilde{u} - \tilde{v}| \leq Cr|u - v|.$$

Tegyük fel, hogy r olyan, hogy $r < 1/C$. Ekkor $Cr < 1$, jelölje ezt a Cr értéket q, tehát $0 < q < 1$ olyan, hogy

$$|\tilde{u} - \tilde{v}| \leq q|u - v|.$$

Készítünk végtelen sok függvényt úgy, hogy ezt az előbb definiált $u \mapsto \tilde{u}$ műveletet iteráljuk. Legyen $u_1(t) = p_0$ a konstans p_0 függvény. Legyen

$$u_{n+1} = \tilde{u}_n.$$

Ekkor $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ mind a $[t_0 - r, t_0 + r]$ intervallumon értelmezett függvények. Bármely n-re

$$|u_{n+1} - u_n| \leq q|u_n - u_{n-1}| \leq q^2|u_{n-1} - u_{n-2}| \leq \cdots \leq q^{n-1}|u_2 - u_1|,$$

tehát

$$|u_{n+1} - u_n| \leq q^{n-1}|u_2 - u_1|.$$

Ezért bármely $0 < m < n$-re

$$|u_n - u_m| \leq |u_n - u_{n-1}| + |u_{n-1} - u_{n-2}| + \cdots + |u_{m+1} - u_m| \leq$$
$$q^{n-2}|u_2 - u_1| + q^{n-3}|u_2 - u_1| + \cdots + q^{m-1}|u_2 - u_1| = |u_2 - u_1| \sum_{m-1 \leq i \leq n-2} q^i =$$
$$|u_2 - u_1|q^{m-1} \sum_{0 \leq i \leq n-m-1} q^i = |u_2 - u_1|q^{m-1}\frac{1 - q^{n-m}}{1 - q} \leq |u_2 - u_1|q^{m-1}\frac{1}{1 - q},$$

amiből az következik, hogy $m, n \longrightarrow \infty$ esetén

$$|u_n - u_m| \longrightarrow 0.$$

Tehát minden $t \in I$-re $m, n \longrightarrow \infty$ esetén $|u_n - u_m| \longrightarrow 0$ és így minden $t \in I$-re az $u_n(t)$ számsorozat Cauchy sorozat, ezért konvergens. Jelölje az $u_n(t)$ számsorozat határértékét $u(t)$. Így kapunk egy $u\colon I \to \mathbb{R}$ függvényt. Belátható, hogy u folytonos. Az is igaz, hogy

$$\tilde{u}(t) = p_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\mathrm{d}s = p_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \lim u_n(s))\mathrm{d}s = p_0 + \int_{t_0}^{t} \lim f(s, u_n(s))\mathrm{d}s =$$
$$p_0 + \lim \int_{t_0}^{t} f(s, u_n(s))\mathrm{d}s = \lim \left(p_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u_n(s))\mathrm{d}s\right) = \lim u_{n+1}(t) = u(t),$$

tehát

$$\tilde{u} = u.$$

Az u függvény az egyetlen olyan folytonos függvény, amire $\tilde{u} = u$, mert ha $u_1 = \tilde{u}_1$ és $u_2 = \tilde{u}_2$, akkor

$$|u_1 - u_2| = |\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2| \leq q|u_1 - u_2|$$

és $q < 1$ miatt $|u_1 - u_2|$ csak 0 lehet. □

Definíció 1.5 (MVLL függvény). Legyen $A \subset \mathbb{R}^2$. Az $f\colon A \to \mathbb{R}$ függvény második változójában lokálisan Lipschitz tulajdonságú (MVLL), ha minden $(t_0, p_0) \in A$-hoz létezik olyan $H \subset A$, $(t_0, p_0) \in H$ téglalap, hogy bármely $(t, p_1), (t, p_2) \in H$-ra

$$|f(t, p_1) - f(t, p_2)| \leq C|p_1 - p_2|$$

valamilyen rögzített, csak t_0-tól és p_0-tól függő C-re.

Egy MVLL függvény nem feltétlenül folytonos, például az

$$f(t, p) = \begin{cases} 1 & \text{ha } t \leq 0 \\ 0 & \text{ha } t > 0 \end{cases}$$

ilyen. Egy folytonos függvény sem feltétlenül MVLL, például az

$$f(t, p) = \begin{cases} \sqrt{p} & \text{ha } p \geq 0 \\ \sqrt{-p} & \text{ha } p < 0 \end{cases}$$

nem MVLL bármely $(t, 0)$-ban.

Tétel 1.6. *Legyen f a második változójában lokálisan Lipschitz tulajdonságú függvény. Ekkor*

(1) *minden $(t_0, p_0) \in A$-hoz létezik legbővebb $t_0 \in I$ nyílt intervallum, amin létezik $u\colon I \to \mathbb{R}$ megoldás,*
(2) *az I minden részintervallumán csak ez az egyetlen megoldás létezik,*
(3) *bármely K kompakt A-beli részhalmazhoz van olyan $t_1, t_2 \in I$, $t_1 < t_2$, hogy $(t_1, u(t_1)) \notin K$ és $(t_2, u(t_2)) \notin K$.*

1.1. Szeparábilis differenciálegyenletek.

Definíció 1.7 (Szeparábilis differenciálegyenlet). Legyen $A = I \times J$, ahol I, J nyílt intervallumok és legyen $f(x,y) = g(x)h(y)$ valamilyen $g\colon I \to \mathbb{R}$ és $h\colon J \to \mathbb{R}$ folytonos függvényekre. Tegyük fel, hogy h sehol sem 0. Ekkor a differenciálegyenletet szeparábilisnek nevezzük.

Tétel 1.8. *A $g(t)h(u(t)) = u'(t)$ szeparábilis d.e. egy megoldása az*

$$u(t) = H^{-1}(G(t) + c)$$

függvény, ami az $I^* = \{t \in I : G(t) + c \in R_H\}$-n van értelmezve, és ahol $G' = g$, $H' = 1/h$ és $c \in \mathbb{R}$. Az $u(t_0) = p_0$ k.é.p. egy megoldását pedig a

$$c = H(p_0) - G(t_0)$$

választással kapjuk.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy valamilyen $I^* \subset I$ nyílt halmazra és $u\colon I^* \to \mathbb{R}$ deriválható függvényre minden $t \in I^*$-ra $u(t) \in J$ és $g(t)h(u(t)) = u'(t)$ teljesül. Ekkor

$$\frac{u'(t)}{h(u(t))} = g(t).$$

Ha $H' = 1/h$ és $G' = g$, akkor

$$(H \circ u)'(t) = G'(t)$$

is igaz minden $t \in I^*$-ra. Ez pedig azzal ekvivalens, hogy

$$H \circ u(t) = G(t) + c$$

valamilyen $c \in \mathbb{R}$-re. Mivel a $H' = 1/h$ függvény az egész J-n állandó előjelű, ezért H szigorúan monoton nő az egész J-n (vagy csökken), tehát invertálható. Azt kapjuk, hogy

$$u(t) = H^{-1}(G(t) + c)$$

minden $t \in I^*$-ra, amire $G(t)+c$ benne van H értékkészletében. Összefoglalva tehát legyenek $g\colon I \to \mathbb{R}$ és $h\colon J \to \mathbb{R}$ folytonos függvények, h sehol sem 0, legyenek G és H olyanok, hogy $G' = g$ és $H' = 1/h$. Ezen kívül legyen $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Jelölje R_H a H függvény értékkészletét. Végül legyen

$$I^* = \{t \in I : G(t) + c \in R_H\}.$$

Ekkor az, hogy valamilyen

$$u\colon I^* \to \mathbb{R}$$

kielégíti a

$$g(t)h(u(t)) = u'(t)$$

d.e.-et ekvivalens azzal, hogy

$$u(t) = H^{-1}(G(t) + c)$$

minden $t \in I^*$-ra. Minél bővebb I^* intervallumot találunk, annál jobb, de ez függhet G, H és c megadásától is. Nyilván a

$$c = H(p_0) - G(t_0)$$

választás oldja meg az $u(t_0) = p_0$ kezdetiérték problémát. □

Például legyen $g(t) = 1/t$ és $h(p) = \frac{1}{2p}$, $I = J = (0, \infty)$. Ekkor a d.e.

$$u'(t) = \frac{1}{2tu(t)}$$

alakú, és $G(t) = \ln t$, $H(p) = p^2$ lehetne. Tehát

$$u(t) = \sqrt{\ln t + c}$$

megoldás, de csak olyan t lehet benne u értelmezési tartományában, amire $t > e^{-c}$ teljesül. Az $u(1) = 2$ k.é.p.-et a $c = 4$ oldja meg.

Egy másik példa a $g(t) = 1$, $h(p) = 3p^{2/3} + 3$, $I = J = \mathbb{R}$. A d.e.

$$u'(t) = 3u(t)^{2/3} + 3$$

alakú és a megoldásához $G(t) = t$, $H(p) = p^{1/3} - \arctan(p^{1/3})$, ezért

$$u(t)^{1/3} - \arctan(u(t)^{1/3}) = t + c,$$

amiből már sokkal nehezebb explicit alakban kifejezni az $u(t)$ függvényt. Ezt nevezzük implicit megoldásnak. A $g(t)h(p)$ függvény nem MVLL minden $(t, 0)$-ban de könnyű látni, hogy mindig egyértelmű egy k.é.p. megoldása.

1.2. Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek.

Definíció 1.9 (Elsőrendű lineáris differenciálegyenlet). Ha I nyílt intervallum és $g, h\colon I \to \mathbb{R}$ folytonos függvények, akkor az $f(x, y) = g(x)y + h(x)$-el megadott differenciálegyenletet elsőrendű lineáris differenciálegyenletnek nevezzük.

Tétel 1.10. *Az*

$$u'(t) = g(t)u(t) + h(t)$$

elsőrendű d.e. megoldása az

$$u(t) = (c + v(t))e^{G(t)}$$

I-n értelmezett függvény, ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstans, $G'(t) = g(t)$ és $v'(t) = \frac{h(t)}{e^{G(t)}}$.

Bizonyítás. Először az ú.n. homogén egyenletet oldjuk meg, ami az

$$u'(t) = g(t)u(t)$$

egyenlet. Ez egy szeparábilis d.e. de nem tesszük fel, hogy $u(t)$ sehol sem 0, úgyhogy máshogy oldjuk meg. Elég azt észrevenni, hogy ha $G'(t) = g(t)$, akkor könnyen láthatóan az $u(t) = ce^{G(t)}$ függvény megoldás minden $c \in \mathbb{R}$-re, ugyanott lehet értelmezve ahol $g(t)$, és ez az összes lehetséges megoldás, mert a homogén d.e.-et meghatározó $f(t,p) = g(t)p$ függvény MVLL. Az $u'(t) = g(t)u(t) + h(t)$ ú.n. inhomogén egyenlet megoldását $v(t)e^{G(t)}$ alakban keressük, ahol v egy szintén I-n értemezett függvény kéne legyen. A $v(t)e^{G(t)}$ pontosan akkor megoldás, ha

$$(v(t)e^{G(t)})' = g(t)v(t)e^{G(t)} + h(t),$$

tehát ha

$$v'(t)e^{G(t)} + v(t)e^{G(t)}g(t) = g(t)v(t)e^{G(t)} + h(t),$$

ami azzal ekvivalens, hogy

$$v'(t) = \frac{h(t)}{e^{G(t)}}.$$

Egy ilyen $v\colon I \to \mathbb{R}$ függvényt választva az

$$(c + v(t))e^{G(t)}$$

is megoldás minden $c \in \mathbb{R}$-re, mert

$$((c + v(t))e^{G(t)})' = (ce^{G(t)})' + (v(t)e^{G(t)})' = ce^{G(t)}g(t) + g(t)v(t)e^{G(t)} + h(t) =$$
$$g(t)((c + v(t))e^{G(t)} + h(t).$$

Ugyanakkor ez megadja az összes megoldást is, mert a

$$g(t)p + h(t)$$

függvény MVLL és nyilván minden k.é.p. valamilyen $c \in \mathbb{R}$-el adható meg, hiszen

$$c = \frac{p_0}{e^{G(t_0)}} - v(t_0)$$

az $u(t_0) = p_0$ k.é.p. esetén. □

Megjegyezzük, hogy ha $\phi(t)$ a homogén d.e. egy megoldása és $\psi(t)$ az inhomogén d.e. egy megoldása (ú.n. partikuláris megoldás), akkor

$$\phi'(t) + \psi'(t) = g(t)\phi(t) + g(t)\psi(t) + h(t) = g(t)(\phi(t) + \psi(t)) + h(t),$$

tehát $\phi(t) + \psi(t)$ is megoldása az inhomogénnek.

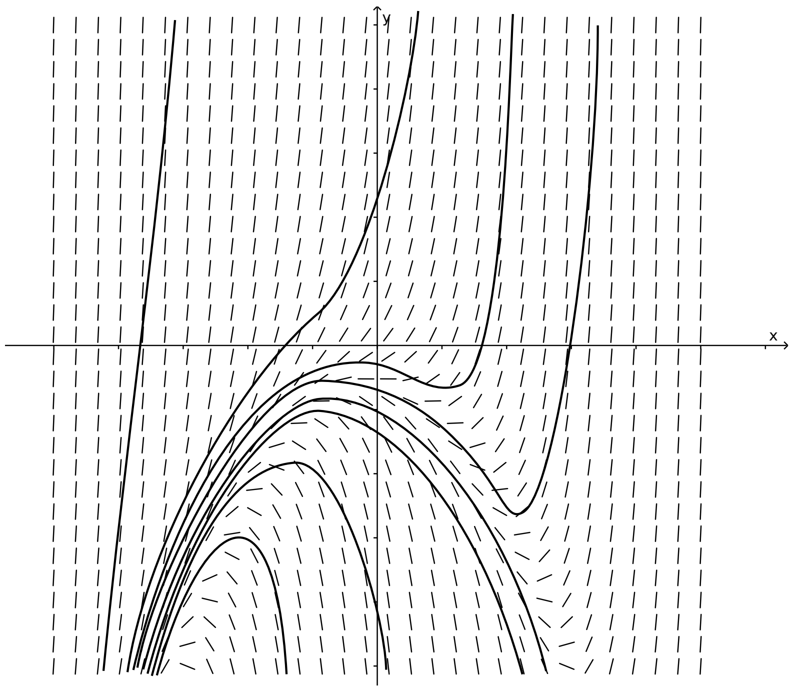
Ha pedig $\psi_1(t)$ és $\psi_2(t)$ akármilyen két megoldása az inhomogénnek, akkor $\psi_1(t) - \psi_2(t)$ megoldása a homogénnek, mert

$$\psi_1'(t) - \psi_2'(t) = g(t)(\psi_1(t) - \psi_2(t)) + h(t) - h(t) = g(t)(\psi_1(t) - \psi_2(t)).$$

Tehát az

$$u'(t) = g(t)u(t) + h(t)$$

d.e. megoldásai pontosan a $\phi(t) + \psi(t)$ alakú függvények, ahol $\psi(t)$ egy rögzített megoldása az inhomogénnek, $\phi(t)$ pedig egy megoldása a homogénnek.



ÁBRA 3. Az $y'(x) = 2y(x) + x^2 + 1$ lineáris differenciálegyenletnek az iránymezője, persze $f(x,y) = 2y + x^2 + 1$. Mindegyik k.é.p.-nak egyértelműen létezik az egész $\mathbb{R}$-en értelmezett megoldása, néhánynak a grafikonja az ábrán látható.

1.3. Egzakt differenciálegyenletek.

Definíció 1.11 (Egzakt differenciálegyenletek). Legyenek $I, J \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallumok, $g, h\colon I \times J \to \mathbb{R}$ folytonos függvények, h sehol sem 0. Ha

(1)
$$f(x,y) = -\frac{g(x,y)}{h(x,y)},$$

(2) van olyan $G\colon I \times J \to \mathbb{R}$ kétváltozós függvény, ami mindkét változója szerint deriválható és $G'_x(x,y) = g(x,y)$, $G'_y(x,y) = h(x,y)$,

akkor a differenciálegyenlet egzakt.

Tétel 1.12. *Az*
$$u'(t) = -\frac{g(t,u(t))}{h(t,u(t))}$$
egzakt d.e. implicit megoldása
$$G(t,u(t)) = c,$$
ahol $c \in \mathbb{R}$ *valamilyen konstans.*

Bizonyítás. A d.e.-et úgy is írhatjuk, hogy

$$u'(t)h(t,u(t)) + g(t,u(t)) = 0.$$

Mivel a $G(t,u(t))$ egyváltozós függvény deriváltja

$$g(t,u(t)) + h(t,u(t))u'(t),$$

ez azzal ekvivalens, hogy

$$G(t,u(t)) = c$$

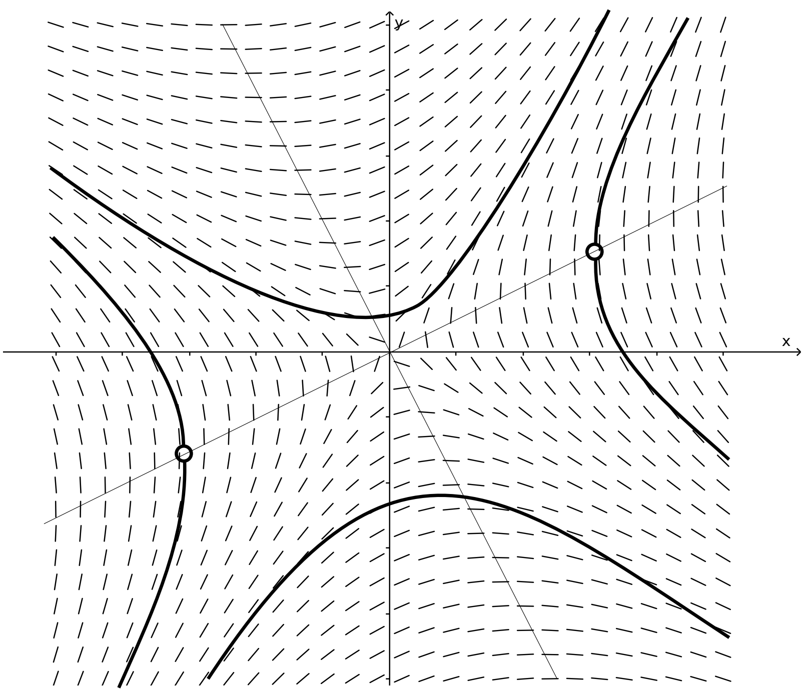
valamilyen $c \in \mathbb{R}$ konstansra, hiszen a $G(t,u(t))$ deriváltja azonosan 0. $\square$

Például

$$2tu(t) + (t^2+1)u'(t) = 0, \qquad \text{ahol} \qquad G(t,p) = t^2p + p,$$

$$(2t + u(t)) + (t - 2u(t))u'(t) = 0, \qquad \text{ahol} \qquad G(t,p) = t^2 + tp - p^2,$$

lásd 4. ábra.



ÁBRA 4. Az $y'(x) = -\frac{2x+y(x)}{x-2y(x)}$ differenciálegyenlet iránymezője és néhány megoldásának grafikonja. Ezek az $x^2+xpy-y^2 = C$ megoldáshalmazai. Az $y = -2x$ egyenletű egyenes a 0-hoz tartozó izoklina. Az $y = x/2$ egyenes pontjaiban nincs értelmezve az $f(x,y) = -\frac{2x+y}{x-2y}$ függvény, a közelében a vonalelemek majdnem függőlegesek.

2. Sajátvektorok és sajátértékek.

Definíció 2.1 (Sajátvektor és sajátérték). Ha $\varphi\colon V \to V$ egy lineáris leképezés és $0 \neq v \in V$ egy olyan vektor, $\lambda \in \mathbb{R}$ egy olyan szám, hogy

$$\varphi(v) = \lambda v,$$

akkor v a φ-nek a λ sajátértékhez tartozó sajátvektora. Hasonlóan ha $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ egy mátrix, akkor minden olyan $0 \neq [x_1, \dots, x_n]^T$ oszlopvektort és $\lambda \in \mathbb{R}$ számot, amire $A[x_1, \dots, x_n]^T = \lambda[x_1, \dots, x_n]^T$, az A mátrix sajátvektorának és a sajátvektorhoz tartozó sajátértéknek nevezünk.

Állítás 2.2. *A $\lambda \in \mathbb{R}$ pontosan akkor sajátértéke A-nak ha* $\det(A - \lambda E) = 0$.

Bizonyítás. □

Állítás 2.3. *Legyen $\varphi\colon V \to V$ lineáris leképezés. Ha $v_1, \dots, v_n \in V$ a φ sajátvektoraiból álló bázis, akkor a φ mátrixa ebben a bázisban egy diagonális mátrix a főátlóban a sajátértékekkel. Ha pedig valamilyen bázisban a φ mátrixa diagonális, akkor ennek a bázisnak a vektorai a φ sajátvektorai és a diagonálisbeli elemek a megfelelő sajátértékek.*

Bizonyítás. □

3. Lineáris differenciálegyenlet rendszerek és n-edrendű lineáris differenciálegyenletek

Definíció 3.1. Ha $U(t) = [u_1(t), \dots, u_n(t)]^T$, $B(t) = [b_1(t), \dots, b_n(t)]^T$ és

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{1,1}(t) & \cdots & a_{1,n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}(t) & \cdots & a_{n,n}(t) \end{bmatrix}$$

olyan $I \subset \mathbb{R}$-en értelmezett függvények, amikre

$$U'(t) = A(t)U(t) + B(t),$$

akkor U az

$$f(t, p_1, \dots, p_n) = A(t)[p_1, \dots, p_n]^T + B(t)$$

által meghatározott n-változós (inhomogén) lin. d.e. egyenlet rendszer megoldása. A megoldások halmazát $\mathcal{M}$-el jelöljük. Ilyenkor az $U'(t) = A(t)U(t)$ egyenletet homogén egyenletnek nevezzük és a megoldások halmazát $\mathcal{M}_0$-al jelöljük.

Állítás 3.2. *Az $U'(t) = A(t)U(t) + B(t)$, $U(t_0) = [v_1, \dots, v_n]^T$ egyenletnek és k.é.p.-nek egyértelműen létezik megoldása az I intervallumon.*

Bizonyítás. A megoldhatóságról szóló tétel ugyanúgy működik ebben az esetben is, egyedül az $f(t, p_1, \ldots, p_n) = A(t)[p_1, \ldots, p_n]^T + B(t)$ függvény második változóban való lokálisan Lipschitz tulajdonságát kell belátni. De

$$|A(t)[p_1, \ldots, p_n]^T - A(t)[q_1, \ldots, q_n]^T| = |A(t)||p - q|,$$

és erre t_0 egy kis környezetében

$$|A(t)||p - q| \leq K|p - q|$$

teljesül. □

Állítás 3.3. *Az $\mathcal{M}_0$ halmaz egy n-dimenziós altere az I-n értelmezett $\mathbb{R}^n$-be képező függvények vektorterének.*

Bizonyítás. Megjegyezzük, hogy minden k.é.p.-nek egyértelműen létezik megoldása. Az $\mathcal{M}_0$ altér n-dimenziós: ha $v_i \in \mathbb{R}^n$ bázis, akkor az $U_i(t_0) = v_i$ k.é.p. valamilyen I közös intervallumon értelmezett megoldásai lin. flenek, mert ha $\sum \lambda_i U_i = 0$, akkor $\sum \lambda_i U_i(t_0) = 0$ és ezért mindegyik $\lambda_i = 0$. Tehát M_0 legalább n-dimenziós. Ezek az U_i-k generálják is M_0-at, mert ha $V(t_0) = v$, akkor valamilyen $v = \sum \alpha_i v_i$ miatt $W = \sum \alpha_i U_i$ olyan megoldása a homogénnek, amire $W(t_0) = v$ és akkor a megoldás egyértelműsége miatt $W = V$. □

Az $\mathbb{U}$-val jelölt $t \mapsto [U_1(t) \cdots U_n(t)]$ mátrix leképezés egy ú.n. alapmátrix és ekkor nyilván

$$\mathcal{M}_0 = \{\mathbb{U}[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]^T : \alpha_i \in \mathbb{R}\}.$$

Állítás 3.4. *Legyen $W \in \mathcal{M}$ tetszőleges. Ekkor $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 + W$.*

Bizonyítás. Ha $V \in \mathcal{M}_0$ tetszőleges, akkor $W + V \in \mathcal{M}$. Tehát $W + \mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}$. De $\mathcal{M} \subset W + \mathcal{M}_0$ is, mert ha $\tilde{W} \in \mathcal{M}$, akkor $\tilde{W} - W \in \mathcal{M}_0$ és így $\tilde{W} = W + (\tilde{W} - W)$. Ezért

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 + W.$$

□

A következőkben kiszámoljuk a homogén egyenlet megoldásait, de csak abban az esetben, amikor A konstans és diagonalizálható. Ha $A(t) =$ konstans és hasonló egy

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \cdots \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{bmatrix}$$

diagonális mátrixhoz, azaz

$$D = T^{-1}AT,$$

akkor

$$A[t_i] = d_i[t_i],$$

tehát a $[t_i]$ oszlopvektorok sajátvektorai és a d_i számok sajátértékei A-nak.

Ekkor alaprendszert alkotnak az $U_i(t) = e^{d_i t}[t_i]$ vektorértékű függvények, mert $U_i'(t) = d_i e^{d_i t}[t_i] = Ae^{d_i t}[t_i] = AU_i(t)$, tehát $U_i \in \mathcal{M}_0$, és $U_i(0) = [t_i]$ miatt az U_i-k függetlenek is. Pontosabban ha valamilyen $t \neq 0$-ra $\mathbb{U}(t)$ nem lenne invertálható, akkor az oszlopok valamilyen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$-el vett kombinációja 0 lenne, de akkor a megoldás egyértelműsége miatt $\mathbb{U}(t)[\alpha_1, \dots, \alpha_n]^T = 0$ lenne minden t-re.

Továbbá ha $g \colon I \to \mathbb{R}^n$ tetszőleges függvény, akkor

$$(\mathbb{U}[g]^T)' = \mathbb{U}'[g]^T + \mathbb{U}[g']^T = A\mathbb{U}[g]^T + \mathbb{U}[g']^T.$$

Emiatt ha g olyan, hogy $B = \mathbb{U}[g']^T$, akkor $\mathbb{U}[g]^T \in \mathcal{M}$. Persze g-t kiszámolhatjuk abból, hogy

$$[g']^T = \mathbb{U}^{-1}B,$$

mert az $\mathbb{U}(t)$ mátrix invertálható.

Például ha

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

és $B(t) = (e^t, 0)$, akkor az A sajátértékei 3, -1, sajátvektorai pedig $[1,1]^T$ és $[1,-1]^T$. A $g(t) = (u(t), v(t))$ függvényre

$$e^{3t}u'(t) + e^{-t}v'(t) = e^t \qquad \text{és} \qquad e^{3t}u'(t) - e^{-t}v'(t) = 0$$

adódik és ebből $u(t) = -\frac{1}{4}e^{-2t}$, $v(t) = \frac{1}{4}e^{2t}$. Ezért egy partikuláris megoldás a

$$t \mapsto (0, -e^t/2).$$

Definíció 3.5 (n-edrendű lineáris differenciálegyenlet). Az

$$u^{(n)}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t)u^{(i)}(t) = b(t)$$

differenciálegyenletet n-edrendű lineáris differenciálegyenletnek nevezzük.

Tekintsük a

$$\begin{bmatrix} v_1'(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ v_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & \\ \vdots & & & & & \\ -a_0(t) & -a_1(t) & \cdots & \cdots & -a_{n-1}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ v_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{bmatrix}$$

differenciálegyenlet rendszert. Az egyenletrendszer alakjából következik, hogy

$$v_k(t) = v_1^{(k-1)}(t)$$

minden $1 \leq k \leq n$-re. Ekkor a magasabbrendű megoldása adja az elsőrendű megoldását és fordítva:

$$\begin{bmatrix} v_1(t) \\ \vdots \\ v_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(t) \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}, \qquad \text{és} \qquad u(t) = v_1(t),$$

ez utóbbi esetben $u^{(k)}(t) = v_{k+1}(t)$ minden $1 \leq k \leq n-1$-re.

Állítás 3.6. *Az n-edrendű homogén egyenlet megoldásainak $\mathcal{M}_0$-al jelölt halmaza egy n-dimenziós vektortér. Az inhomogén egyenlet megoldásainak $\mathcal{M}$-el jelölt halmazára $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 + u$, ahol $u \in \mathcal{M}$ tetszőleges partikuláris megoldás.*

Bizonyítás. Az egyik egyenlet megoldásai pont akkor összefüggőek, amikor a másiké is. A többi nyilvánvaló. □

Ha az n-edrendű egyenlet állandó együtthatós, akkor ezek szerint csak a

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & \\ \vdots & & & & & \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

mátrixszal definiált homogén d.e.-rendszert kell megoldanunk. Ha ezt diagonalizálni akarjuk, akkor a sajátértékeket kell kiszámolni először. Az

$$A = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \cdots & & \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 & \cdots & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & -\lambda & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} - \lambda \end{bmatrix}$$

mátrix determinánsa az első oszlop alapján rekurzívan kifejtve

$$\begin{aligned} & -a_0(-1)^{n-1} \cdot 1 + (-\lambda)(-a_1(-1)^{n-2} \cdot 1 + (-\lambda)(\cdots - a_{n-3}(-1)^2 \cdot 1 + \\ & \qquad (-\lambda)(-a_{n-2}(-1) + (-\lambda)(-a_{n-1} - \lambda)) \cdots)) = \\ & \qquad (-1)^n a_0 + (-1)^n a_1 \lambda + (-1)^n a_2 \lambda^2 + \cdots + (-1)^n a_{n-1} \lambda^{n-1} + (-1)^n \lambda^n. \end{aligned}$$

Ennek a gyökei tehát a

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \lambda a_1 + a_0 = 0$$

egyenlet megoldásai. Ha az összes gyök valós és a $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ gyökökhöz van sajátvektorokból álló bázis, akkor A diagonalizálható és

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = T^{-1}AT,$$

tehát az $U_i(t) = e^{\lambda_i t}[t_i]^T$ függvények alaprendszert alkotnak. A sajátvektorokból álló T mátrix is könnyen kiszámolható az A mátrix Gauss eliminációjával. Az A utolsó előtti sorának $a_{n-1} + \lambda$-szorosát az utolsó sorhoz adva azt kapjuk, hogy

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 & & \cdots & \\ \vdots & & \ddots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & & -\lambda & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & (-a_{n-2} - a_{n-1}\lambda - \lambda^2) & 0 \end{bmatrix},$$

ennek az eggyel feljebb lévő sorának az $a_{n-2}+a_{n-1}\lambda+\lambda^2$-szeresét az utolsó sorához adva azt kapjuk, hogy

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \cdots & \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & \cdots & 0 & -\lambda & 1 \\ -a_0 & \cdots & (-a_{n-3}-\lambda a_{n-2}-\lambda^2 a_{n-1}-\lambda^3) & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

és ezt folytatva végül az lesz a mátrix, hogy

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \cdots & \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & \cdots & 0 & -\lambda & 1 \\ -\lambda^n-\sum_{i=0}^{n-1} a_i\lambda^i & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ha ebben λ helyére valamelyik λ_i-t írjuk, akkor a mátrix

$$\begin{bmatrix} -\lambda_i & 1 & 0 & \cdots & \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & \cdots & 0 & -\lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

lesz, tehát a λ_i-hez tartozó sajátvektorok

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \lambda_i x_1 \\ \vdots \\ \lambda_i^n x_1 \end{bmatrix},$$

amik csak akkor lesznek lineárisan függetlenek, ha mindegyik λ_i különböző. Ekkor az n-edrendű homogén egyenlet megfelelő megoldásai $x_1=1$ választással

$$u_i(t)=e^{\lambda_i t}.$$

Ha az A nem diagonalizálható de mindegyik λ_i valós, akkor bonyolultabb számolással azt kapjuk, hogy az n-edrendű homogén egyenlet megfelelő megoldásai

$$u_1(t)=e^{\lambda_1 t},\ldots,u_{m_1}(t)=t^{m_1-1}e^{\lambda_1 t},$$

$$u_{m_1+1}(t)=e^{\lambda_2 t},\ldots,u_{m_1+m_2}(t)=t^{m_2-1}e^{\lambda_2 t},$$

$$\vdots$$

$$u_{m_1+\cdots+m_{k-1}+1}(t)=e^{\lambda_k t},\ldots,u_{m_1+\cdots+m_k}(t)=t^{m_k-1}e^{\lambda_k t},$$

ahol k darab kölünböző λ_i van és a multiplicitásuk m_i. Ha pedig van nem valós $\alpha_i+i\beta_i$ és $\alpha_i-i\beta_i$ sajátérték is l_i multiplicitással, akkor a megfelelő megoldások

$$u_{i,j}(t)=t^j e^{\alpha_i t}\cos\beta_i t \qquad \text{és} \qquad v_{i,j}(t)=t^j e^{\alpha_i t}\sin\beta_i t,$$

ahol $j=0,\ldots,l_i-1$.

Tehát ezek a függvények bázisát alkotják az $\mathcal{M}_0$ vektortérnek, azaz minden megoldása a homogén egyenletnek

$$u(t) = \sum_{i=1}^{m_1} C_{1,i} t^{i-1} e^{\lambda_1 t} + \sum_{i=1}^{m_2} C_{2,i} t^{i-1} e^{\lambda_2 t} + \cdots + \sum_{i=1}^{m_k} C_{k,i} t^{i-1} e^{\lambda_k t} +$$
$$\sum_{j=1}^{l_1} (A_{1,j} t^{j-1} e^{\alpha_1 t} \cos \beta_1 t + B_{1,j} t^{j-1} e^{\alpha_1 t} \sin \beta_1 t) + \cdots +$$
$$\sum_{j=1}^{l_s} (A_{s,j} t^{j-1} e^{\alpha_s t} \cos \beta_s t + B_{s,j} t^{j-1} e^{\alpha_s t} \sin \beta_s t)$$

alakú, ahol $C_{i,j}, A_{i,j}, B_{i,j}$ tetszőleges valós számok és

$$\sum_{i=1}^{k} m_i + 2 \sum_{j=1}^{s} l_j = n.$$

Ahhoz, hogy megoldjuk az inhomogén egyenletet, csak egy darab partikuláris megoldást kell találni. Az ú.n. próbafüggvény módszer szerint ha $b(t)$ valamilyen típusú függvény, akkor az inhomogén megoldás is hasonló típus kéne legyen. Ha például $b(t) = Q(t)e^{xt}$, ahol Q egy r-edfokú polinom és x pontosan j-szeres gyöke a karakterisztikus polinomnak, akkor

$$v(t) = t^j R(t) e^{xt}$$

egy partikuláris megoldás, ahol R egy legfeljebb r-edfokú polinom.

Például az

$$u''(t) - 3u'(t) + 2u(t) = t^2 e^t$$

d.e.-nek $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 2)(\lambda - 1)$ a karakterisztikus polinomja, tehát a homogén egyenlet megoldásai

$$C_1 e^{2t} + C_2 e^t.$$

A

$$v(t) = t(At^2 + Bt + C)e^t$$

pedig partikuláris megoldás lesz valamilyen A, B, C-re.