

Függvénysorozatok és függvénysorok

1. Pontonként konvergens és egyenletesen konvergens függvénysorozatok

Definíció 1.1 (Sorozat). Legyen $0 \leq \mu \in \mathbb{N}$ egy rögzített egész szám és legyen \mathcal{A} egy tetszőleges halmaz. Egy függvényt, ami minden olyan $n \in \mathbb{N}$ -hez amire $n \geq \mu$, egy $a_n \in \mathcal{A}$ elemet rendel, sorozatnak (vagy μ -tól kezdődő \mathcal{A} -beli sorozatnak) nevezünk és $[a_n]_{n \geq \mu}$ -vel jelöljük.

Ha $\mu = 0$, akkor az $[a_n]_{n \geq 0}$ jelölés helyett az egyszerűbb $[a_n]$ jelölést is használjuk¹.

Példa 1.2. Ha $\mathcal{A} = \mathbb{R}$, akkor egy \mathcal{A} -beli sorozatot számsorozatnak nevezünk. Ha az \mathcal{A} egy adott $X \subseteq \mathbb{R}$ halmazon értelmezett függvények halmaza, akkor pedig egy \mathcal{A} -beli sorozatot X -beli függvénysorozatnak nevezünk.

Definíció 1.3 (Függvénysorozat). Legyen $X \subseteq \mathbb{R}$. Egy sorozatot, ami minden $n \in \mathbb{N}$ -hez egy X -en értelmezett $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt rendel, X -en értelmezett függvénysorozatnak nevezünk és $[f_n]$ -nel jelöljük.

Példa 1.4. Ha $X = \mathbb{R}$ és $f_n(x) = x^n$, akkor egy \mathbb{R} -en értelmezett függvénysorozatot kapunk, aminek az első tagja az \mathbb{R} -en értelmezett $f_1(x) = x$ függvény, a második tagja az \mathbb{R} -en értelmezett $f_2(x) = x^2$ függvény, a harmadik tagja az \mathbb{R} -en értelmezett $f_3(x) = x^3$ függvény, stb.

Definíció 1.5 (Pontonkénti konvergencia). Az $X \subseteq \mathbb{R}$ -en értelmezett $[f_n]$ függvénysorozat pontonként konvergál (vagy pontonként tart) az $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ függvényhez, jelölésben $f_n \rightarrow f$ vagy $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$, ha minden $x \in X$ -re az $[f_n(x)]$ számsorozat konvergál $f(x)$ -hez amikor $n \rightarrow \infty$.

Definíció 1.6 (Egyenletes konvergencia). Az $X \subseteq \mathbb{R}$ -en értelmezett $[f_n]$ függvénysorozat egyenletesen konvergál (vagy egyenletesen tart) X -en az $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ függvényhez, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy ha $n > N$, akkor minden $x \in X$ -re $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Ez persze azzal ekvivalens, hogy az

$$n \mapsto \sup_{x \in X} \{|f_n(x) - f(x)|\}$$

számsorozat tart 0-hoz ha $n \rightarrow \infty$.

¹Szokásos az (a_n) jelölés is, de ebben a jegyzetben nem használjuk.

Állítás 1.7. Az $[f_n]$ függvénysorozat egyenletesen konvergál f -hez X -en \iff létezik olyan pozitív tagú és 0-hoz tartó $[a_n]$ számsorozat, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ -re és $x \in X$ -re $|f_n(x) - f(x)| \leq a_n$.

Bizonyítás. Ha $f_n \rightarrow f$ egyenletesen X -en, akkor

$$a_n = \frac{1}{n} + \sup_{x \in X} \{|f_n(x) - f(x)|\}$$

definícióval az $[a_n]$ számsorozat rendelkezik a várt tulajdonságokkal.

Ha pedig a pozitív tagú $[a_n]$ számsorozat tart 0-hoz és minden $n \in \mathbb{N}$ -re és $x \in X$ -re

$$|f_n(x) - f(x)| \leq a_n,$$

akkor

$$\sup_{x \in X} \{|f_n(x) - f(x)|\} \leq a_n$$

is teljesül, amiből következik, hogy

$$\sup_{x \in X} \{|f_n(x) - f(x)|\} \rightarrow 0$$

ha $n \rightarrow \infty$ és így $f_n \rightarrow f$ egyenletesen X -en. \square

Állítás 1.8. Ha az $[f_n]$ függvénysorozat egyenletesen tart f -hez, akkor az $[f_n]$ függvénysorozat pontonként is tart f -hez.

Bizonyítás. Legyen $x_0 \in X$ és $\varepsilon > 0$. Ekkor van olyan $N \in \mathbb{N}$ hogy minden $n > N$ és $x \in X$ esetén $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, de akkor minden $n > N$ -re $|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$ is teljesül. Tehát $f_n(x_0)$ tart $f(x_0)$ -hoz ha $n \rightarrow \infty$. \square

Példa 1.9. A pontonkénti konvergenciából nem következik az egyenletes konvergencia. Tekintsük az $f_n(x) = x^n$ függvényeket, ahol $x \in [0, 1]$. Ekkor $[f_n]$ pontonként tart ahhoz az $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ függvényhez, ami 0 ha $x \in [0, 1)$ és $f(1) = 1$. De $[f_n]$ nem tart f -hez egyenletesen, mert minden n -re és $0 \leq x < 1$ -re az

$$|f_n(x) - f(x)| = |x^n - 0| = x^n$$

szám tetszőlegesen közel van 1-hez ha x elég közel van 1-hez. Azt is megfigyelhetjük, hogy az f_n függvények folytonosak $[0, 1]$ -en, de f nem folytonos $[0, 1]$ -en. Később látni fogjuk, hogy ha folytonos függvények egyenletesen tartanak egy függvényhez, akkor az is folytonos kell legyen.

Példa 1.10. Legyenek az $f_n(x) = x^n$ függvények \mathbb{R} -en értelmezve. Ekkor az $f_n|_{(-1, 1]}$ megszorításokból álló függvénysorozat pontonként konvergens $(-1, 1]$ -en. Ugyanakkor minden $\delta > 0$ -ra az $f_n|_{[-1+\delta, 1-\delta]}$ megszorítások egyenletesen konvergálnak az azonosan 0 függvényhez a $[-1 + \delta, 1 - \delta]$ halmazon.

Példa 1.11. Legyen $X = [0, \infty)$ és legyenek az X -en értelmezett f_n függvények az

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2}$$

formulával definiálva.

Ekkor $[f_n]$ tart az azonosan 0 függvényhez pontonként az X -en. De $[f_n]$ nem konvergál egyenletesen, mert például $f_n(1/n) = 1/2$ minden $n \in \mathbb{N}$ -re.

Állítás 1.12. *Tegyük fel, hogy $f_n \rightarrow f$ pontonként X -en. Legyen rögzített $x \in X$ -hez és $\varepsilon > 0$ -hoz $N(\varepsilon, x)$ a legkisebb olyan természetes szám amire ha $n > N(\varepsilon, x)$, akkor*

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Ekkor $f_n \rightarrow f$ egyenletesen \iff minden $\varepsilon > 0$ -ra $\sup_{x \in X} \{N(\varepsilon, x)\} < \infty$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $f_n \rightarrow f$ egyenletesen. Legyen $x_0 \in X$ és $\varepsilon > 0$, ekkor van a feltételeknek megfelelő $N(\varepsilon, x_0)$, de az egyenletes konvergencia miatt van olyan $M(\varepsilon) \in \mathbb{R}$ is hogy minden $x \in X$ -re

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

ha $n > M(\varepsilon)$, speciálisan x_0 -ra is. Ezért $N(\varepsilon, x_0) \leq M(\varepsilon)$, tehát

$$\sup_{x \in X} \{N(\varepsilon, x)\} \leq M(\varepsilon) < \infty.$$

Most tegyük fel, hogy $\varepsilon > 0$ és $\sup_{x \in X} \{N(\varepsilon, x)\} < \infty$. Legyen $M(\varepsilon) = \sup_{x \in X} \{N(\varepsilon, x)\}$. Emiatt ha $n > M(\varepsilon)$, akkor minden $x \in X$ -re $n > N(\varepsilon, x)$ tehát minden $x \in X$ -re $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. \square

Az előbbi 1.12 állításból egyszerűen adódik a következő.

Állítás 1.13. *Tegyük fel, hogy $f_n \rightarrow f$ pontonként X -en. Legyenek valamilyen $k \in \mathbb{N}$ -re A_1, \dots, A_k olyan X -beli halmazok, hogy*

$$\bigcup_{i=1}^k A_i = X.$$

Ha minden $i = 1, \dots, k$ -ra $f_n \rightarrow f$ egyenletesen az A_i halmazon, akkor $f_n \rightarrow f$ egyenletesen az egész X -en is.

Bizonyítás. Az 1.12 állítás szerint minden $\varepsilon > 0$ -ra és minden $i = 1, \dots, k$ -ra $\sup_{x \in A_i} \{N(\varepsilon, x)\} < K_i$ valamilyen $K_i \in \mathbb{R}$ -el. De mivel

$$\sup_{x \in X} \{N(\varepsilon, x)\} \leq \max_{1 \leq i \leq k} \{K_i\},$$

ezért $\sup_{x \in X} \{N(\varepsilon, x)\} < \infty$. \square

2. Adott tulajdonsággal rendelkező függvényekből álló függvénysorozatok

A következőkben azzal a problémával foglalkozunk, hogy ha az X -en értelmezett $[f_n]$ függvénysorozat tagjai mind rendelkeznek egy adott tulajdonsággal és $[f_n]$ tart f -hez X -en, akkor az f függvény rendelkezik-e ezzel a tulajdonsággal.

2.1. Folytonos függvények.

Tétel 2.1. *Legyen $X \subseteq \mathbb{R}$. Ha az $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ függvények folytonosak és egyenletesen tartanak egy $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ függvényhez, akkor f is folytonos.*

Bizonyítás. Elég megmutatni, hogy ha $x_0 \in X$ tetszőleges pont, akkor f folytonos x_0 -ban. Legyen $\varepsilon > 0$ rögzített, ekkor kell találni x_0 -nak egy olyan U_{x_0} nyílt környezetét, hogy ha $x \in U_{x_0} \cap X$, akkor $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Legyenek $x \in X$ és $n \in \mathbb{N}$ tetszőlegesek. Ekkor

$$f(x) - f(x_0) = f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0),$$

tehát

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|.$$

Mivel $f_n \rightarrow f$ egyenletesen X -en, ezért az előbb rögzített ε -hoz létezik $N(\varepsilon)$ hogy minden $n \geq N(\varepsilon)$ -ra és $x \in X$ -re $|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Emiatt

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{2\varepsilon}{3} + |f_{N(\varepsilon)}(x) - f_{N(\varepsilon)}(x_0)|$$

is teljesül minden $x \in X$ -re.

Mivel az $f_{N(\varepsilon)}$ függvény is folytonos, ezért $\frac{\varepsilon}{3}$ -hoz létezik olyan U_{x_0} környezet, hogy minden $x \in U_{x_0} \cap X$ -re $|f_{N(\varepsilon)}(x) - f_{N(\varepsilon)}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

De akkor minden $x \in U_{x_0} \cap X$ -re

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

tehát az f függvény folytonos x_0 -ban. □

Megjegyzés 2.2. A bizonyításból az is látszik, hogy ha csak annyit teszünk fel, hogy az f_n -ek folytonosak egy x_0 pontban és $f_n \rightarrow f$ egyenletesen, akkor abból következik, hogy f is folytonos x_0 -ban.

2.2. Riemann integrálható függvények.

Emlékeztetünk, hogy egy $[a, b]$ kompakt intervallumon értelmezett $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor Riemann integrálható, ha korlátos és minden $\varepsilon > 0$ -hoz létezik olyan felosztása az $[a, b]$ intervallumnak I_1, \dots, I_n részintervallumokra, hogy

$$\sum_{k=1}^n \lambda(I_k) \sup_{x, y \in I_k} \{|f(x) - f(y)|\} < \varepsilon,$$

ahol $\lambda(I_k)$ jelöli az I_k intervallum hosszát.

Tétel 2.3. *Az $[f_n]$ függvénysorozat minden tagja Riemann-integrálható $[a, b]$ -n és $f_n \rightarrow f$ egyenletesen $[a, b]$ -n $\implies f$ is Riemann-integrálható $[a, b]$ -n és*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f.$$

Bizonyítás. Tetszőleges $N \in \mathbb{N}$ -re

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(y)| + |f_N(y) - f(y)|.$$

Mivel $f_n \rightarrow f$ egyenletesen $[a, b]$ -n, ezért minden $\varepsilon > 0$ -hoz létezik olyan $N(\varepsilon)$, hogy minden $n \geq N(\varepsilon)$ -re és $x \in [a, b]$ -re $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$.

Ezekből következik, hogy ha J egy tetszőleges részintervalluma $[a, b]$ -nek, akkor minden $x, y \in J$ -re

$$|f(x) - f(y)| < 2\varepsilon + |f_{N(\varepsilon)}(x) - f_{N(\varepsilon)}(y)|.$$

De ekkor

$$(2.1) \quad \sup_{x, y \in J} \{|f(x) - f(y)|\} \leq 2\varepsilon + \sup_{x, y \in J} \{|f_{N(\varepsilon)}(x) - f_{N(\varepsilon)}(y)|\}$$

is teljesül. Ebből a $J = [a, b]$ választással könnyen látszik az is, hogy f korlátos, mert $f_{N(\varepsilon)}$ korlátos hiszen Riemann integrálható.

Mivel az $f_{N(\varepsilon)}$ függvény Riemann integrálható $[a, b]$ -n, ezért van olyan I_1, \dots, I_n felosztása az $[a, b]$ intervallumnak, hogy

$$\sum_{k=1}^n \lambda(I_k) \sup_{x, y \in I_k} \{|f_{N(\varepsilon)}(x) - f_{N(\varepsilon)}(y)|\} < \varepsilon.$$

De ekkor (2.1) miatt

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \lambda(I_k) \sup_{x, y \in I_k} \{|f(x) - f(y)|\} &\leq \sum_{k=1}^n \lambda(I_k) \left(2\varepsilon + \sup_{x, y \in I_k} \{|f_{N(\varepsilon)}(x) - f_{N(\varepsilon)}(y)|\} \right) = \\ &= (b-a)2\varepsilon + \sum_{k=1}^n \lambda(I_k) \sup_{x, y \in I_k} \{|f_{N(\varepsilon)}(x) - f_{N(\varepsilon)}(y)|\} < (b-a)2\varepsilon + \varepsilon = \varepsilon(2(b-a) + 1), \end{aligned}$$

ami azt mutatja, hogy f is Riemann integrálható.

Meg kell még mutatnunk, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f$. Mivel $f_n \rightarrow f$ egyenletesen az $[a, b]$ intervallumon, ezért az

$$n \mapsto \sup_{x \in [a, b]} \{|f(x) - f_n(x)|\}$$

számsorozat 0-hoz tart ha $n \rightarrow \infty$. Ezért

$$\left| \int_a^b f - \int_a^b f_n \right| = \left| \int_a^b (f - f_n) \right| \leq \int_a^b |f - f_n| \leq (b - a) \sup_{x \in [a, b]} \{|f(x) - f_n(x)|\} \rightarrow 0$$

ha $n \rightarrow \infty$. Tehát $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f$. \square

Példa 2.4. Ha az f_n függvények Riemann integrálhatók és $f_n \rightarrow f$ pontonként, abból nem következik, hogy f is Riemann integrálható, még akkor se ha f korlátos. Például legyen $f(x) = 1$ ha $x \in [0, 1]$ racionális és $f(x) = 0$ ha $x \in [0, 1]$ irracionális. Ez az f függvény nem Riemann integrálható, de mivel csak megszámlálható sok racionális szám van, ezért könnyen konstruálhatunk olyan Riemann integrálható függvényekből álló $[0, 1]$ -en értelmezett f_n függvénysorozatot, amelyik pontonként tart f -hez. Ugyanis rendezzük sorozatba a $[0, 1]$ -beli racionális számokat, legyen ez a számsorozat $[a_n]$. Ekkor legyen $f_n(x) = 1$ ha $x \in \{a_1, \dots, a_n\}$, és $f_n(x) = 0$ különben. Ezek az f_n függvények Riemann integrálhatók, mert korlátosak és csak véges sok szakadási pontjuk van, és nyilván pontonként, de nem egyenletesen konvergálnak f -hez.

Példa 2.5. Olyan Riemann integrálható $[a, b]$ -n értelmezett függvényekből álló $[f_n]$ függvénysorozat is létezik, ami nem konvergál egyenletesen, hanem csak pontonként egy Riemann integrálható f függvényhez, mégis $\int_a^b f_n \rightarrow \int_a^b f$ ha $n \rightarrow \infty$. Például legyen $[a, b] = [0, 1]$ és $f_n(x) = x^n$. Ekkor f_n csak pontonként tart az f függvényhez, ahol $f(x) = 0$ ha $0 \leq x < 1$ és $f(1) = 1$. Ugyanakkor

$$\int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$$

ha $n \rightarrow \infty$ és persze az is igaz, hogy

$$\int_0^1 f = 0.$$

Példa 2.6. Konstruálhatunk olyan Riemann integrálható és folytonos $[0, 1]$ -en értelmezett nemnegatív függvényekből álló $[f_n]$ függvénysorozatot is, ami pontonként tart az azonosan 0 függvényhez, aminek persze 0 a Riemann integrálja, de

$$\int_0^1 f_n \rightarrow \alpha,$$

ahol α előre adott akármilyen $0 < \alpha \in \mathbb{R}$ vagy ahol $\alpha = \infty$.

Abban az esetben, ha $0 < \alpha \in \mathbb{R}$, akkor legyen

$$f_n(x) = 4\alpha n^2 x$$

ha $0 \leq x \leq \frac{1}{2n}$, legyen

$$f_n(x) = -4\alpha n^2 \left(x - \frac{1}{n} \right)$$

ha $\frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{n}$ és legyen

$$f_n(x) = 0$$

ha $x \geq 1/n$. Ekkor f_n folytonos függvény, $\int_0^1 f_n = \alpha$, de $[f_n]$ pontonként tart az azonosan 0 függvényhez, aminek persze 0 az integrálja.

Ha meg $\alpha = \infty$, akkor az előbbi $4\alpha n^2 x$ és $-4\alpha n^2 \left(x - \frac{1}{n} \right)$ helyett

$$2n^3 x$$

és

$$-2n^3 \left(x - \frac{1}{n} \right)$$

véve $\int_0^1 f_n = \frac{n}{2}$ ami persze tart ∞ -hez, de megint csak $[f_n]$ pontonként tart 0-hoz.

2.3. Differenciálható függvények.

A Riemann integrál után a deriválhatóságot is megvizsgáljuk. Meglepő módon nem a függvénysorozat egyenletes konvergenciája lesz fontos, hanem a deriváltfüggvények egyenletes konvergenciája. Sőt, a függvénysorozat konvergenciáját elég csak egyetlen egy pontban feltenni.

Emlékeztetünk, hogy egy f függvényt akkor nevezünk differenciálhatónak egy $[a, b]$ kompakt intervallumon, ha $a \neq b$, az f differenciálható az (a, b) nyílt intervallumon és f balról ill. jobbról differenciálható a -ban ill. b -ben.

Példa 2.7. Nem nehéz példát mutatni olyan $[-1, 1]$ -en értelmezett $[f_n]$ függvénysorozatra, ami az $f(x) = |x|$ függvényhez egyenletesen konvergál $[-1, 1]$ -en, de az f_n függvények mindenütt differenciálhatók. Legyen ugyanis

$$f_n(x) = \sqrt{\frac{1}{n} + x^2}$$

ha $-1 \leq x \leq 1$. Ekkor nem nehéz belátni, hogy $f_n \rightarrow f$ egyenletesen és nyilvánvalóan mindegyik f_n differenciálható, míg az f függvény nem differenciálható a 0-ban.

Tétel 2.8. *Tegyük fel, hogy*

- az f_n függvények folytonosan differenciálhatók a kompakt $[a, b]$ intervallumon,
- egy valamilyen $x_0 \in [a, b]$ -re az $[f_n(x_0)]$ számsorozat konvergens és
- az f'_n deriváltfüggvények egyenletesen tartanak valamihez az $[a, b]$ intervallumon.

Ekkor $[f_n]$ egyenletesen tart az $[a, b]$ -n valamilyen folytonosan differenciálható $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvényhez és $[f'_n]$ is egyenletesen tart az $[a, b]$ -n f' -hoz.

Bizonyítás. A tétel feltételei szerint az f'_n deriváltfüggvények egyenletesen tartanak valamilyen $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvényhez. Mivel az f'_n függvények folytonosak, ezért a 2.1 tétel szerint g is folytonos $[a, b]$ -n. Legyen

$$G(x) = \int_{x_0}^x g$$

a g egy integrálfüggvénye. A G deriválható $[a, b]$ -n, mert g ott folytonos, és $G' = g$.

Jelölje $\alpha \in \mathbb{R}$ az $[f_n(x_0)]$ számsorozat határértékét. Legyen az $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény úgy definiálva, hogy

$$f(x) = \alpha + G(x).$$

Ekkor f differenciálható $[a, b]$ -n és $f' = g$, ezért f folytonosan differenciálható $[a, b]$ -n. Az is teljesül, hogy $f(x_0) = \alpha$.

Mivel $f' = g$, ezért nyilván $[f'_n]$ egyenletesen tart f' -hoz. Meg kell még mutatnunk, hogy $[f_n]$ egyenletesen tart az f -hez. Az f'_n függvények folytonosak és így Riemann integrálhatóak, ezért a Newton-Leibniz szabály alapján minden $x \in [a, b]$ -re

$$\int_{x_0}^x f'_n = f_n(x) - f_n(x_0),$$

tehát

$$f_n(x) = \int_{x_0}^x f'_n + f_n(x_0).$$

Ugyanakkor $f(x) = \alpha + \int_{x_0}^x g$, és ezekből az következik, hogy minden $x \in [a, b]$ -re

$$|f(x) - f_n(x)| \leq |\alpha - f_n(x_0)| + \left| \int_{x_0}^x (g - f'_n) \right| \leq |\alpha - f_n(x_0)| + \int_{x_0}^x |g - f'_n|.$$

Mivel

$$\int_{x_0}^x |g - f'_n| \leq \int_a^b |g - f'_n| \leq (b - a) \sup_{x \in [a, b]} \{|g - f'_n|\}$$

ezért az

$$\varepsilon_n = |\alpha - f_n(x_0)| + (b - a) \sup_{x \in [a, b]} \{|g - f'_n|\}$$

jelöléssel

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon_n$$

minden $x \in [a, b]$ -re. Nyilván az $[\varepsilon_n]$ számsorozat 0-hoz tart ha $n \rightarrow \infty$, így $[f_n]$ egyenletesen tart az f -hez. \square

Az előző tételt kicsit átfogalmazva egyszerűen kapjuk a következő állítást.

Tétel 2.9. *Tegyük fel, hogy*

- az f_n függvények folytonosan differenciálhatók a kompakt $[a, b]$ intervallumon,
- az $[f_n]$ függvénysorozat pontonként konvergál egy f függvényhez az $[a, b]$ intervallumon és
- az f'_n deriváltfüggvények egyenletesen tartanak valamihez az $[a, b]$ intervallumon.

Ekkor f folytonosan differenciálható, $[f_n]$ egyenletesen tart f -hez és $[f'_n]$ is egyenletesen tart f' -hoz.

Bizonyítás. Az előbbi 2.8 tétel szerint (mivel $[f_n]$ konvergens valamilyen $x_0 \in [a, b]$ pontban) az $[f_n]$ függvénysorozat egyenletesen tart valamilyen folytonosan differenciálható függvényhez, de akkor pontonként is. Ebből nyilván következik, hogy ez a függvény az f , mert a határérték mindig egyértelmű ha létezik. Ebből következnek a tétel állításai. \square

2.4. Függvénysorok.

Definíció 2.10 (Függvénysor). Legyen $X \subseteq \mathbb{R}$. Az olyan $[s_n]$ függvénysorozatot, amelyik

$$s_n = \sum_{k=1}^n f_k$$

alakú, ahol minden $k \in \mathbb{N}$ -re $f_k: X \rightarrow \mathbb{R}$ egy X -en értelmezett függvény, X -en értelmezett függvénysornak nevezzük. Ilyenkor az $[s_n]$ függvénysorozatot $\sum f_n$ -el vagy $\sum_{n \geq 0} f_n$ -el, esetleg értelemszerűen $\sum_{n \geq \mu} f_n$ -el is² jelöljük. Ha egy X -en értelmezett $\sum f_n$ függvénysor konvergens az X halmazon, akkor azt a $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ -el jelölt függvényt, amelyik egy $x \in X$ ponthoz a $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ numerikus sor határértékét rendeli, a függvénysor összegfüggvényének nevezzük.

Megjegyzés 2.11. Gyakran az f_n függvényeket egyszerűbb csak valamilyen x -től függő formulával megadni. Ilyenkor a függvénysort szokás x -től függő formulával megadni, például $\sum x^n$, $\sum \sin(x)$, $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n!}$, stb. Hogy ez mikor jelöl mégis numerikus sort (valamilyen x értékre) és mikor valamilyen függvénysort, arra esetenként felhívjuk a figyelmet, amikor ez nehezen érthető vagy fontos különbséget tenni.

Megjegyzés 2.12. Az eddig függvénysorozatokra bizonyított tételek nyilván függvénysorokra is érvényesek. Megfogalmazzuk a legfontosabb tételleket, amelyek egyszerű következményei a függvénysorozatokra vonatkozó megfelelő tételeknek.

Tétel 2.13. Ha az $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ függvények folytonosak és a $\sum f_n$ függvénysor egyenletesen konvergens, akkor a $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ függvény is folytonos.

²Ahol $0 \leq \mu \in \mathbb{N}$ egy rögzített egész szám.

Tétel 2.14. Legyen $[a, b]$ egy kompakt intervallum. Ha az $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvények Riemann integrálhatók és $\sum f_n$ egyenletesen tart f -hez, akkor f is Riemann integrálható és $\int_a^b f = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n$.

Tétel 2.15. Legyen $[a, b]$ egy kompakt intervallum. Ha az $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvények folytonosan differenciálhatók $[a, b]$ -n, a $\sum f_n$ függvénysor konvergens és a $\sum f'_n$ függvénysor egyenletesen konvergens, akkor az $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ függvény is folytonosan differenciálható és $f' = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n$.

3. Cauchy kritérium és Weierstrass féle egyenletes konvergencia tétel

Állítás 3.1. Az $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ függvényekből álló $[f_n]$ függvénysorozat pontonként konvergens $\iff [f_n]$ pontonként Cauchy sorozat.

Bizonyítás. Minden $x \in X$ -re az $[f_n(x)]$ számsorozat pontosan akkor konvergens, ha Cauchy sorozat. Ebből nyilvánvalóan következik az állítás. \square

Megjegyzés 3.2. Ugyanez a tétel érvényes függvénysorokra is.

Állítás 3.3. Az $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ függvényekből álló $[f_n]$ függvénysorozat egyenletesen konvergens \iff minden $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy bármilyen $n, m \geq N$ esetén minden $x \in X$ -re $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az $[f_n]$ függvénysorozat egyenletesen tart az f függvényhez. Ekkor minden $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy bármilyen $n, m \geq N$ esetén minden $x \in X$ -re

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

és

$$|f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

De ekkor minden $x \in X$ -re

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f(x)| + |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

amiből következik az állítás.

Ha meg azt tesszük fel, hogy minden $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy bármilyen $n, m \geq N(\varepsilon)$ esetén minden $x \in X$ -re $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$, akkor mivel ezek szerint minden $x \in X$ -re az $[f_n(x)]$ számsorozat Cauchy sorozat, ebből következik, hogy minden $x \in X$ -re az $[f_n(x)]$ számsorozat konvergens. Jelölje a határértéket $f(x)$.

Ekkor az

$$m \mapsto |f_m(x) - f_n(x)|$$

számsorozat konvergens ha $m \rightarrow \infty$ és a határértéke $|f(x) - f_n(x)|$.

De akkor a feltétel szerint létező $N(\varepsilon)$ -ra fennáll, hogy minden $x \in X$ -re és $n \geq N(\varepsilon)$ -ra $|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$, ami azt jelenti, hogy az $[f_n]$ függvénysorozat egyenletesen tart az f függvényhez. \square

Állítás 3.4. *Legyenek $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ adott függvények. A $\sum f_n$ függvénysor egyenletesen konvergens \iff minden $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy bármilyen $n \geq N$ és $p \in \mathbb{N}$ esetén minden $x \in X$ -re $|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)| < \varepsilon$.*

Bizonyítás. Következik az előző 3.3 állításból, ha $m = n + p$. \square

Tétel 3.5 (Weierstrass kritérium). *Legyen $[f_n]$ egy függvénysorozat. Ha valamilyen $\sum a_n$ konvergens nemnegatív tagú sorral minden $x \in X$ -re és $n \in \mathbb{N}$ -re teljesül, hogy $|f_n(x)| \leq a_n$, akkor a $\sum f_n$ függvénysor egyenletesen konvergens.*

Bizonyítás. Ha a $\sum a_n$ sor konvergens, akkor az is teljesül, hogy minden $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy bármilyen $n \geq N$ és $p \in \mathbb{N}$ esetén $\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon$.

De mivel akkor minden $x \in X$ -re

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon,$$

ezért az előző 3.4 állítás szerint a $\sum f_n$ függvénysor egyenletesen konvergens. \square

Példa 3.6. A Weierstrass kritérium alapján a

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sin nx}{n^{3/2}}$$

függvénysor egyenletesen konvergens az egész \mathbb{R} -en, mert minden $x \in \mathbb{R}$ -re

$$\left| \frac{\sin nx}{n^{3/2}} \right| \leq \frac{1}{n^{3/2}}$$

és a

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{3/2}}$$

sor konvergens.

4. Abel és Dirichlet féle egyenletes konvergencia tétel

A következőkben $\sum f_n g_n$ alakú függvénysorok egyenletes konvergenciájával foglalkozunk, ahol $[f_n]$ pontonként monoton függvénysorozat.

Lemma 4.1. *Legyen $p \in \mathbb{N}$ és $a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_p \in \mathbb{R}$. Legyen $B_i = b_1 + \dots + b_i$, $1 \leq i \leq p$. Ekkor*

$$\sum_{i=1}^p a_i b_i = a_p B_p + \sum_{i=1}^{p-1} (a_i - a_{i+1}) B_i.$$

Bizonyítás. Legyen $B_0 = 0$. Ekkor

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^p a_i b_i &= \sum_{i=1}^p a_i (B_i - B_{i-1}) = \sum_{i=1}^p a_i B_i - \sum_{i=1}^p a_i B_{i-1} = \sum_{i=1}^p a_i B_i - \sum_{i=0}^{p-1} a_{i+1} B_i = \\ &= a_p B_p + \sum_{i=1}^{p-1} (a_i - a_{i+1}) B_i. \end{aligned}$$

□

Lemma 4.2. *Legyen $p \in \mathbb{N}$ és $a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_p \in \mathbb{R}$. Legyen $B_i = b_1 + \dots + b_i$, $1 \leq i \leq p$. Tegyük fel, hogy az a_i -k monoton sorozatot alkotnak $i = 1, \dots, p$ -re, és tegyük fel, hogy létezik olyan $0 < A, B \in \mathbb{R}$, hogy $|a_i| \leq A$ és $|B_i| \leq B$ minden $i = 1, \dots, p$ -re. Ekkor*

$$\left| \sum_{i=1}^p a_i b_i \right| \leq 3AB.$$

Bizonyítás. Az előző 4.1 lemmát felhasználva

$$\left| \sum_{i=1}^p a_i b_i \right| = \left| a_p B_p + \sum_{i=1}^{p-1} (a_i - a_{i+1}) B_i \right| \leq AB + B \sum_{i=1}^{p-1} |a_i - a_{i+1}|.$$

Mivel az $a_i - a_{i+1}$ -ek egyező előjelűek, ezért

$$AB + B \sum_{i=1}^{p-1} |a_i - a_{i+1}| = AB + B \left| \sum_{i=1}^{p-1} a_i - a_{i+1} \right| = AB + B |a_1 - a_p| \leq 3AB.$$

□

Definíció 4.3 (Egyenletesen korlátos függvénysorozat). Legyen $X \subseteq \mathbb{R}$. Az X -en értelmezett $[f_n]$ függvénysorozat egyenletesen korlátos az X -en, ha létezik olyan $K \in \mathbb{R}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ -re és $x \in X$ -re $|f_n(x)| \leq K$.

Tétel 4.4 (Abel féle egyenletes konvergencia tétel). *Ha az $[f_n]$ függvénysorozat pontonként monoton és egyenletesen korlátos X -en, a $\sum g_n$ függvénysor meg egyenletesen konvergens X -en, akkor a $\sum f_n g_n$ függvénysor egyenletesen konvergens X -en.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az $[f_n]$ függvénysorozat egyenletesen korlátos egy $0 \leq K \in \mathbb{R}$ -el. Ekkor a $\sum g_n$ egyenletes konvergenciája miatt minden $\varepsilon > 0$ -hoz

létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \geq N$ -re, $p \in \mathbb{N}$ -re és $x \in X$ -re

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} g_k(x) \right| < \frac{\varepsilon}{3K}.$$

Ezért az előző 4.2 lemma alapján minden $n \geq N$ -re, $p \in \mathbb{N}$ -re és $x \in X$ -re

$$\left| \sum_{i=n+1}^{n+p} f_i(x)g_i(x) \right| \leq 3K \frac{\varepsilon}{3K} = \varepsilon.$$

Tehát a $\sum f_n g_n$ függvény-sor egyenletesen konvergens. \square

Tétel 4.5 (Dirichlet féle egyenletes konvergencia tétel). *Ha az $[f_n]$ függvény-sorozat pontonként monoton és egyenletesen tart 0-hoz X -en, a $\sum g_n$ függvény-sor egyenletesen korlátos X -en, akkor a $\sum f_n g_n$ függvény-sor egyenletesen konvergens X -en.*

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$. Mivel $[f_n]$ egyenletesen tart 0-hoz, ezért létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \geq N$ -re és $x \in X$ -re $|f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{6K}$. Ugyanakkor minden $1 \leq j \leq p$ -re

$$\left| \sum_{i=n+1}^{n+j} g_i(x) \right| = \left| \sum_{i=1}^{n+j} g_i(x) - \sum_{i=1}^n g_i(x) \right| \leq \left| \sum_{i=1}^{n+j} g_i(x) \right| + \left| \sum_{i=1}^n g_i(x) \right| \leq 2K.$$

Most alkalmazzuk a 4.2 lemmát tetszőleges $n \geq N$, $p \in \mathbb{N}$ és $x \in X$ mellett

$$f_{n+1}(x), \dots, f_{n+p}(x), g_{n+1}(x), \dots, g_{n+p}(x)\text{-re.}$$

Ekkor

$$\left| \sum_{i=n+1}^{n+p} f_i(x)g_i(x) \right| \leq 3 \frac{\varepsilon}{6K} 2K = \varepsilon. \quad \square$$

Példa 4.6. Azt már láttuk, hogy a

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sin nx}{n^{3/2}}$$

függvény-sor egyenletesen konvergens az egész \mathbb{R} -en. Ha $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^{3/2}}$ az összegfüggvény, akkor az f függvény folytonos, de felmerül a kérdés, hogy az f differenciálható-e? Az eddigi tételeink alapján elég azt bebizonyítani, hogy a tagonkénti differenciálással nyert

$$\sum_{n \geq 1} \frac{n \cos nx}{n^{3/2}} = \sum_{n \geq 1} \frac{\cos nx}{n^{1/2}}$$

függvény-sor egyenletesen konvergens. A Weierstrass kritérium itt nem használható, mert a $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{1/2}}$ sor divergens. De a Dirichlet féle egyenletes konvergencia tételből könnyen látszik, hogy $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos nx}{n^{1/2}}$ egyenletesen konvergens minden $[\delta, 2\pi - \delta]$ intervallumon, ahol $\delta > 0$ akármilyen szám. Ebből következik, hogy f differenciálható legalábbis a $(0, 2\pi)$ intervallumon.

Ahhoz, hogy a Dirichlet féle egyenletes konvergencia tételt használhassuk, gondoljuk meg a következőket. Mivel az $1/n^{1/2}$ sorozat monoton és tart a 0-hoz, elég azt belátni, hogy a $\sum_{n \geq 1} \cos nx$ függvénysor egyenletesen korlátos.

Lemma 4.7. Minden $x \in (0, 2\pi)$ -re

$$\left| \sum_{k=1}^n \cos kx \right| \leq \frac{1}{\sin \frac{x}{2}}.$$

Bizonyítás.

$$2 \sin \frac{x}{2} \sum_{k=1}^n \cos(kx) = \sum_{k=1}^n 2 \sin \frac{x}{2} \cos(kx) = \sum_{k=1}^n \sin \left(\left(k + \frac{1}{2} \right) x \right) - \sin \left(\left(k - \frac{1}{2} \right) x \right),$$

mert

$$2 \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)$$

teljesül minden $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ -re. De

$$\sum_{k=1}^n \sin \left(\left(k + \frac{1}{2} \right) x \right) - \sin \left(\left(k - \frac{1}{2} \right) x \right) = \sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) x \right) - \sin \frac{x}{2}$$

és így

$$\sum_{k=1}^n \cos(kx) = \frac{\sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) x \right)}{2 \sin \frac{x}{2}} - \frac{1}{2}$$

ha $x \in (0, 2\pi)$. Ebből azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n \cos kx \right| &= \left| \frac{\sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) x \right)}{2 \sin \frac{x}{2}} - \frac{1}{2} \right| \leq \left| \frac{\sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) x \right)}{2 \sin \frac{x}{2}} \right| + \frac{1}{2} \leq \\ &\left| \frac{\sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) x \right)}{2 \sin \frac{x}{2}} \right| + \frac{1}{2 |\sin \frac{x}{2}|} \leq \frac{1}{2 |\sin \frac{x}{2}|} + \frac{1}{2 |\sin \frac{x}{2}|} = \frac{1}{\sin \frac{x}{2}}. \end{aligned}$$

□

Ebből már következik, hogy akármilyen $\delta > 0$ -ra minden $x \in [\delta, 2\pi - \delta]$ esetén

$$\left| \sum_{k=1}^n \cos kx \right| \leq \frac{1}{\sin \frac{\delta}{2}}.$$

Tehát a $\sum_{n \geq 1} \cos nx$ sor egyenletesen korlátos a $[\delta, 2\pi - \delta]$ intervallumon és így a Dirichlet féle egyenletes konvergencia tétel miatt az

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^{3/2}}$$

függvény differenciálható a $[\delta, 2\pi - \delta]$ intervallumon, de akkor a $(0, 2\pi)$ intervallumon is.

5. Hatványsorok

5.1. Hatványsor konvergencia halmaza.

Definíció 5.1 (Hatványsor és konvergencia sugár). Legyen $[a_n]_{n \geq 0}$ egy számsorozat és $x_0 \in \mathbb{R}$. Ha $[f_n]_{n \geq 0}$ egy olyan, az egész \mathbb{R} -en értelmezett függvénysorozat, ahol $f_n(x) = a_n(x - x_0)^n$, akkor az

$$\sum_{n \geq 0} f_n$$

függvényt hatványsornak nevezzük és általában

$$\sum_{n \geq 0} a_n(x - x_0)^n\text{-el}$$

jelöljük. Legyen

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} (|a_n|^{1/n})}$$

ha $0 < \limsup_{n \rightarrow \infty} (|a_n|^{1/n}) \in \mathbb{R}$, legyen

$$R = \infty$$

ha $\limsup_{n \rightarrow \infty} (|a_n|^{1/n}) = 0$ és legyen

$$R = 0$$

ha $\limsup_{n \rightarrow \infty} (|a_n|^{1/n}) = \infty$. Ekkor R -et a $\sum_{n \geq 0} a_n(x - x_0)^n$ hatványsor konvergencia sugarának nevezzük.

Megjegyzés 5.2. Mivel 0^0 definíció szerint 1, és $0^n = 0$ ha $n \geq 1$, ezért egy hatványsor mindig konvergens az x_0 pontban és a határértéke a $\sum_{n \geq 0} a_n(x_0 - x_0)^n = \sum_{n \geq 0} a_n 0^n$ numerikus sornak a_0 .

Fontos kérdés, hogy milyen $t \in \mathbb{R}$ számokra konvergens a $\sum_{n \geq 0} a_n(t - x_0)^n$ numerikus sor. A következő tétel miatt használjuk a konvergencia sugár elnevezést.

Tétel 5.3. *Legyen $\sum_{n \geq 0} a_n(x - x_0)^n$ egy hatványsor. Ha $t \in \mathbb{R}$ olyan, hogy $|t - x_0| < R$, akkor a $\sum_{n \geq 0} a_n(t - x_0)^n$ numerikus sor abszolút konvergens. Ha pedig $|t - x_0| > R$, akkor divergens.*

Bizonyítás. Ha

$$0 < \limsup (|a_n|^{1/n}) \in \mathbb{R},$$

akkor $|t - x_0| < R$ esetén

$$\limsup (|a_n(t - x_0)^n|^{1/n}) = |t - x_0| \limsup (|a_n|^{1/n}) = |t - x_0| / R < 1,$$

ezért a Cauchy gyökkritérium miatt a $\sum_{n \geq 0} a_n |t - x_0|^n$ numerikus sor konvergens. Hasonlóan kapjuk, hogy $|t - x_0| > R$ esetén divergens.

Ha

$$\limsup (|a_n|^{1/n}) = 0,$$

akkor minden $t \in \mathbb{R}$ -re

$$\limsup (|a_n (t - x_0)^n|^{1/n}) = |t - x_0| \limsup (|a_n|^{1/n}) = 0 < 1,$$

ezért megint a Cauchy gyökkritérium miatt a $\sum_{n \geq 0} a_n |t - x_0|^n$ numerikus sor konvergens.

Ha pedig

$$\limsup (|a_n|^{1/n}) = \infty,$$

akkor minden rögzített $|t - x_0| > 0$ esetén

$$\limsup (|a_n (t - x_0)^n|^{1/n}) = \limsup (|a_n|^{1/n} |t - x_0|) = \infty,$$

tehát megint a Cauchy gyökkritérium miatt a $\sum_{n \geq 0} a_n |t - x_0|^n$ numerikus sor divergens. \square

Definíció 5.4 (Konvergenca intervallum). Ezek szerint azok a $t \in \mathbb{R}$ számok, amikre a $\sum_{n \geq 0} a_n (t - x_0)^n$ numerikus sor konvergens, egy intervallumot alkotnak. Ezt az intervallumot a hatványsor konvergenca intervallumának (vagy konvergenca halmazának) nevezzük és K -val jelöljük.

Megjegyzés 5.5. Ha $0 < R \in \mathbb{R}$, akkor

$$(x_0 - R, x_0 + R) \subseteq K \subseteq [x_0 - R, x_0 + R].$$

Lehet, hogy K tartalmazza az $x_0 - R$ vagy $x_0 + R$ határpontokat, de az is lehet, hogy nem. Ha $R = 0$, akkor

$$K = \{x_0\}.$$

Ha pedig $R = \infty$, akkor

$$K = \mathbb{R}.$$

Példa 5.6. A

$$\sum_{n \geq 0} x^n, \quad \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}, \quad \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+1} x^{n+1}, \quad \text{és} \quad \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+1)^2} x^{n+1}$$

hatványsorok konvergenca intervallumai $(-1, 1)$, $(-1, 1]$, $[-1, 1)$ és $[-1, 1]$. A konvergenca sugara mindegyiknek 1.

Példa 5.7. Az előző tétel csak az $(x_0 - R, x_0 + R)$ nyílt intervallumban mondja meg, hogy ott a hatványsor abszolút konvergens. Az $x_0 \pm R$ pontokban a hatványsor lehet abszolút konvergens, feltételesen konvergens vagy divergens is. Például

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$$

csak feltételesen konvergens az $x = 1$ pontban, de

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+1)^2} x^{n+1}$$

abszolút konvergens $x = \pm 1$ -ben.

Egy függvénysor egyenletes konvergenciájának bizonyításához a Weierstrass kritérium és az Abel illetve Dirichlet féle egyenletes konvergencia tételek adnak eszközt. Próbáljuk ezekkel megvizsgálni, hogy egy hatványsor konvergens-e az $x_0 \pm R$ határpontokban. A Weierstrass kritériummal a következő tételt egyszerűen tudjuk bizonyítani.

Tétel 5.8. *Legyen $A \subseteq K$ az a halmaz, ahol a hatványsor abszolút konvergens. Ekkor a hatványsor az A intervallum bármely kompakt részintervallumán egyenletesen konvergens.*

Bizonyítás. Legyen $x_0 \in \mathbb{R}$ és $0 \neq r \in \mathbb{R}$. Jelölje $I_r(x_0)$ az $[x_0, x_0 + r]$ intervallumot ha $r > 0$ és az $[x_0 + r, x_0]$ intervallumot ha $r < 0$. Az 1.13 állítás alapján elég belátni, hogy ha egy hatványsor abszolút konvergens az $x_0 + r$ pontban, akkor a hatványsor egyenletesen konvergens az $I_r(x_0)$ intervallumban. A $\sum_{n \geq 0} a_n(x - x_0)^n$ hatványsor az $x_0 + r$ pontban egyenő a $\sum_{n \geq 0} a_n r^n$ numerikus sorral. Ha a $\sum_{n \geq 0} |a_n| |r|^n$ numerikus sor konvergens, akkor mivel minden $t \in I_r(x_0)$ -ra

$$|a_n| |t - x_0|^n \leq |a_n| |r|^n,$$

a Weierstrass kritérium alapján a $\sum_{n \geq 0} a_n(x - x_0)^n$ függvénysor egyenletesen konvergens az $I_r(x_0)$ intervallumon. \square

Megjegyzés 5.9. A tételből következik, hogy ha egy hatványsor konvergencia sugara ∞ , akkor a hatványsor egyenletesen konvergens bármely korlátos intervallumon, hiszen bármely korlátos intervallum benne van valamilyen kompakt intervallumban.

Példa 5.10. A $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+1)^2} x^{n+1}$ hatványsor egyenletesen konvergens az egész $[-1, 1]$ konvergencia intervallumán, mert a $(-1, 1)$ intervallumon abszolút konvergens és az $x = \pm 1$ pontokban is abszolút konvergens.

A $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$ hatványsor egyenletesen konvergens bármely $[-1 + \delta, 1 - \delta]$ intervallumon, ahol $\delta > 0$, mert abszolút konvergens a $(-1, 1)$ intervallumon. Az $x = 1$ -ben nem abszolút konvergens, de konvergens. Ezért kérdéses, hogy $\delta > 0$ -ra a $[-1 + \delta, 1]$ intervallumon egyenletesen konvergens-e. Az alábbiakban látni fogjuk, hogy igen.

A $\sum_{n \geq 0} x^n$ hatványsor konvergencia intervalluma $(-1, 1)$, ahol

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

és ez a hatványsor egyenletesen konvergens bármely $[-1 + \delta, 1 - \delta]$ intervallumon, ahol $\delta > 0$, mert abszolút konvergens a $(-1, 1)$ intervallumon. Ugyanakkor nem egyenletesen konvergens az egész $(-1, 1)$ -en, mert ha

$$s_m(x) = \sum_{n=0}^m x^n = \frac{1 - x^{m+1}}{1 - x}$$

jelöli a részletösszegek sorozatát és

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

az összegfüggvény $(-1, 1)$ -en, akkor például

$$s_m\left(1 - \frac{1}{m}\right) - f\left(1 - \frac{1}{m}\right) = \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{m+1}}{1 - \left(1 - \frac{1}{m}\right)} - \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{1}{m}\right)} = -m \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{m+1} \rightarrow -\infty$$

ha $m \rightarrow \infty$.

Az Abel féle egyenletes konvergencia tételt használjuk a következő állítás bizonyításában.

Tétel 5.11. *Egy hatványsor a konvergencia intervallumának minden kompakt részintervallumán egyenletesen konvergens.*

Bizonyítás. Legyen $x_0 \in \mathbb{R}$ és $0 \neq r \in \mathbb{R}$. Jelölje $I_r(x_0)$ az $[x_0, x_0 + r]$ intervallumot ha $r > 0$ és az $[x_0 + r, x_0]$ intervallumot ha $r < 0$. Az 1.13 állítás alapján elég belátni, hogy ha egy hatványsor konvergens az $x_0 + r$ pontban, akkor a hatványsor egyenletesen konvergens az $I_r(x_0)$ intervallumban.

Ha a $\sum_{n \geq 0} a_n r^n$ numerikus sor konvergens, akkor legyen minden $n \geq 0$ -ra és $x \in \mathbb{R}$ -re $f_n(x) = \left(\frac{x-x_0}{r}\right)^n$, és legyen $g_n(x) = a_n r^n$. Ekkor ha $x \in I_r(x_0)$, akkor az $[f_n(x)]_{n \geq 0}$ számsorozat monoton és minden $n \geq 0$ -ra $0 \leq f_n(x) \leq 1$, tehát az $[f_n]_{n \geq 0}$ függvénysorozat egyenletesen korlátos $I_r(x_0)$ -on.

Ugyanakkor a g_n függvények konstans függvények minden $n \geq 0$ -ra és így a $\sum_{n \geq 0} g_n$ függvénysor nyilván egyenletesen konvergens (akár az egész \mathbb{R} -en is), mert feltettük, hogy a $\sum_{n \geq 0} a_n r^n$ numerikus sor konvergens.

Ezért a $\sum_{n \geq 0} a_n (x - x_0)^n = \sum_{n \geq 0} f_n g_n$ függvénysor egyenletesen konvergens $I_r(x_0)$ -on az Abel féle egyenletes konvergencia tétel miatt. \square

Példa 5.12. A $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$ hatványsor konvergencia intervalluma $(-1, 1]$ és ezért a hatványsor egyenletesen konvergens bármely $[-1 + \delta, 1]$ intervallumon, ahol $\delta > 0$.

5.2. Hatványsor összegfüggvénye.

A függvénysorok összegfüggvényének folytonosságáról szóló 2.13 tételt a hatványsorokra alkalmazva a következő állítást nyerjük.

Tétel 5.13. *Egy hatványsor összegfüggvénye folytonos az egész konvergencia intervallumban.*

Bizonyítás. Egy hatványsor egyenletesen konvergens a konvergencia intervallum minden I kompakt részintervallumán, de mivel az $x \mapsto a_n(x - x_0)^n$ függvények folytonosak, a hatványsor is folytonos I -n. A tétel egyszerűen következik abból, hogy a hatványsor konvergencia intervallumának minden pontja benne van valamilyen I kompakt részintervallumban így ott a hatványsor folytonos. \square

Állítás 5.14. *Legyen $k \in \mathbb{N}$ tetszőleges, ekkor a $\sum_{n \geq 0} a_n(x - x_0)^n$ hatványsor konvergencia sugara egyenlő a k -szor tagonkénti deriválással kapott*

$$\sum_{n \geq k} n(n-1) \cdots (n-k+1) a_n(x - x_0)^{n-k}$$

hatványsor konvergencia sugarával.

Bizonyítás. Az állítást elég belátni $k = 1$ -re, abból már teljes indukcióval következik minden $k > 1$ -re is. A $k = 1$ esetben azt szeretnénk bizonyítani, hogy a

$$\sum_{n \geq 0} a_n(x - x_0)^n$$

hatványsor és a tagonkénti deriválással kapott

$$\sum_{n \geq 1} n a_n(x - x_0)^{n-1} = \sum_{n \geq 0} (n+1) a_{n+1}(x - x_0)^n$$

hatványsor konvergencia sugara egyenlő. Ehhez nyilván elég azt megmutatni, hogy

$$\limsup \left(|a_n|^{1/n} \right) = \limsup \left(((n+1) |a_{n+1}|)^{1/n} \right).$$

Mivel $\lim \left((n+1)^{1/n} \right) = 1$, ezért

$$\limsup \left(((n+1) |a_{n+1}|)^{1/n} \right) = \limsup \left(|a_{n+1}|^{1/n} \right).$$

Ugyanakkor nyilvánvalóan $\limsup \left(|a_{n+1}|^{1/(n+1)} \right) = \limsup \left(|a_n|^{1/n} \right)$. Tehát azt kell bebizonyítani, hogy

$$\limsup \left(|a_{n+1}|^{1/(n+1)} \right) = \limsup \left(|a_{n+1}|^{1/n} \right).$$

De

$$\left(|a_{n+1}|^{1/(n+1)} \right)^{\frac{n+1}{n}} = |a_{n+1}|^{1/n}$$

és

$$|a_{n+1}|^{1/(n+1)} = \left(|a_{n+1}|^{1/n} \right)^{\frac{n}{n+1}},$$

ezért elég azt megmutatni, hogy ha $[b_n]$ egy nemnegatív tagú számsorozat, akkor

$$\limsup b_n \leq \limsup b_n^{\frac{n+1}{n}}$$

és

$$\limsup b_n \leq \limsup b_n^{\frac{n}{n+1}}.$$

Ha $[b_n]_{n \geq N}$ a konstans 0 sorozat valamilyen $N \in \mathbb{N}$ -re, akkor nyilván teljesülnek ezek az egyenlőtlenségek.

Tegyük fel tehát, hogy végtelen sok $n \in \mathbb{N}$ -re $b_n > 0$. Legyen $[b_{n_k}]_{k \geq 0}$ egy olyan részsorozata $[b_n]$ -nek, hogy $\lim_{k \rightarrow \infty} b_{n_k} = \limsup b_n$. Akkor az is nyilván feltehető, hogy $[b_{n_k}]$ pozitív tagú. Ekkor

$$b_{n_k}^{\frac{n_k+1}{n_k}} = e^{\frac{n_k+1}{n_k} \ln b_{n_k}} \rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} b_{n_k}$$

ha $k \rightarrow \infty$. Tehát

$$\limsup b_n \leq \limsup b_n^{\frac{n+1}{n}}.$$

Hasonlóan

$$b_{n_k}^{\frac{n_k}{n_k+1}} = e^{\frac{n_k}{n_k+1} \ln b_{n_k}} \rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} b_{n_k}$$

ha $k \rightarrow \infty$, tehát

$$\limsup b_n \leq \limsup b_n^{\frac{n}{n+1}}.$$

□

Példa 5.15. Egy hatványsornak és a tagonkénti differenciálásával kapott hatványsornak a konvergencia intervalluma nem biztos, hogy ugyanaz. Például a

$$\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$$

hatványsor konvergens az $x = -1$ pontban, de a $\sum_{n \geq 0} x^n$ hatványsor, amit a tagonkénti deriválásával kapunk, divergens az $x = -1$ -ben. Vagy a

$$\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^2}$$

hatványsor abszolút konvergens $x = 1$ -ben, de a tagonkénti deriválással kapott $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n+1}$ hatványsor divergens az $x = 1$ -ben.

Tétel 5.16. Legyen $\sum_{n \geq 0} a_n(x - x_0)^n$ egy hatványsor, jelölje K a konvergencia halmazát és R a konvergencia sugarát. Jelölje K' a tagonkénti deriválással kapott $\sum_{n \geq 1} n a_n(x - x_0)^{n-1}$ hatványsor konvergencia halmazát. Ekkor

(1)

$$(x_0 - R, x_0 + R) \subseteq K' \subseteq K$$

és

(2) ha $R > 0$, akkor a $\sum_{n \geq 0} a_n(x - x_0)^n$ hatványsor K konvergencia halmazán értelmezett

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

összefüggvény folytonosan differenciálható a K' halmazon és

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x - x_0)^{n-1}$$

minden $x \in K'$ -re.

Bizonyítás. A K' halmaz minden x_0 -at tartalmazó I kompakt részintervallumán a tagonkénti deriválással kapott $\sum_{n \geq 1} n a_n (x - x_0)^{n-1}$ hatványsor egyenletesen konvergens, és mivel x_0 -ban a $\sum_{n \geq 0} a_n (x - x_0)^n$ hatványsor biztosan konvergens, a függvénysorozat differenciálásáról szóló 2.8 tétel miatt $\sum_{n \geq 0} a_n (x - x_0)^n$ egyenletesen konvergens az I halmazon, és ha f jelöli az összegfüggvényt, akkor f folytonosan differenciálható I -n és minden $x \in I$ -re $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}$. De mivel $I \subseteq K'$ tetszőleges x_0 -at tartalmazó kompakt intervallum, ezért minden $x \in K'$ -re

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}.$$

□

Teljes indukcióval nyilvánvalóan adódik a következő állítás.

Következmény 5.17. Az $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ akárhányszor differenciálható $(x_0 - R, x_0 + R)$ -en és

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) a_n (x - x_0)^{n-k}$$

minden $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ -re.

Példa 5.18. A $\sum_{n \geq 0} x^n$ hatványsor konvergencia intervalluma $(-1, 1)$ és az összegfüggvénye $\frac{1}{1-x}$. Az előző tételeket használva tagonkénti deriválással azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n.$$

Például ha $x = 1/2$, akkor azt kapjuk, hogy

$$4 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}.$$

Tagonkénti többszöri deriválással meg azt, hogy

$$\frac{(-1)^{k+1} k!}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) x^{n-k}.$$

Ha $\binom{n}{k}$ jelöli az

$$\frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!}$$

számot, akkor

$$\frac{(-1)^{k+1}}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^n.$$

Tétel 5.19. Egy hatványsor $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ összegfüggvénye minden $I \subseteq K$ kompakt részintervallumban Riemann integrálható és

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_I (x - x_0)^n dx = \int_I f(x) dx.$$

Bizonyítás. Az f függvény folytonos az egész K konvergencia intervallumban, ezért minden $I \subseteq K$ kompakt intervallumon Riemann integrálható. De mivel a hatványsor egyenletesen konvergens I -n, a hatványsor tagonként integrálható és a $\sum_{n \geq 0} a_n \int_I (x - x_0)^n dx$ numerikus sor tart $\int_I f(x) dx$ -hez. \square

Példa 5.20. Ha a $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ hatványsor konvergencia sugara $R > 0$ és összegfüggvénye

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n,$$

akkor minden $x \in (-R, R)$ -re

$$\int_0^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

Példa 5.21. A $\sum_{n \geq 0} (-1)^n x^n$ hatványsor konvergencia intervalluma $(-1, 1)$ és összegfüggvénye

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n.$$

Ha $x \in (-1, 1)$, akkor

$$(5.1) \quad \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

Ez a $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$ hatványsor konvergens az $x = 1$ -ben, mert akkor egy Leibniz sort kapunk, és divergens az $x = -1$ -ben, tehát a konvergencia intervalluma $(-1, 1]$. Az (5.1) egyenlőség csak $x \in (-1, 1)$ -re következik az előbbi tételből. De könnyen látható, hogy akkor $x = 1$ -re is igaz, mert $\ln(x+1)$ is és a $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$ hatványsor is folytonos az $x = 1$ -ben. Tehát

$$\ln 2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$$

Példa 5.22. Mivel minden $x \in (-1, 1)$ -re $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$, ezért x helyére t^2 -et írva azt kapjuk, hogy minden $t \in (-1, 1)$ -re

$$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n}$$

és így minden $x \in (-1, 1)$ -re

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \operatorname{arctg}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

Ez a hatványsor az $x = \pm 1$ -ben is konvergens, ezért az összegfüggvény folytonos is $x = \pm 1$ -ben. Mivel $\operatorname{arctg}(x)$ is folytonos $x = \pm 1$ -ben, azt kapjuk, hogy

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}(1) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots$$

6. Taylor sor

A következőkben egy adott f függvényhez próbálunk olyan hatványsort találni, aminek f az összegfüggvénye.

Tétel 6.1. *Ha egy $\sum_{n \geq 0} a_n(x - x_0)^n$ hatványsor konvergencia sugara $R > 0$ és összegfüggvénye f , akkor*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},$$

tehát $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$ az egész konvergencia intervallumban.

Bizonyítás. Egy hatványsor tagonként differenciálható minden $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ esetén. Ezért az erről szóló tétel szerint

$$f^{(k)}(x_0) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) a_n (x_0 - x_0)^{n-k} = k! a_k.$$

□

Definíció 6.2 (Analitikus függvény). Legyen $x_0 \in \mathbb{R}$ és legyen f egy olyan függvény, ami értelmezve van az x_0 -nak valamilyen környezetében. Ha van egy olyan $\sum_{n \geq 0} a_n(x - x_0)^n$ hatványsor, hogy valamilyen $\delta > 0$ -ra minden $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ -ra

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n,$$

akkor az f függvényt az x_0 pontban analitikus függvénynek nevezzük. Ha az f értelmezve van egy I nyílt intervallumban és f az I minden pontjában analitikus, akkor az f függvényt az I intervallumban analitikus függvénynek nevezzük.

Állítás 6.3. *Egy $x_0 \in \mathbb{R}$ -ben analitikus függvény akárhányszor differenciálható az x_0 egy környezetében.*

Bizonyítás. Az állítás egyszerűen következik abból, hogy egy x_0 középi és pozitív konvergencia sugarú hatványsor akárhányszor differenciálható az x_0 egy környezetében. \square

A továbbiakban azt a kérdést vizsgáljuk, hogy egy $x_0 \in \mathbb{R}$ egy környezetében akárhányszor differenciálható függvény analitikus-e x_0 -ban, tehát hogy ilyenkor létezik-e olyan x_0 középi hatványsor, aminek az x_0 egy környezetében f az összegfüggvénye. Ezzel kapcsolatos a következő definíció.

Definíció 6.4 (Taylor sor). Legyen f akárhányszor differenciálható az $x_0 \in \mathbb{R}$ pontban. Az f függvénynek az x_0 -beli Taylor sora a

$$\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

hatványsor.

Definíció 6.5 (Taylor sorba fejthető függvény). Legyen f egy $x_0 \in \mathbb{R}$ pont környezetében értelmezett függvény, és tegyük fel, hogy f akárhányszor differenciálható az x_0 egy környezetében. Ha az f függvény x_0 -beli Taylor sora konvergens egy $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ intervallumban valamilyen $\delta > 0$ -ra és a Taylor sor összegfüggvénye f ezen az intervallumon, akkor az mondjuk, hogy az f függvény Taylor sorba fejthető az x_0 -ban.

Megjegyzés 6.6. A 6.1 tétel szerint egy pozitív konvergencia sugarú x_0 középi hatványsor megegyezik az összegfüggvényének az x_0 -beli Taylor sorával.

Állítás 6.7. Az f függvény analitikus x_0 -ban \iff az f függvény Taylor sorba fejthető x_0 -ban.

Bizonyítás. Az állítás egyszerűen következik az előbbiekből. \square

Példa 6.8. Az

$$\frac{1}{1-x}, \quad \frac{1}{1+x}, \quad \ln(1+x), \quad \frac{1}{1+x^2} \quad \text{és} \quad \arctg(x)$$

függvények Taylor sorba fejthetők a 0 körül, mert már láttuk, hogy előállnak bizonyos pozitív konvergencia sugarú és 0 középi hatványsorok összegfüggvényeként.

Példa 6.9. Legyen $f(x) = e^{-1/x^2}$ ha $x \in \mathbb{R}$ és $x \neq 0$, és legyen $f(0) = 0$. Egyszerűen kiszámolható, hogy ez az f függvény minden $x \in \mathbb{R}$ pontban akárhányszor differenciálható és minden $0 \leq n \in \mathbb{N}$ -re $f^{(n)}(0) = 0$. Ezért az f függvény Taylor sorának minden együtthatója 0, tehát

$$\sum_{n \geq 0} 0 x^n$$

alakú, ami minden $x \in \mathbb{R}$ -re konvergens, vagyis a konvergencia sugara ∞ , és az összegfüggvénye az egész \mathbb{R} -en értelmezett azonosan 0 függvény. Emiatt az összegfüggvénye csak az $x = 0$ -ban egyenlő $f(x)$ -el. Tehát ez az f függvény a 0-ban nem Taylor sorba fejthető (és akkor nem is analitikus a 0-ban).

Vizsgáljuk meg azt a kérdést, hogy egy f függvény, ami egy $x_0 \in \mathbb{R}$ pont egy környezetében akárhányszor differenciálható, mikor lesz Taylor sorba fejthető az x_0 -ban.

Definíció 6.10 (Taylor polinom). Egy $x_0 \in \mathbb{R}$ pontban akárhányszor differenciálható f függvény n -ed fokú x_0 -hoz tartozó Taylor polinomja

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

Az f függvény x_0 -hoz tartozó n -edik maradéktagja az

$$R_n = f - T_n$$

függvény, ami ugyanazon a halmazon van értelmezve, mint az f függvény.

Megjegyzés 6.11. Az R_n függvény is akárhányszor deriválható x_0 -ban és minden $0 \leq k \leq n$ -re $R_n^{(k)}(x_0) = 0$, mert $T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$.

Állítás 6.12. Egy f függvény, ami egy $x_0 \in \mathbb{R}$ pont egy környezetében akárhányszor differenciálható, Taylor sorba fejthető az x_0 -ban \iff az x_0 -nak egy környezetében az $[R_n]$ függvényt sorozat pontonként tart 0-hoz.

Bizonyítás. Az állítás nyilvánvalóan következik az előbbiekből. \square

Az R_n maradéktagot akkor lehet jól használni, ha találunk rá valamilyen formulát. A következő tételben megadott formulát Lagrange féle maradéktagnak nevezzük.

Tétel 6.13 (Lagrange féle maradéktag). Legyen $x_0 \in \mathbb{R}$ egy pont és U egy olyan nyílt intervallum, amire $x_0 \in U$. Legyen f olyan függvény, ami U -ban akárhányszor differenciálható és legyen $0 \leq n \in \mathbb{N}$. Ekkor minden $x \in U$, $x \neq x_0$ -hoz van olyan n -től, x_0 -tól és x -től függő ξ szám az x_0 és x között, hogy

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Bizonyítás. Feltehetjük, hogy $U = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ valamilyen $\delta > 0$ -ra, mert U egyébként biztosan tartalmaz egy ilyen intervallumot. Legyen $\varphi = R_n$ és ψ legyen az x -hez $(x - x_0)^{n+1}$ -et rendelő függvény. Először erre a két φ és ψ függvényre fogjuk alkalmazni a Cauchy középértéktételt az $[x_0, x]$ vagy $[x, x_0]$ intervallumon (attól függően, hogy $x_0 < x$ vagy $x < x_0$), aztán meg a magasabb rendű deriváltjaikra.

Könnyen látható, hogy

$$0 = \varphi(x_0) = \varphi'(x_0) = \dots = \varphi^{(n)}(x_0)$$

és hasonlóan

$$0 = \psi(x_0) = \psi'(x_0) = \dots = \psi^{(n)}(x_0).$$

Az is fontos lesz, hogy

$$\psi^{(k)}(t) = (n+1)n \dots (n-k+2)(t-x_0)^{n+1-k} \neq 0$$

ha t az x_0 és x által meghatározott nyílt intervallumban van és $0 \leq k \leq n + 1$.

Ezért a Cauchy középértéktétel miatt van olyan ξ_1 szám x és x_0 között, hogy

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\psi(x) - \psi(x_0)} = \frac{\varphi'(\xi_1)}{\psi'(\xi_1)}.$$

De mivel

$$\frac{\varphi'(\xi_1)}{\psi'(\xi_1)} = \frac{\varphi'(\xi_1) - \varphi'(x_0)}{\psi'(\xi_1) - \psi'(x_0)},$$

megint a Cauchy középértéktétel miatt van olyan ξ_2 szám ξ_1 és x_0 között, hogy

$$\frac{\varphi'(\xi_1) - \varphi'(x_0)}{\psi'(\xi_1) - \psi'(x_0)} = \frac{\varphi''(\xi_2)}{\psi''(\xi_2)}.$$

Így folytatva, megint van olyan ξ_3 szám ξ_2 és x_0 között, hogy

$$\frac{\varphi''(\xi_2)}{\psi''(\xi_2)} = \frac{\varphi''(\xi_2) - \varphi''(x_0)}{\psi''(\xi_2) - \psi''(x_0)} = \frac{\varphi^{(3)}(\xi_3)}{\psi^{(3)}(\xi_3)}.$$

Végül azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}} &= \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\psi(x) - \psi(x_0)} = \frac{\varphi'(\xi_1)}{\psi'(\xi_1)} = \frac{\varphi'(\xi_1) - \varphi'(x_0)}{\psi'(\xi_1) - \psi'(x_0)} = \frac{\varphi''(\xi_2)}{\psi''(\xi_2)} = \\ &= \frac{\varphi''(\xi_2) - \varphi''(x_0)}{\psi''(\xi_2) - \psi''(x_0)} = \dots = \frac{\varphi^{(n+1)}(\xi)}{\psi^{(n+1)}(\xi)} \end{aligned}$$

valamilyen ξ számra, ami x_0 és ξ_n között van. Mivel $\varphi^{(n+1)} = R_n^{(n+1)}$ és $\psi^{(n+1)} = (n + 1)!$, ezért

$$\frac{R_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!}.$$

Ugyanakkor

$$R_n^{(n+1)} = f^{(n+1)} - T_n^{(n+1)} = f^{(n+1)} - 0$$

és így végül

$$\frac{R_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!},$$

amiből a tétel állítása már következik, mert ξ az x_0 és x között van. \square

A Lagrange maradéktagon kívül a következő integrál maradéktagos formulát is használjuk.

Tétel 6.14 (Integrál maradéktag). *Legyen $x_0 \in \mathbb{R}$ egy pont és U egy olyan nyílt intervallum, amire $x_0 \in U$. Legyen f olyan függvény, ami U -ban akárhányszor differenciálható és legyen $0 \leq n \in \mathbb{N}$. Ekkor minden $x \in U$ -ra*

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x - t)^n dt$$

Bizonyítás. Az állítás nyilvánvalóan igaz $n = 0$ -ra, mert akkor az egyenlőség mindkét oldala $f(x) - f(x_0)$ -al egyenlő. Tegyük fel, hogy az állítás igaz valamilyen $n \in \mathbb{N}$ -re. Ekkor parciálisan integrálva

$$\begin{aligned} \frac{1}{(n+1)!} \int_{x_0}^x f^{(n+2)}(t)(x-t)^{n+1} dt &= \frac{1}{(n+1)!} [f^{(n+1)}(t)(x-t)^{n+1}]_{x_0}^x - \\ \frac{1}{(n+1)!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(n+1)(-1)(x-t)^n dt &= -\frac{f^{(n+1)}(x_0)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} + \\ \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt &= -\frac{f^{(n+1)}(x_0)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} + f(x) - T_n(x) \end{aligned}$$

az indukciós feltétel miatt, ami egyenlő $f(x) - T_{n+1}(x)$ -el. \square

A következő tétel feltételt ad arra, hogy egy függvény mikor fejthető Taylor sorba.

Tétel 6.15. *Egy f függvény, ami egy $x_0 \in \mathbb{R}$ pont egy U környezetében akárhányszor differenciálható Taylor sorba fejthető az x_0 -ban ha van olyan $A, B > 0$ és x_0 -nak $V \subseteq U$ környezete, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ -re és minden $x \in V$ -re*

$$|f^{(n)}(x)| \leq Bn!A^n.$$

Ekkor ha x_0 -nak egy r sugarú környezete benne van V -ben, akkor f -nek a Taylor sora az x_0 -nak a $\min\{r, 1/A\}$ sugarú környezetében előállítja f -et.

Bizonyítás. Az x_0 -nak valamilyen $r > 0$ sugarú W környezete biztosan benne van V -ben, és ekkor tekintsük tetszőleges $x \in W$ -re az f függvényhez tartozó

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$$

maradéktagot, ahol ξ az x és x_0 között fekszik.

Ezt becsülve azt kapjuk, hogy

$$\left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} \right| \leq BA^{n+1} |x-x_0|^{n+1} = B(A|x-x_0|)^{n+1},$$

ahol $B(A|x-x_0|)^{n+1} \rightarrow 0$ ha $n \rightarrow \infty$, ha azt is feltesszük, hogy $|x-x_0| < \frac{1}{A}$.

Tehát minden $x \in W$ -re amire $|x-x_0| < \frac{1}{A}$ is teljesül az $R_n(x)$ maradéktag tart a 0-hoz $n \rightarrow \infty$ esetén. Ezért az f függvény Taylor sora az ilyen x -ekben konvergencia és tart $f(x)$ -hez. \square

Megjegyzés 6.16. Itt nem bizonyítjuk, de az előző tételben szereplő feltétel szükséges is egy $x_0 \in \mathbb{R}$ pont egy U környezetében akárhányszor differenciálható függvény Taylor sorba fejthetőségére az x_0 pontban.

Állítás 6.17. Ha az f függvény akárhányszor differenciálható az $x_0 \in \mathbb{R}$ egy U környezetében és létezik (ettől az U környezettől függően) olyan $K > 0$, hogy minden $x \in U$ -ra és minden $n \in \mathbb{N}$ -re

$$|f^{(n)}(x)| \leq K,$$

akkor az f függvény Taylor sora az x_0 -nak valamilyen $r > 0$ sugarú U -ban fekvő környezetében konvergens és ott az összegfüggvény egyenlő f -el.

Bizonyítás. Az $R_n(x)$ maradéktagot becsülve olyan $x \in U$ -ra amire $|x - x_0| < r$ is teljesül azt kapjuk valamilyen x és x_0 között fekvő ξ -re, hogy

$$|R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \right| \leq K \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!},$$

de $K \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$ tart a 0-hoz ha $n \rightarrow \infty$. \square

Megjegyzés 6.18. A tételben lévő állítást úgy is meg lehet fogalmazni, hogy ha az f függvény akárhányszor differenciálható az $x_0 \in \mathbb{R}$ egy U környezetében és az

$$[f^{(n)}]_{n \geq 0}$$

függvénysorozat egyenletesen korlátos az U -n, akkor az f függvény Taylor sora az x_0 -nak valamilyen $r > 0$ sugarú U -ban fekvő környezetében konvergens és ott az összegfüggvény egyenlő f -el.

Példa 6.19. A $\sin(x)$, $\cos(x)$, e^x , $\operatorname{sh}(x)$, $\operatorname{ch}(x)$ függvények 0-közepű Taylor sorait könnyű kiszámolni. Az előző állítás felhasználásával azt is látjuk, hogy ezek a Taylor sorok konvergenssek és előállítják a függvényt a 0-nak tetszőlegesen nagy sugarú környezetében, tehát az egész \mathbb{R} -en is. A $\sin(x)$ függvény 0 közepű Taylor sora

$$\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots,$$

a $\cos(x)$ függvényé

$$\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots,$$

az e^x függvényé

$$\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots,$$

a $\operatorname{sh}(x)$ függvényé

$$\sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

és a $\operatorname{ch}(x)$ függvényé

$$\sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

7. Binomiális sor

Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$ és legyen

$$f(x) = (1+x)^\alpha,$$

ahol $x \in (-1, \infty)$. Azért nézzük az egyszerűség kedvéért ezt az értelmezési tartományt, mert ha α olyan, hogy $(1+x)^\alpha$ -át az $e^{\alpha \ln(1+x)}$ -el definiáljuk, akkor $x > -1$ kell legyen, de egyébként is minden $\alpha < 0$ -ra x nem lehet -1 , mert akkor $f(x)$ meg $\frac{1}{(1+x)^{|\alpha|}}$ alakú. (Nyilván ha például $\alpha \in \mathbb{N}$, akkor $(1+x)^\alpha$ egy polinom, amit lehetne értelmezni akár az egész \mathbb{R} -en is.)

Könnyen látható, hogy f akárhányszor differenciálható és minden $x \in (-1, \infty)$ -re

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}.$$

Definíció 7.1 (Binomiális együttható). Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}$. Ha $0 \leq \alpha \in \mathbb{N}$, akkor $\binom{\alpha}{n}$ a jól ismert binomiális együttható, de ha $\alpha \notin \mathbb{N}$, $\alpha \neq 0$, akkor legyen

$$\binom{\alpha}{0} = 1,$$

és

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

ha $1 \leq n \in \mathbb{N}$.

Ha $0 \leq \alpha \in \mathbb{N}$, akkor például $\binom{\alpha}{n} = 0$ ha $n > \alpha$. De ha $\alpha \notin \mathbb{N}$, akkor $\binom{\alpha}{n}$ semmilyen $n \in \mathbb{N}$ -re nem 0.

Ezekkel a jelölésekkel nyilvánvalóan

$$f^{(n)}(x) = n! \binom{\alpha}{n} (1+x)^{\alpha-n}$$

és így az f függvény 0 középső Taylor sora

$$\sum_{n \geq 0} \binom{\alpha}{n} x^n,$$

amit binomiális sornak nevezünk. Abban az esetben ha $0 \leq \alpha \in \mathbb{N}$, ez egy véges összeg, mert ekkor a binomiális együtthatók 0-val egyenlőek ha $n > \alpha$. Úgyhogy tegyük fel a továbbiakban, hogy $\alpha \notin \mathbb{N}$.

A $\sum_{n \geq 0} \binom{\alpha}{n} x^n$ hatványsor konvergencia sugara 1, mert ha nem is a Cauchy gyökkritériummal, de a hányados kritériummal azt kapjuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\binom{\alpha}{n+1} x^{n+1}}{\binom{\alpha}{n} x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\alpha - n}{n+1} x \right| = |x|.$$

Persze abból, hogy a $\sum_{n \geq 0} \binom{\alpha}{n} x^n$ hatványsor konvergens lenne egy $x \in [-1, 1]$ pontban, még nem következne, hogy az összegfüggvénye egyenlő $f(x) = (1+x)^\alpha$ -val a konvergencia intervallumban (ráadásul f nem is volt értelmezve -1 -ben). Mégis igaz a következő állítás.

Állítás 7.2. Minden $\alpha \in \mathbb{R}$ és $x \in (-1, 1)$ esetén

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n.$$

Bizonyítás. Már tudjuk, hogy a $\sum_{n \geq 0} \binom{\alpha}{n} x^n$ hatványsor konvergens minden $x \in (-1, 1)$ -re, legyen $g: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ az összegfüggvény. Ekkor g differenciálható és a g' deriváltfüggvényt lehet a hatványsor tagonkénti deriválásával számolni:

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \binom{\alpha}{n} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)}{(n-1)!} x^{n-1}$$

minden $x \in (-1, 1)$ -re.

A sorozatok (és sorok) határértékeire vonatkozó állításokat használva minden $x \in (-1, 1)$ -re

$$\begin{aligned} (1+x)g'(x) &= \\ g'(x) + xg'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)}{(n-1)!} x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)}{(n-1)!} x^n = \\ &= \alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n)}{n!} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)}{(n-1)!} x^n = \\ \alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \left((\alpha-n) \binom{\alpha}{n} + n \binom{\alpha}{n} \right) x^n &= \alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha \binom{\alpha}{n} x^n = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = \alpha g(x). \end{aligned}$$

Ezért minden $x \in (-1, 1)$ -re

$$g'(x) = \frac{\alpha}{1+x} g(x).$$

Könnyen látható abból, hogy $f(x) = (1+x)^\alpha$, hogy szintén minden $x \in (-1, 1)$ -re

$$f'(x) = \frac{\alpha}{1+x} f(x),$$

emiatt

$$g'(x)f(x) - g(x)f'(x) = 0.$$

Mivel $f(x) \neq 0$ ha $x \in (-1, 1)$, ezért létezik a g/f függvény $(-1, 1)$ -en és az előbbiek alapján

$$\left(\frac{g}{f} \right)' = 0, \quad \text{így} \quad \frac{g}{f} = c$$

valamilyen $c \in \mathbb{R}$ konstansra. De $f(0) = 1$ és $g(0) = 1$, így $c = 1$ és akkor $f = g$. \square

Tehát nem csak abszolút konvergencia a $\sum_{n \geq 0} \binom{\alpha}{n} x^n$ binomiális sor a $(-1, 1)$ intervallumban, de az összegfüggvénye $(1+x)^\alpha$ -val egyenlő minden $x \in (-1, 1)$ esetén.

Nézzük meg, hogy a binomiális sor mikor konvergens az $x = \pm 1$ -ben. Ehhez a

$$\sum_{n \geq 0} \binom{\alpha}{n} \quad \text{és} \quad \sum_{n \geq 0} (-1)^n \binom{\alpha}{n}$$

numerikus sorok konvergenciáját kell megvizsgálni. Használni fogjuk a következő becslést.

Állítás 7.3. *Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$. Ekkor léteznek olyan $K, L > 0$ az α -tól függő számok, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ -re*

$$\frac{K}{n^{\alpha+1}} \leq \left| \binom{\alpha}{n} \right| \leq \frac{L}{n^{\alpha+1}}.$$

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy minden $x \geq -\frac{1}{2}$ -re

$$e^{x-2x^2} \leq 1+x \leq e^x.$$

Ehhez egy lemmát bizonyítunk be.

Lemma 7.4. *Minden $x \geq -\frac{1}{2}$ -re*

$$x - 2x^2 \leq \ln(1+x) \leq x.$$

Bizonyítás. Az $\ln(1+x)$ függvény 0-hoz tartozó T_1 elsőfokú Taylor polinomja

$$T_1(x) = x$$

és a 0-hoz tartozó R_1 maradéktagja

$$R_1(x) = -\frac{1}{2!} \frac{1}{(1+\xi)^2} x^2,$$

ahol ξ a 0 és x között van. Emiatt ha $x \geq -\frac{1}{2}$, akkor $\xi \geq -\frac{1}{2}$, ezért $(1+\xi)^2 \geq 1/4$ és ezért

$$R_1(x) = -\frac{1}{2!} \frac{1}{(1+\xi)^2} x^2 \geq -2x^2$$

és így

$$\ln(1+x) = x + R_1(x) \geq x - 2x^2$$

ha $x \geq -\frac{1}{2}$. Ugyanakkor mivel $R_1 \leq 0$, az is igaz, hogy

$$\ln(1+x) \leq x.$$

Tehát minden $x \geq -\frac{1}{2}$ -re

$$x - 2x^2 \leq \ln(1+x) \leq x.$$

□

Tehát minden $x \geq -\frac{1}{2}$ -re

$$(7.1) \quad e^{x-2x^2} \leq 1+x \leq e^x$$

is teljesül.

A binomiális együtthatókat célszerű lesz

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} = (-1)^{n-1} \frac{\alpha}{n} \left(1 - \frac{\alpha}{1}\right) \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \cdots \left(1 - \frac{\alpha}{n-1}\right)$$

alakban írni, ekkor

$$\left| \binom{\alpha}{n} \right| = \frac{|\alpha|}{n} \prod_{k=1}^{n-1} \left| 1 - \frac{\alpha}{k} \right|.$$

Ha $k \in \mathbb{N}$ elég nagy, mondjuk nagyobb, mint egy α -tól függő megfelelő $N_\alpha \in \mathbb{N}$, akkor nyilván $-\frac{\alpha}{k} \geq -\frac{1}{2}$ és így nem csak hogy $-\frac{\alpha}{k}$ -ra érvényes lesz a (7.1) becslés, amit mindjárt használni fogunk, de $1 - \frac{\alpha}{k} > 0$ is teljesül.

Ezért ha bevezetjük a

$$\tilde{K} = \prod_{k=1}^{N_\alpha} \left| 1 - \frac{\alpha}{k} \right|$$

jelölést, akkor

$$\left| \binom{\alpha}{n} \right| = \frac{|\alpha|}{n} \tilde{K} \prod_{k=N_\alpha+1}^{n-1} \left(1 - \frac{\alpha}{k} \right)$$

minden $n \geq N_\alpha + 2$ -re. És így a (7.1) becslést egyenként az összes $1+x = 1 - \frac{\alpha}{k}$ -ra alkalmazva azt az alsó és felső becslést kapjuk $n \geq N_\alpha + 2$ esetén, hogy

$$e^{-\alpha \sum_{k=N_\alpha+1}^{n-1} \frac{1}{k} - 2\alpha^2 \sum_{k=N_\alpha+1}^{n-1} \frac{1}{k^2}} \leq \prod_{k=N_\alpha+1}^{n-1} \left(1 - \frac{\alpha}{k} \right) \leq e^{-\alpha \sum_{k=N_\alpha+1}^{n-1} \frac{1}{k}}.$$

Azaz azt a becslést kapjuk $\left| \binom{\alpha}{n} \right|$ -re $n \geq N_\alpha + 2$ esetén, hogy

$$\frac{|\alpha|}{n} \tilde{K} e^{-\alpha \sum_{k=N_\alpha+1}^{n-1} \frac{1}{k} - 2\alpha^2 \sum_{k=N_\alpha+1}^{n-1} \frac{1}{k^2}} \leq \left| \binom{\alpha}{n} \right| \leq \frac{|\alpha|}{n} \tilde{K} e^{-\alpha \sum_{k=N_\alpha+1}^{n-1} \frac{1}{k}}.$$

Mivel

$$\sum_{k=N_\alpha+1}^{n-1} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq \tilde{L}$$

valamilyen $\tilde{L} \in \mathbb{R}$ -re, ezért

$$e^{-2\alpha^2 \tilde{L}} \leq e^{-2\alpha^2 \sum_{k=N_\alpha+1}^{n-1} \frac{1}{k^2}}$$

és így minden $n \geq N_\alpha + 2$ -re

$$(7.2) \quad \frac{|\alpha|}{n} \tilde{K} e^{-2\alpha^2 \tilde{L}} e^{-\alpha \sum_{k=N_\alpha+1}^{n-1} \frac{1}{k}} \leq \left| \binom{\alpha}{n} \right| \leq \frac{|\alpha|}{n} \tilde{K} e^{-\alpha \sum_{k=N_\alpha+1}^{n-1} \frac{1}{k}}.$$

A további számoláshoz szükségünk van a következő állításra.

Lemma 7.5. Minden $1 \leq n \in \mathbb{N}$ -re

$$\ln(n) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n)$$

PROOF. A Riemann integrál definíciójából következik, hogy az $1/x$ függvény grafikonja feletti $1/k$ magas téglalap területekre

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = [\ln(x)]_1^{n+1} = \ln(n+1) \geq \ln(n)$$

és hasonlóan az $1/x$ függvény grafikonja alatti területekre

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{x} dx = 1 + [\ln(x)]_1^n = 1 + \ln(n).$$

□

Ennek felhasználásával azt kapjuk, hogy minden $n \geq N_\alpha + 2$ -re

$$e^{-\alpha}(n-1)^{-\alpha} = e^{-\alpha(1+\ln(n-1))} \leq e^{-\alpha \sum_{k=N_\alpha+1}^{n-1} \frac{1}{k}} \leq e^{-\alpha(\ln(n) - \sum_{k=1}^{N_\alpha} \frac{1}{k})} = e^{\alpha \sum_{k=1}^{N_\alpha} \frac{1}{k}} n^{-\alpha}$$

ha $\alpha \geq 0$ és hasonlóan

$$e^{\alpha \sum_{k=1}^{N_\alpha} \frac{1}{k}} n^{-\alpha} \leq e^{-\alpha \sum_{k=N_\alpha+1}^{n-1} \frac{1}{k}} \leq e^{-\alpha(n-1)^{-\alpha}}$$

ha $\alpha < 0$.

Mivel $(n-1)^{-\alpha} \geq (2n)^{-\alpha}$ ha $\alpha \geq 0$ és $(n-1)^{-\alpha} \leq n^{-\alpha}$ ha $\alpha < 0$, ezért mindenesetre léteznek α -tól függő olyan C és D pozitív számok, hogy

$$Cn^{-\alpha} \leq e^{-\alpha \sum_{k=N_\alpha+1}^{n-1} \frac{1}{k}} \leq Dn^{-\alpha}.$$

Ebből és (7.2)-ből azt kapjuk, hogy minden $n \geq N_\alpha + 2$ -re

$$\frac{|\alpha|}{n} \tilde{K} e^{-2\alpha^2 \tilde{L}} C n^{-\alpha} \leq \left| \binom{\alpha}{n} \right| \leq \frac{|\alpha|}{n} \tilde{K} D n^{-\alpha}.$$

Mivel csak véges sok $N_\alpha + 2$ -nél kisebb természetes szám van, végül azt kapjuk, hogy léteznek α -tól függő olyan $K, L > 0$ számok, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ -re

$$\frac{K}{n^{\alpha+1}} \leq \left| \binom{\alpha}{n} \right| \leq \frac{L}{n^{\alpha+1}}.$$

□

Az eddigieket felhasználva már könnyű megvizsgálni, hogy a binomiális sor konvergencia $x = \pm 1$ -ben.

Tétel 7.6. Legyen $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{N}$, $\alpha \neq 0$.

(i) Ha $\alpha > 0$, akkor a binomiális sor abszolút konvergens $x = \pm 1$ -ben.

- (ii) Ha $-1 < \alpha < 0$, akkor a binomiális sor konvergens $x = 1$ -ben és divergens $x = -1$ -ben.
 (iii) Ha $\alpha \leq -1$, akkor a binomiális sor divergens $x = \pm 1$ -ben.

Bizonyítás. Ha $\alpha > 0$, akkor ± 1 -ben a binomiális sor n -dik tagjának abszolút értéke felülről becsülhető $\frac{L}{n^{\alpha+1}}$ -el, ezért a binomiális sor ± 1 -ben a majoráns kritérium miatt abszolút konvergens.

Ha $\alpha \leq -1$, akkor ± 1 -ben a binomiális sor n -dik tagjainak abszolút értékei alulról becsülhetők $\frac{K}{n^{\alpha+1}}$ -el, tehát nem alkotnak nullsorozatot, ezért a binomiális sor ± 1 -ben divergens.

Ha pedig $-1 < \alpha < 0$, akkor mivel α negatív és így $\binom{\alpha}{n}$ számlálójában n darab negatív számot szorzunk össze, azt kapjuk, hogy $x = 1$ -ben a binomiális sor tagjai váltakozó előjelűek. Ha az $[\binom{\alpha}{n}]$ számsorozat monoton csökkenő nullsorozat, akkor ezek szerint a $\sum_{n \geq 0} \binom{\alpha}{n}$ numerikus sor Leibniz sor és így konvergens. Persze $[\binom{\alpha}{n}]$ nullsorozat, ez rögtön következik az előző állításban bizonyított becslésekből. Megmutatjuk, hogy $[\binom{\alpha}{n}]$ monoton csökkenő sorozat.

Nyilván

$$\left| \binom{\alpha}{n+1} \right| \leq \left| \binom{\alpha}{n} \right|$$

pontosan akkor, ha

$$\frac{\left| \binom{\alpha}{n+1} \right|}{\left| \binom{\alpha}{n} \right|} = \left| \frac{\alpha - n}{n+1} \right| \leq 1.$$

Mivel

$$-(n+1) = -1 - n < \alpha - n < -n,$$

ezért

$$-1 < \frac{\alpha - n}{n+1} < \frac{-n}{n+1} = -1 + \frac{1}{n+1} < 1,$$

tehát

$$\left| \frac{\alpha - n}{n+1} \right| \leq 1$$

és így az $[\binom{\alpha}{n}]$ sorozat monoton csökkenő, emiatt a binomiális sor konvergens $x = 1$ -ben. Ha pedig x helyébe -1 -et írunk $\sum_{n \geq 0} \binom{\alpha}{n} x^n$ -ben, akkor a $\sum_{n \geq 0} \left| \binom{\alpha}{n} \right|$ numerikus sort kapjuk, ami divergens, mert $\frac{K}{n^{\alpha+1}} \leq \left| \binom{\alpha}{n} \right|$. \square

8. Fourier sorok és egyenletes konvergenciájuk

8.1. Trigonometrikus sorok és Fourier együtthatók.

Jelölje \mathcal{R} az olyan \mathbb{R} -en értelmezett 2π szerint periodikus függvények halmazát, amelyek bármely kompakt intervallumon Riemann integrálhatóak. Például a folytonos 2π szerint periodikus függvények \mathcal{R} -beliek. Sőt, a 2π szerint periodikus és csak megszámlálhatóan végtelen sok szakadási ponttal rendelkező függvények is mind \mathcal{R} -beliek.

Definíció 8.1 (Trigonometrikus sor). Ha a_0, a_1, a_2, \dots és b_1, b_2, \dots valós számok, akkor az

$$a_0 + \sum_{n \geq 1} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

alakú függvényt trigonometrikus sornak nevezzük.

Tétel 8.2. *Ha az*

$$a_0 + \sum_{n \geq 1} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

trigonometrikus sor egyenletesen konvergens \mathbb{R} -en és az összegfüggvénye g , akkor $g \in \mathcal{R}$ és g folytonos függvény. Emellett

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos(nx) dx \quad \text{és} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin(nx) dx$$

minden $n \geq 1$ -re.

Bizonyítás. A függvénysorokra vonatkozó 2.13 tétel szerint a g összegfüggvény folytonos. Ugyanakkor az is könnyen látható, hogy $g \in \mathcal{R}$ hiszen az

$$a_0 + \sum_{n=1}^m a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

véges összegek is 2π szerint periodikusak, ezért a határértékük is az ha $m \rightarrow \infty$.

A függvénysorok tagonkénti Riemann integrálhatóságára vonatkozó 2.14 tétel szerint bármely kompakt intervallumon, így a $[-\pi, \pi]$ intervallumon is

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} a_0 dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) dx \right) = \\ &= 2\pi a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n 0 + b_n 0) = 2\pi a_0, \end{aligned}$$

amiből

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx = a_0.$$

Ha $k \geq 1$, akkor a_k és b_k számolása hasonló. Ha egy egyenletesen konvergens $[f_n]$ függvénysorozat minden tagját megszorozzuk egy adott F függvénnyel, akkor a

kapott $[f_n F]$ függvénysorozat is egyenletesen konvergens lesz. Emellett ha $f_n \rightarrow f$, akkor $f_n F \rightarrow f F$. Ezért bármilyen rögzített $1 \leq k \in \mathbb{N}$ -re a

$$a_0 \cos(kx) + \sum_{n \geq 1} a_n \cos(nx) \cos(kx) + b_n \sin(nx) \cos(kx)$$

függvénysor is egyenletesen konvergens és tagonként lehet integrálni, miszerint

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos(kx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} a_0 \cos(kx) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(kx) dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos(kx) dx \right).$$

Mivel

$$\cos(nx) \cos(kx) = \frac{1}{2} (\cos((n+k)x) + \cos((n-k)x))$$

és

$$\sin(nx) \cos(kx) = \frac{1}{2} (\sin((n+k)x) + \sin((n-k)x)),$$

ezért azt kapjuk, hogy

$$\int_{-\pi}^{\pi} a_0 \cos(kx) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(kx) dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos(kx) dx \right) = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos((n+k)x) + \cos((n-k)x)}{2} dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin((n+k)x) + \sin((n-k)x)}{2} dx.$$

De mivel

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos((n+k)x) + \cos((n-k)x)}{2} dx = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin((k+n)x)}{k+n} + x \right]_{-\pi}^{\pi} = \pi$$

ha $k = n$ és 0 ha $k \neq n$, és

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin((n+k)x) + \sin((n-k)x)}{2} dx = 0$$

minden $k, n \geq 1$ -re, ezért

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos(kx) dx = a_k \pi,$$

tehát

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos(kx) dx.$$

Hasonlóan, ha $\sin(kx)$ -el szorozzuk meg a trigonometrikus sort, akkor

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin(kx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} a_0 \sin(kx) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \sin(kx) dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(kx) dx \right)$$

és

$$\int_{-\pi}^{\pi} a_0 \sin(kx) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \sin(kx) dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(kx) dx \right) = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin((n+k)x) + \sin((n-k)x)}{2} dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \frac{-\cos((n+k)x) + \cos((n-k)x)}{2} dx.$$

Most

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{-\cos((n+k)x) + \cos((n-k)x)}{2} dx = \frac{1}{2} \left[\frac{-\sin((n+k)x)}{n+k} + x \right]_{-\pi}^{\pi} = \pi$$

ha $n = k$ és 0 ha $k \neq n$. Ezért

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin(kx) dx = b_k \pi$$

és így

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin(kx) dx.$$

□

Megjegyzés 8.3. Ha $g \in \mathcal{R}$, akkor mindegy, hogy melyik 2π hosszúságú intervallumon integrálunk, azaz minden $T \in \mathbb{R}$ -re

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx = \int_{-\pi+T}^{\pi+T} g(x) dx.$$

Megjegyzés 8.4. A tételben a trigonometrikus sor egyenletesen konvergens kellett hogy legyen. Például ha a $\sum_{n \geq 1} |a_n| + |b_n|$ numerikus sor konvergens, akkor a Weierstrass kritérium miatt az $a_0 + \sum_{n \geq 1} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ trigonometrikus sor egyenletesen konvergens.

Definíció 8.5 (Fourier sor és Fourier együtthatók). Ha $f \in \mathcal{R}$, akkor az

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

és $n \geq 1$ -re az

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad \text{és} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

együtthatókkal definiált

$$a_0 + \sum_{n \geq 1} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

trigonometrikus sort az f függvény Fourier sorának nevezzük. Az a_n, b_n számok az f függvény Fourier együtthatói.

Állítás 8.6. *Ha $f \in \mathcal{R}$ egy kétszer folytonosan differenciálható függvény, akkor az $[a_n]$ és $[b_n]_{n \geq 1}$ Fourier együtthatók sorozatai nullsorozatot alkotnak és az f Fourier sora egyenletesen konvergens.*

Bizonyítás. Legyen $1 \leq n \in \mathbb{N}$, ekkor kétszer parciálisan integrálva

$$\begin{aligned} \pi a_n &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \left[f(x) \frac{\sin(nx)}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin(nx) dx = \\ &= 0 - \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin(nx) dx = -\frac{1}{n} \left[f'(x) \frac{-\cos(nx)}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n^2} \int_{-\pi}^{\pi} f''(x) \cos(nx) dx = \\ &= 0 - \frac{1}{n^2} \int_{-\pi}^{\pi} f''(x) \cos(nx) dx, \end{aligned}$$

amiből

$$|a_n| \leq \frac{1}{\pi n^2} \int_{-\pi}^{\pi} |f''(x)| dx.$$

Ehhez hasonlóan kapjuk, hogy

$$|b_n| \leq \frac{1}{\pi n^2} \int_{-\pi}^{\pi} |f''(x)| dx,$$

de akkor a majoráns kritérium miatt a

$$\sum_{n \geq 1} |a_n| + |b_n|$$

numerikus sor konvergens és így az f függvény Fourier sora a Weierstrass kritérium miatt egyenletesen konvergens. \square

Megjegyzés 8.7. Ha adott egy \mathcal{R} -beli függvény, akkor hozzárendelhetünk egy trigonometrikus sort: a Fourier sorát. Fordítva, egy trigonometrikus sorhoz, ha konvergens, hozzárendelhetjük az összegfüggvényét. Jelölje \mathcal{R}_E azoknak az \mathcal{R} -beli függvényeknek a halmazát, amelyek Fourier sorai egyenletesen konvergens. Például ha f egy 2π szerint periodikus és kétszer folytonosan differenciálható függvény, akkor $f \in \mathcal{R}_E$. Jelölje \mathcal{T}_E az egyenletesen konvergens trigonometrikus sorok halmazát. Ezek szerint definiálhatunk egy

$$\Phi: \mathcal{R}_E \rightarrow \mathcal{T}_E$$

leképezést, ami egy $f \in \mathcal{R}_E$ függvényhez hozzárendeli a $\Phi(f)$ Fourier sorát, és a 8.2 tétel alapján egy

$$\Sigma: \mathcal{T}_E \rightarrow \mathcal{R}$$

leképezést, ami egy $\sigma \in \mathcal{T}_E$ trigonometrikus sorhoz hozzárendeli a $\Sigma(\sigma)$ összegfüggvényét. Szintén a 8.2 tétel alapján minden $\sigma \in \mathcal{T}_E$ -re a $\Sigma(\sigma)$ összegfüggvény folytonos, \mathcal{R}_E -ben van és a $\Phi(\Sigma(\sigma))$ Fourier sor megegyezik σ -val. Ezt úgy is kifejezhetjük, hogy a $\Phi \circ \Sigma$ leképezés egyenlő a \mathcal{T}_E halmaz $\text{id}_{\mathcal{T}_E}$ identitás leképezésével, tehát

$$\Phi \circ \Sigma = \text{id}_{\mathcal{T}_E}.$$

Például ebből következik, hogy

- (1) Ha két egyenletesen konvergens trigonometrikus sor különbözik valamilyen együtthatóikban, akkor az összegfüggvényeik is különböznek.
- (2) Minden egyenletesen konvergens trigonometrikus sor valamilyen folytonos \mathcal{R} -beli függvény Fourier sora.

A következőkben megmutatjuk, hogy a $\Sigma \circ \Phi$ leképezés megszorítása a folytonos \mathcal{R}_E -beli függvényekre, amiknek halmazát \mathcal{R}_E^C -vel jelölhetjük, egyenlő az identitás leképezéssel, azaz

$$\Sigma \circ \Phi|_{\mathcal{R}_E^C} = \text{id}_{\mathcal{R}_E^C}.$$

Ebből az fog következni például, hogy

- (1) Két folytonos \mathcal{R}_E -beli függvény ha csak kicsit is különbözik egymástól, a Fourier soraik különböznek.
- (2) Minden folytonos \mathcal{R}_E -beli függvény valamilyen egyenletesen konvergens trigonometrikus sornak az összegfüggvénye.

8.2. Fourier sor összegfüggvénye.

Az előbbieket szerint ha $f \in \mathcal{R}$ egy kétszer folytonosan differenciálható függvény, akkor az

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad \text{és} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

együtthatókkal definiált trigonometrikus sor (tehát az f Fourier sora) egyenletesen konvergens, és ha g jelöli a folytonos összegfüggvényt, akkor

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos(nx) dx \quad \text{és} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin(nx) dx$$

is teljesül. Így az $f - g$ függvény Fourier együtthatói 0-val egyenlőek. A következő állításból az következik, hogy ekkor az f és g függvények megegyeznek.

Tétel 8.8. *Ha $h \in \mathcal{R}$ egy folytonos függvény és minden Fourier együtthatója 0, akkor h az azonosan 0 függvény.*

Bizonyítás. Ha a h függvény minden Fourier együtthatója 0, akkor minden

$$T(x) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^n \alpha_k \cos(kx) + \beta_k \sin(kx)$$

ún. trigonometrikus polinomra (ahol $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ és β_1, β_2, \dots valós számok) azt kapjuk, hogy

$$\int_{-\pi}^{\pi} h(x)T(x)dx = 0.$$

Tegyük fel, hogy a h függvény minden Fourier együtthatója 0, de h nem az azonosan 0 függvény. Ekkor esetleg valamilyen konstanssal megszorozva h -t és $h(x)$ -ben x helyére $x+a$ -t írva (valamilyen megfelelő $a \in \mathbb{R}$ -re) és az így kapott függvényt még mindig h -val jelölve olyan h függvényt kapunk, aminek még mindig minden Fourier együtthatója 0, de létezik olyan $0 < \delta < \pi/2$, hogy minden $x \in [-\delta, \delta]$ -ra $h(x) \geq 1$.

Tekintsük ekkor a

$$T(x) = 1 - \cos \delta + \cos x$$

trigonometrikus polinomot. Könnyen látható, hogy $T(x) \geq 1$ ha $x \in [-\delta, \delta]$ és $T(x) \leq 1$ ha $|x| \in [\delta, \pi/2]$.

Lemma 8.9. Minden $n \in \mathbb{N}$ -re $T(x)^n$ is egy trigonometrikus polinom, emellett $T(x)^n \geq 1$ ha $x \in [-\delta, \delta]$ és $T(x)^n \leq 1$ ha $|x| \in [\delta, \pi/2]$.

Bizonyítás. Az állítás egyszerűen következik teljes indukcióval abból, hogy

$$\cos(kx) \cos(x) = \frac{1}{2} (\cos((k+1)x) + \cos((k-1)x))$$

és

$$\sin(kx) \cos(x) = \frac{1}{2} (\sin((k+1)x) + \sin((k-1)x)),$$

ezért ha $T(x)^n$ trigonometrikus polinom, akkor

$$T(x)^{n+1} = T(x)^n (1 - \cos \delta + \cos x) = T(x)^n (1 - \cos \delta) + T(x)^n \cos x$$

is az.

És mivel $T(x) \geq 1$ ha $x \in [-\delta, \delta]$ és $T(x) \leq 1$ ha $|x| \in [\delta, \pi/2]$, ezért nyilván $T(x)^n \geq 1$ ha $x \in [-\delta, \delta]$ és $T(x)^n \leq 1$ ha $|x| \in [\delta, \pi/2]$ is teljesül. \square

Megmutatjuk, hogy van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy

$$\int_{-\pi}^{\pi} h(x)T(x)^n dx \neq 0,$$

ami ellentmond annak, hogy bármilyen trigonometrikus polinommal megszorozva h -t és utána $-\pi$ -től π -ig integrálva 0-át kell kapjunk.

Legyen $n \in \mathbb{N}$ tetszőleges és legyen ε tetszőleges olyan szám, amire $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2} - \delta$. Ekkor persze $\delta < \delta + \varepsilon < \frac{\pi}{2}$ is teljesül. Így

$$\int_{-\pi}^{\pi} hT^n = \int_{-\pi}^{-\delta-\varepsilon} hT^n + \int_{-\delta-\varepsilon}^{-\delta} hT^n + \int_{-\delta}^{\delta} hT^n + \int_{\delta}^{\delta+\varepsilon} hT^n + \int_{\delta+\varepsilon}^{\pi} hT^n$$

és ezeket az összeadandókat a következő módon tudjuk becsülni. Legyen

$$K = \max_{x \in [-\pi, \pi]} \{|h(x)|\}.$$

Ekkor

$$\int_{-\delta}^{\delta} hT^n \geq \int_{-\delta}^{\delta} 1 = 2\delta,$$

$$\left| \int_{\delta}^{\delta+\varepsilon} hT^n \right| \leq \int_{\delta}^{\delta+\varepsilon} |h| |T^n| \leq \int_{\delta}^{\delta+\varepsilon} |h| \leq K\varepsilon, \quad \text{hasonlóan} \quad \left| \int_{-\delta-\varepsilon}^{-\delta} hT^n \right| \leq K\varepsilon,$$

és a

$$q_\varepsilon = \max_{x \in [\delta+\varepsilon, \pi]} \{|T(x)|\}$$

jelöléssel nyilván $0 \leq q_\varepsilon < 1$, ami miatt

$$\left| \int_{\delta+\varepsilon}^{\pi} hT^n \right| \leq \int_{\delta+\varepsilon}^{\pi} |h| |T^n| \leq q_\varepsilon^n K \pi \quad \text{és szintén} \quad \left| \int_{-\pi}^{-\delta-\varepsilon} hT^n \right| \leq q_\varepsilon^n K \pi.$$

Ezekből a becslésekből azt kapjuk, hogy

$$\int_{-\pi}^{\pi} hT^n \geq \int_{-\delta}^{\delta} hT^n - \left| \int_{-\pi}^{-\delta-\varepsilon} hT^n \right| - \left| \int_{-\delta}^{\delta} hT^n \right| - \left| \int_{\delta}^{\delta+\varepsilon} hT^n \right| - \left| \int_{\delta+\varepsilon}^{\pi} hT^n \right| \geq 2\delta - 2K\varepsilon - 2q_\varepsilon^n K \pi \geq \delta > 0$$

ha ε olyan, hogy $2K\varepsilon < \delta/2$ és ehhez az ε -hoz n olyan, hogy $2q_\varepsilon^n K \pi < \delta/2$. Így erre az n -re

$$\int_{-\pi}^{\pi} hT^n \neq 0,$$

ami ellentmondás, tehát a feltevés, miszerint h nem az azonosan 0 függvény, hamis. \square

Tehát a következő állítást kapjuk.

Tétel 8.10. *Ha az $f \in \mathcal{R}$ folytonos függvény Fourier sora egyenletesen konvergens és a Fourier sor összegfüggvénye g , akkor $f = g$.*

Bizonyítás. A feltételekből következik, hogy g folytonos és $g \in \mathcal{R}$. Szintén következik, hogy

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos(nx) dx \quad \text{és} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin(nx) dx$$

teljesülnek, ahol a_0, a_1, a_2, \dots és b_1, b_2, \dots az f függvény Fourier együtthatói, azaz

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad \text{és} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx.$$

De ekkor az $f - g \in \mathcal{R}$ folytonos függvény Fourier együtthatói 0-val egyenlőek és akkor az előző 8.8 tétel miatt $f = g$. \square

Az előbbieket felhasználva kapjuk például a következő állítást.

Következmény 8.11. *Kétszer folytonosan differenciálható és 2π szerint periodikus függvény Fourier sora előállítja a függvényt.*

Persze az ilyen függvények Fourier sora nem csak pontonként konvergens, hanem egyenletesen is. A következőkben azt vizsgáljuk, hogy milyen \mathcal{R} -beli, de nem feltétlenül kétszer folytonosan differenciálható függvények Fourier sora lesz olyan, hogy tart az illető függvényhez. Ilyenkor már nem biztos, hogy egyenletesen konvergens lesz a Fourier sor, ezért a pontonkénti konvergenciát fogjuk vizsgálni. Azt fogjuk látni, hogy ha a folytonosságnál egy kicsit erősebb, de a differenciálhatóságnál gyengébb feltétel már teljesül egy 2π szerint periodikus függvényre, akkor a Fourier sora már konvergál hozzá. Például egy 2π szerint periodikus, minden pontban balról és jobbról is differenciálható folytonos f függvény Fourier sora tart f -hez. De ennél gyengébb feltétel teljesülése esetén is, amikor a 2π szerint periodikus folytonos függvény ún. lokálisan Lipschitz tulajdonságú, a Fourier sora már pontonként tart a függvényhez.

Az érdekesség kedvéért azt is megjegyezzük, hogy van olyan folytonos \mathcal{R} -beli függvény, aminek a Fourier sora végtelen sok pontban divergens. Ennek ellenére bizonyos feltételeket kielégítő nem folytonos függvényeknek is konvergens a Fourier sora és a szakadási pontoktól eltekintve az illető függvényhez konvergál. Például a lokális Lipschitz feltétel általánosítható olyan nem folytonos függvényekre is, amiknek minden pontban van véges bal- és jobboldali határértéke. Az így kapott ún. Dini-Lipschitz feltételt kielégítő függvények Fourier sora mindenütt konvergens, de csak a szakadási pontoktól eltekintve konvergál a függvényhez (a szakadási pontokban a függvény bal- és jobboldali határértékeinek számtani közepéhez konvergál).

9. Fourier sorok pontonkénti konvergenciája

Ebben a fejezetben is jelölje \mathcal{R} az olyan \mathbb{R} -en értelmezett 2π szerint periodikus függvények halmazát, amelyek bármely kompakt intervallumon Riemann integrálhatóak.

9.1. Dirichlet féle integrálformulák.

Az egyenletes konvergencia után vizsgáljuk meg a pontonkénti konvergenciát. Ehhez hasznos lesz a Fourier sorok részletösszegeit egyszerűbb formulákkal is kifejezni. Legyen $f \in \mathcal{R}$ és jelölje

$$s_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

az f függvény Fourier sorának n -dik részletösszegét. Ekkor mivel az a_n, b_n számok az f függvény Fourier együtthatói, ezért egy kis átalakítás után nyilvánvalóan

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(kt) \cos(kx) + \sin(kt) \sin(kx) \right) dt.$$

Ezt egyszerűbben is írhatjuk, hiszen a $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) + \sin(\alpha) \sin(\beta)$ egyenlőség felhasználásával

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(k(t-x)) \right) dt.$$

Vezessük be a

$$D_n(y) = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(ky)$$

jelölést.

Tétel 9.1 (Dirichlet féle integrálformulák). *Az $s_n(x)$ véges részletösszeget az alábbi formulákkal is kiszámolhatjuk.*

(1)

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t-x) f(t) dt.$$

(2)

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} D_n(t) \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} dt.$$

Bizonyítás. Az (1) formula rögtön következik az eddigiekből, mert

$$D_n(t-x) = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(k(t-x)).$$

Az (1) formulából a (2)-őt a következő módon kaphatjuk. Helyettesítsünk $u = t-x$ -et az (1)-es formulába. Ekkor

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} D_n(u) f(x+u) du.$$

Itt $u \mapsto D_n(u)$ és $u \mapsto f(x+u)$ is 2π szerint periodikus függvények, emiatt $u \mapsto D_n(u)f(x+u)$ is az, ezért mindegy, hogy melyik 2π hosszúságú intervallumon integrálunk, így

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(u)f(x+u)du.$$

Nyilvánvalóan

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 D_n(u)f(x+u)du + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} D_n(u)f(x+u)du,$$

és ennek az összegnek az első tagja az $u = -t$ helyettesítéssel az

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 D_n(u)f(x+u)du = \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^0 D_n(-t)f(x-t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} D_n(t)f(x-t)dt$$

alakban is írható, mert $D_n(t) = D_n(-t)$ minden t -re.

Tehát

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} D_n(t)f(x-t)dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} D_n(t)f(x+t)dt,$$

amiből

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} D_n(t) (f(x-t) + f(x+t)) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} D_n(t) \frac{f(x-t) + f(x+t)}{2} dt.$$

□

Persze a Dirichlet féle integrálformulák akkor lesznek jól használhatók, ha D_n -re találunk egy egyszerűbb formulát.

Lemma 9.2. *Ha $y \neq 2m\pi$, ahol $m \in \mathbb{Z}$, akkor*

$$D_n(y) = \frac{\sin\left(\left(2n+1\right)\frac{y}{2}\right)}{\sin\left(\frac{y}{2}\right)}.$$

Emellett $D_n(2m\pi) = 1 + 2n$.

Bizonyítás. Ha $y \neq 2m\pi$, akkor szorozzuk meg a

$$D_n(y) = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(ky)$$

egyenlőséget $\sin \frac{y}{2}$ -vel, akkor

$$\begin{aligned} D_n(y) \sin \frac{y}{2} &= \sin \frac{y}{2} + 2 \sin \frac{y}{2} \sum_{k=1}^n \cos(ky) = \sin \frac{y}{2} + \sum_{k=1}^n 2 \cos(ky) \sin \frac{y}{2} = \\ &= \sin \frac{y}{2} + \sum_{k=1}^n \left(\sin \left(\left(k + \frac{1}{2} \right) y \right) - \sin \left(\left(k - \frac{1}{2} \right) y \right) \right), \end{aligned}$$

mert

$$2 \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)$$

teljesül minden $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ -re. De mivel

$$\sin \frac{y}{2} + \sum_{k=1}^n \sin \left(\left(k + \frac{1}{2} \right) y \right) - \sin \left(\left(k - \frac{1}{2} \right) y \right) = \sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) y \right),$$

azt kapjuk, hogy

$$D_n(y) \sin \frac{y}{2} = \sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) y \right),$$

amiből következik az állítás ha $y \neq 2m\pi$. Ha meg $y = 2m\pi$, akkor nyilván $D_n(y) = 1 + 2n$. \square

9.2. Dini feltétel.

A következőkben azt vizsgáljuk meg, hogy egy $f \in \mathcal{R}$ függvény Fourier sora mikor konvergens egyáltalán, azaz hogy mikor konvergál pontonként valamilyen $S: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényhez.

A 8.6 tételben láttuk, hogy egy kétszer folytonosan differenciálható \mathcal{R} -beli függvényre az $[a_n]_{n \geq 0}$ és $[b_n]_{n \geq 1}$ Fourier együtthatók sorozatai nullsorozatot alkotnak. Ez akármilyen \mathcal{R} -beli függvényre is igaz, de egyébként is sokat fogjuk használni a következő állítást.

Tétel 9.3. *Ha $f \in \mathcal{R}$, akkor a Fourier együtthatók $[a_n]_{n \geq 0}$ és $[b_n]_{n \geq 1}$ sorozatai nullsorozatot alkotnak.*

Bizonyítás. \square

Emlékeztetünk a $D_n(y) = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(ky)$ jelölésre.

Lemma 9.4. *Minden $n \geq 0$ -ra*

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi D_n(t) dt = 1$$

Bizonyítás. A konstans 1 függvény Fourier együtthatói

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi 1 dx = 1$$

és

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(nx)}{n} \right]_{-\pi}^\pi = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\cos(nx)}{n} \right]_{-\pi}^\pi = 0.$$

Ezért minden $n \geq 0$ -ra az s_n részletösszeg egyenlő az azonosan 1 függvénnyel. Így a Dirichlet féle integrálformulát alkalmazva a konstans 1 függvényre, minden $x \in \mathbb{R}$ -re

$$1 = s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi D_n(t) \frac{1+1}{2} dt.$$

□

Tehát ha $S: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ egy adott függvény, akkor minden $x \in \mathbb{R}$ -re

$$S(x) = S(x) \frac{1}{\pi} \int_0^\pi D_n(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi D_n(t) S(x) dt$$

és ezt hozzáadva és le is vonva a Dirichlet féle integrálformula jobb oldalából azt kapjuk, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ -re

$$s_n(x) = S(x) + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi D_n(t) \left(\frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} - S(x) \right) dt.$$

Legyen $\delta \in (0, \pi)$ és legyen

$$R_{n,\delta}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\delta D_n(t) \left(\frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} - S(x) \right) dt$$

és

$$\varepsilon_{n,\delta}(x) = \frac{1}{\pi} \int_\delta^\pi D_n(t) \left(\frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} - S(x) \right) dt.$$

Ekkor persze minden $x \in \mathbb{R}$ -re

$$s_n(x) = S(x) + R_{n,\delta}(x) + \varepsilon_{n,\delta}(x).$$

Lemma 9.5. *Legyen $\delta > 0$ és $x \in \mathbb{R}$ rögzített. Ekkor ha $n \rightarrow \infty$, akkor $\varepsilon_{n,\delta}(x) \rightarrow 0$.*

Bizonyítás. Az egyszerűség kedvéért legyen $g_x(t) = \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - S(x)$. Mivel

$$D_n(t) = \frac{\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)},$$

ezért

$$\varepsilon_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_\delta^\pi \frac{\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} g_x(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_\delta^\pi \sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right) \frac{g_x(t)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} dt.$$

Nyilván

$$\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right) = \sin(nt) \cos\left(\frac{t}{2}\right) + \cos(nt) \sin\left(\frac{t}{2}\right)$$

és így

$$\begin{aligned}\varepsilon_{n,\delta}(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\pi} \sin(nt) \cos\left(\frac{t}{2}\right) \frac{g_x(t)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} dt + \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\pi} \cos(nt) \sin\left(\frac{t}{2}\right) \frac{g_x(t)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\pi} \sin(nt) \operatorname{ctg}\left(\frac{t}{2}\right) g_x(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\pi} \cos(nt) g_x(t) dt.\end{aligned}$$

De ha a $[\delta, \pi]$ intervallumon értelmezett $\operatorname{ctg}\left(\frac{t}{2}\right) g_x(t)$ függvényt és $g_x(t)$ függvényt azonosan 0-ként kiterjesztjük a $[-\pi, \pi]$ intervallumra, akkor $\varepsilon_{n,\delta}(x)$ egyenlő két \mathcal{R} -beli függvény két n -dik Fourier együtthatójának összegével. Az erről szóló 9.3 tétel miatt ezért $\varepsilon_{n,\delta}(x) \rightarrow 0$ ha $n \rightarrow \infty$. \square

Legyen tehát $S: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ egy adott függvény. Ezek szerint egy rögzített $x \in \mathbb{R}$ -re az $[s_n(x)]_{n \geq 0}$ számsorozat pontosan akkor konvergál $S(x)$ -hez, ha az $[R_n(x)]_{n \geq 0}$ számsorozat konvergál 0-hoz. Ez a gyakorlatban nagyon nehezen használható feltétel, ezért vezetjük be a következő kicsit gyakorlatiasabb definíciót és bizonyítjuk be az utána következő állítást.

Definíció 9.6 (Dini feltétel). Egy $f \in \mathcal{R}$ függvény egy $x \in \mathbb{R}$ pontban kielégíti a Dini feltételt az $S(x)$ számmal, ha van olyan $\delta(x) > 0$, hogy az

$$\int_0^{\delta(x)} \frac{1}{t} \left| \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} - S(x) \right| dt$$

improprius integrál konvergens.

Állítás 9.7. Ha egy $f \in \mathcal{R}$ függvény egy $x \in \mathbb{R}$ pontban kielégíti a Dini feltételt az $S(x)$ számmal, akkor az $[s_n(x)]_{n \geq 0}$ számsorozat konvergál $S(x)$ -hez.

Bizonyítás. Az egyszerűség kedvéért legyen $g_x(t) = \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} - S(x)$. Mivel

$$D_n(t) = \frac{\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)},$$

ezért

$$R_{n,\delta}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} \frac{g_x(t)}{t} \frac{t}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right) dt.$$

Figyelembe véve, hogy $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin\frac{t}{2}}{t} = \frac{1}{2}$, a $\frac{t}{\sin\frac{t}{2}}$ függvény korlátos a $(0, \delta]$ intervallumon, tehát

$$\left| \frac{t}{\sin\frac{t}{2}} \right| \leq K$$

valamilyen $K \in \mathbb{R}$ -re és minden $t \in (0, \delta]$ -ra.

Így

$$\left| \frac{g_x(t)}{t} \frac{t}{\sin\frac{t}{2}} \right| \leq K \left| \frac{g_x(t)}{t} \right|$$

és ezért a Dini feltétel miatt az

$$\int_0^{\delta(x)} \left| \frac{g_x(t)}{t} \frac{t}{\sin \frac{t}{2}} \right| dt$$

integrál véges.

Ekkor mivel nyilván

$$\sin \left((2n+1) \frac{t}{2} \right) = \sin(nt) \cos \left(\frac{t}{2} \right) + \cos(nt) \sin \left(\frac{t}{2} \right),$$

azonosan 0-ként kiterjesztve a $\frac{g_x(t)}{t} \frac{t}{\sin \frac{t}{2}}$ függvényt a $[-\pi, \pi]$ intervallumra azt kapjuk, hogy $R_{n,\delta}(x)$ egyenlő két \mathcal{R} -beli függvény két n -dik Fourier együtthatójának összegével, tehát $R_{n,\delta}(x)$ tart a 0-hoz, ha $n \rightarrow \infty$.

Végül amiatt, hogy

$$s_n(x) = S(x) + R_{n,\delta}(x) + \varepsilon_{n,\delta}(x)$$

és $\varepsilon_{n,\delta}(x)$ és $R_{n,\delta}(x)$ is tart a 0-hoz ha $n \rightarrow \infty$, az $[s_n(x)]$ számsorozat tart $S(x)$ -hez ha $n \rightarrow \infty$. \square

Következmény 9.8. Legyen $f \in \mathcal{R}$ és $S: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ egy függvény. Ha minden $x \in \mathbb{R}$ -ben az f kielégíti a Dini feltételt az $S(x)$ számmal, akkor az f függvény Fourier sora pontonként konvergál az S függvényhez.

Persze a Dini feltételt sem nagyon könnyű használni. A következőkben az lesz a célunk, hogy a gyakorlatban mégjobban használható feltételt találjunk egy Fourier sor pontonkénti konvergenciájára.

Definíció 9.9 (Reguláris pont). Legyen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ egy függvény. Az $x \in \mathbb{R}$ az f függvény reguláris pontja, ha léteznek és végesek a $\lim_{t \rightarrow x-0} f(t)$ és $\lim_{t \rightarrow x+0} f(t)$ bal- és jobboldali x -beli határértékek.

Megjegyzés 9.10. Ha f folytonos x -ben, akkor nyilván reguláris is x -ben. Vagy ha például f egy monoton függvény az x pont valamilyen $\delta > 0$ sugarú környezetében, akkor f reguláris is x -ben.

Definíció 9.11 (Lokális Dini-Lipschitz feltétel). Az f függvény kielégíti a lokális Dini-Lipschitz feltételt az x_0 pontban, ha x_0 reguláris pontja f -nek és van olyan $K, \delta, \alpha > 0$ hogy minden $x \in (0, \delta]$ -ra

$$\left| f(x_0 - x) - \lim_{t \rightarrow x_0-0} f(t) \right| \leq Kx^\alpha$$

és

$$\left| f(x_0 + x) - \lim_{t \rightarrow x_0+0} f(t) \right| \leq Kx^\alpha.$$

Definíció 9.12 (Lokális Lipschitz feltétel). Az f függvény kielégíti a lokális Lipschitz feltételt az x_0 pontban, ha van olyan $K, \delta, \alpha > 0$ hogy minden $|x - x_0| \leq \delta$ -ra

$$|f(x) - f(x_0)| \leq K|x - x_0|^\alpha$$

Megjegyzés 9.13.

- (1) Ha egy függvény egy pontban kielégíti a lokális Lipschitz feltételt, akkor ott a függvény folytonos. Ekkor ott a lokális Dini-Lipschitz feltételt is kielégíti.
- (2) Ha egy függvény egy x_0 pontban folytonos és balról is és jobbról is differenciálható, akkor az x_0 -ban kielégíti a lokális Lipschitz feltételt $\alpha = 1$ -el, mert akkor a különbségi hányados függvény korlátos az x_0 egy környezetében.

Tétel 9.14. Ha $f \in \mathcal{R}$ és f minden $x \in \mathbb{R}$ -ben kielégíti a lokális Dini-Lipschitz feltételt, akkor a Fourier sora mindenhol konvergens és a Fourier sor összege egy $x \in \mathbb{R}$ -ben egyenlő az x -beli bal- és jobboldali határértékek átlagával, tehát

$$\frac{\lim_{t \rightarrow x-0} f(t) + \lim_{t \rightarrow x+0} f(t)}{2} \text{-vel.}$$

Bizonyítás. Definiáljuk az $S: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt úgy, hogy

$$S(x) = \frac{\lim_{t \rightarrow x-0} f(t) + \lim_{t \rightarrow x+0} f(t)}{2}.$$

Tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ -re és megfelelő $\delta(x)$ -re az

$$\int_0^{\delta(x)} \frac{1}{t} \left| \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} - S(x) \right| dt$$

improprius integrált fogjuk felülről becsülni, és akkor az előző 9.7 állításból következik a tétel.

Mivel az f minden $x \in \mathbb{R}$ -ben kielégíti a lokális Dini-Lipschitz feltételt, létezik a megfelelő $K(x), \delta(x), \alpha(x) > 0$, hogy minden $y \in (0, \delta(x)]$ -re

$$\left| f(x-y) - \lim_{t \rightarrow x-0} f(t) \right| \leq K(x)y^{\alpha(x)}$$

és

$$\left| f(x+y) - \lim_{t \rightarrow x+0} f(t) \right| \leq K(x)y^{\alpha(x)}.$$

De akkor nyilvánvalóan minden $y \in (0, \delta(x)]$ -re

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x+y) + f(x-y)}{2} - S(x) \right| &= \\ \left| \frac{f(x+y) + f(x-y)}{2} - \frac{\lim_{t \rightarrow x-0} f(t) + \lim_{t \rightarrow x+0} f(t)}{2} \right| &\leq \\ \frac{1}{2} \left| f(x-y) - \lim_{t \rightarrow x-0} f(t) \right| + \frac{1}{2} \left| f(x+y) - \lim_{t \rightarrow x+0} f(t) \right| &\leq 2 \frac{1}{2} K(x)y^{\alpha(x)}, \end{aligned}$$

ezért minden $y \in (0, \delta(x)]$ -re

$$\frac{1}{y} \left| \frac{f(x+y) + f(x-y)}{2} - S(x) \right| \leq K(x)y^{\alpha(x)-1}.$$

Az $\alpha(x) > 0$, ezért $\alpha(x) - 1 > -1$ és így az

$$\int_0^{\delta(x)} \frac{1}{t} \left| \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} - S(x) \right| dt$$

impropius integrál konvergens. □

Következmény 9.15. Ha $f \in \mathcal{R}$ és f egy $x_0 \in \mathbb{R}$ -ben kielégíti a lokális Lipschitz feltételt, akkor az f függvény Fourier sora konvergens x_0 -ban és ott az összege egyenlő $f(x_0)$ -al.

Következmény 9.16. Ha $f \in \mathcal{R}$ és f egy $x_0 \in \mathbb{R}$ -ben folytonos és balról is és jobbról is differenciálható, akkor az f függvény Fourier sora konvergens x_0 -ban és ott az összege egyenlő $f(x_0)$ -al.

Következmény 9.17. Ha $f \in \mathcal{R}$ egy differenciálható függvény, akkor a Fourier sora pontonként tart f -hez.

Példa 9.18. A következő függvényeket értelemszerűen csak a $[-\pi, \pi]$ vagy $[0, 2\pi]$ intervallumban adjuk meg és onnan periodikusan terjesztjük ki az \mathbb{R} -re.

(1) $f(x) = \frac{\pi-x}{2}$ ha $x \in (0, 2\pi)$ és $f(0) = f(2\pi) = 0$, ekkor

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$$

(2) $f(x) = \operatorname{sgn}(\sin x)$, ekkor

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin((2n-1)x)}{2n-1}$$

(3) $f(x) = x$ ha $x \in (-\pi, \pi)$ és $f(\pm\pi) = 0$, ekkor

$$f(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin(nx)}{n}$$

(4) $f(x) = \frac{(\pi-x)^2}{4}$ ha $x \in [0, 2\pi]$, ekkor

$$f(x) = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$$

Végül a következő tétel azért érdekes, mert azt állítja, hogy bár látszólag egy f függvény Fourier sorának egy $x_0 \in \mathbb{R}$ pontban való konvergenciája függ az f egész $[-\pi, \pi]$ intervallumon való viselkedésétől (hiszen a Fourier együtthatókat úgy számoljuk ki, hogy egy 2π hosszúságú intervallumon integrálunk), valójában az f -nek csak egy x_0 körüli tetszőlegesen kicsi környezetére való megszorításától függ.

Tétel 9.19. Legyenek $f_1 \in \mathcal{R}$ és $f_2 \in \mathcal{R}$. Ha valamilyen $x_0 \in \mathbb{R}$ -re és valamilyen kis $\delta > 0$ -ra $f_1(t) = f_2(t)$ minden $t \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ esetén, akkor az f_1 és f_2 Fourier sorai az x_0 -ban egyszerre konvergensek vagy divergensek és konvergencia esetén a két Fourier sor összege x_0 -ban azonos.

Bizonyítás. Feltehető, hogy $\delta < \pi$. Legyenek

$$R_n(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\delta D_n(t) \frac{f(x_0 - t) + f(x_0 + t)}{2} dt$$

és

$$\varepsilon_n(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_\delta^\pi D_n(t) \frac{f(x_0 - t) + f(x_0 + t)}{2} dt,$$

ekkor nyilvánvalóan

$$s_n(x_0) = R_n(x_0) + \varepsilon_n(x_0).$$

Megmutatjuk, hogy rögzített x_0 -ra az $[\varepsilon_n(x_0)]$ számsorozat 0-hoz tart ha $n \rightarrow \infty$. Mivel

$$D_n(y) = \frac{\sin\left((2n+1)\frac{y}{2}\right)}{\sin\left(\frac{y}{2}\right)}$$

ha $y \neq 2k\pi$ ahol $k \in \mathbb{Z}$, ezért

$$\varepsilon_n(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_\delta^\pi \frac{\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right) (f(x_0 - t) + f(x_0 + t))}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} dt.$$

Legyen g az a $[-\pi, \pi]$ intervallumon értelmezett függvény, amire

$$\begin{aligned} g(t) &= 0 && \text{ha } -\pi \leq t < \delta \text{ és} \\ g(t) &= \frac{f(x_0 - t) + f(x_0 + t)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} && \text{ha } \delta \leq t \leq \pi. \end{aligned}$$

Ekkor

$$\varepsilon_n(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_\delta^\pi g(t) \sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi g(t) \sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right) dt.$$

De mivel

$$\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right) = \sin(nt) \cos\left(\frac{t}{2}\right) + \cos(nt) \sin\left(\frac{t}{2}\right),$$

ezért

$$\varepsilon_n(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi g(t) \sin(nt) \cos\left(\frac{t}{2}\right) dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi g(t) \cos(nt) \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt,$$

amiből az látszik, hogy rögzített x_0 -ra $\varepsilon_n(x_0)$ megegyezik a $g(t) \cos\left(\frac{t}{2}\right)$ és a $g(t) \sin\left(\frac{t}{2}\right)$ függvények egy-egy n -edik Fourier együtthatójának összegével. Az erről szóló 9.3 tétel szerint ezek az együtthatók nullsorozatot alkotnak, tehát rögzített x_0 -ra az $[\varepsilon_n(x_0)]$ számsorozat 0-hoz tart ha $n \rightarrow \infty$.

Ezek szerint az $[s_n(x_0)]$ számsorozat pontosan akkor konvergens, amikor az $[R_n(x_0)]$ számsorozat konvergens, és ezek határértékei is megegyeznek. De $R_n(x_0)$

definíciójából látszik, hogy az csak az f függvény $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ intervallumra való megszorításától függ. \square

Felhasznált és ajánlott irodalom.

Szőkefalvi-Nagy Béla: Valós függvények és függvénysorok

Riesz Frigyes: Funkcionálanalízis

Tartalomjegyzék

1. Pontonként konvergens és egyenletesen konvergens függvénysorozatok	1
2. Adott tulajdonsággal rendelkező függvényekből álló függvénysorozatok	4
2.1. Folytonos függvények	4
2.2. Riemann integrálható függvények	5
2.3. Differenciálható függvények	7
2.4. Függvénysorok	9
3. Cauchy kritérium és Weierstrass féle egyenletes konvergencia tétel	10
4. Abel és Dirichlet féle egyenletes konvergencia tétel	11
5. Hatványsorok	15
5.1. Hatványsor konvergencia halmaza	15
5.2. Hatványsor összegfüggvénye	18
6. Taylor sor	23
7. Binomiális sor	29
8. Fourier sorok és egyenletes konvergenciájuk	34
8.1. Trigonometrikus sorok és Fourier együtthatók	34
8.2. Fourier sor összegfüggvénye	39
9. Fourier sorok pontonkénti konvergenciája	42
9.1. Dirichlet féle integrálformulák	42
9.2. Dini feltétel	45
Felhasznált és ajánlott irodalom	52