Függvénysorozatok és függvénysorok

1. Pontonként konvergens és egyenletesen konvergens függvénysorozatok

Definíció 1.1 (Sorozat). Legyen $0 \leq \mu \in \mathbb{N}$ egy rögzített egész szám és legyen $\mathcal{A}$ egy tetszőleges halmaz. Egy függvényt, ami minden olyan $n \in \mathbb{N}$-hez amire $n \geq \mu$, egy $a_n \in \mathcal{A}$ elemet rendel, sorozatnak (vagy μ-től kezdődő $\mathcal{A}$-beli sorozatnak) nevezünk és $[a_n]_{n\geq\mu}$-vel jelöljük.

Ha $\mu = 0$, akkor az $[a_n]_{n\geq 0}$ jelölés helyett az egyszerűbb $[a_n]$ jelölést is használjuk[1].

Példa 1.2. Ha $\mathcal{A} = \mathbb{R}$, akkor egy $\mathcal{A}$-beli sorozatot számsorozatnak nevezünk. Ha az $\mathcal{A}$ egy adott $X \subseteq \mathbb{R}$ halmazon értelmezett függvények halmaza, akkor pedig egy $\mathcal{A}$-beli sorozatot X-beli függvénysorozatnak nevezünk.

Definíció 1.3 (Függvénysorozat). Legyen $X \subseteq \mathbb{R}$. Egy sorozatot, ami minden $n \in \mathbb{N}$-hez egy X-en értelmezett $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ függvényt rendel, X-en értelmezett függvénysorozatnak nevezünk és $[f_n]$-nel jelöljük.

Példa 1.4. Ha $X = \mathbb{R}$ és $f_n(x) = x^n$, akkor egy $\mathbb{R}$-en értelmezett függvénysorozatot kapunk, aminek az első tagja az $\mathbb{R}$-en értelmezett $f_1(x) = x$ függvény, a második tagja az $\mathbb{R}$-en értelmezett $f_2(x) = x^2$ függvény, a harmadik tagja az $\mathbb{R}$-en értelmezett $f_3(x) = x^3$ függvény, stb.

Definíció 1.5 (Pontonkénti konvergencia). Az $X \subseteq \mathbb{R}$-en értelmezett $[f_n]$ függvénysorozat pontonként konvergál (vagy pontonként tart) az $f\colon X \to \mathbb{R}$ függvényhez, jelölésben $f_n \to f$ vagy $\lim_{n\to\infty} f_n = f$, ha minden $x \in X$-re az $[f_n(x)]$ számsorozat konvergál $f(x)$-hez amikor $n \to \infty$.

Definíció 1.6 (Egyenletes konvergencia). Az $X \subseteq \mathbb{R}$-en értelmezett $[f_n]$ függvénysorozat egyenletesen konvergál (vagy egyenletesen tart) X-en az $f\colon X \to \mathbb{R}$ függvényhez, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy ha $n > N$, akkor minden $x \in X$-re $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Ez persze azzal ekvivalens, hogy az

$$n \mapsto \sup_{x\in X} \{|f_n(x) - f(x)|\}$$

számsorozat tart 0-hoz ha $n \to \infty$.

[1] Szokásos az (a_n) jelölés is, de ebben a jegyzetben nem használjuk.

Állítás 1.7. *Az $[f_n]$ függvénysorozat egyenletesen konvergál f-hez X-en $\iff$ létezik olyan pozitív tagú és 0-hoz tartó $[a_n]$ számsorozat, hogy minden $n \in \mathbb{N}$-re és $x \in X$-re $|f_n(x) - f(x)| \le a_n$.*

Bizonyítás. Ha $f_n \to f$ egyenletesen X-en, akkor

$$a_n = \frac{1}{n} + \sup_{x \in X}\{|f_n(x) - f(x)|\}$$

definícióval az $[a_n]$ számsorozat rendelkezik a várt tulajdonságokkal.

Ha pedig a pozitív tagú $[a_n]$ számsorozat tart 0-hoz és minden $n \in \mathbb{N}$-re és $x \in X$-re

$$|f_n(x) - f(x)| \le a_n,$$

akkor

$$\sup_{x \in X}\{|f_n(x) - f(x)|\} \le a_n$$

is teljesül, amiből következik, hogy

$$\sup_{x \in X}\{|f_n(x) - f(x)|\} \to 0$$

ha $n \to \infty$ és így $f_n \to f$ egyenletesen X-en. □

Állítás 1.8. *Ha az $[f_n]$ függvénysorozat egyenletesen tart f-hez, akkor az $[f_n]$ függvénysorozat pontonként is tart f-hez.*

Bizonyítás. Legyen $x_0 \in X$ és $\varepsilon > 0$. Ekkor van olyan $N \in \mathbb{N}$ hogy minden $n > N$ és $x \in X$ esetén $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, de akkor minden $n > N$-re $|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$ is teljesül. Tehát $f_n(x_0)$ tart $f(x_0)$-hoz ha $n \to \infty$. □

Példa 1.9. A pontonkénti konvergenciából nem következik az egyenletes konvergencia. Tekintsük az $f_n(x) = x^n$ függvényeket, ahol $x \in [0,1]$. Ekkor $[f_n]$ pontonként tart ahhoz az $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ függvényhez, ami 0 ha $x \in [0,1)$ és $f(1) = 1$. De $[f_n]$ nem tart f-hez egyenletesen, mert minden n-re és $0 \le x < 1$-re az

$$|f_n(x) - f(x)| = |x^n - 0| = x^n$$

szám tetszőlegesen közel van 1-hez ha x elég közel van 1-hez. Azt is megfigyelhetjük, hogy az f_n függvények folytonosak $[0,1]$-en, de f nem folytonos $[0,1]$-en. Később látni fogjuk, hogy ha folytonos függvények egyenletesen tartanak egy függvényhez, akkor az is folytonos kell legyen.

Példa 1.10. Legyenek az $f_n(x) = x^n$ függvények $\mathbb{R}$-en értelmezve. Ekkor az $f_n|_{(-1,1]}$ megszorításokból álló függvénysorozat pontonként konvergens $(-1,1]$-en. Ugyanakkor minden $\delta > 0$-ra az $f_n|_{[-1+\delta,1-\delta]}$ megszorítások egyenletesen konvergálnak az azonosan 0 függvényhez a $[-1+\delta, 1-\delta]$ halmazon.

Példa 1.11. Legyen $X = [0, \infty)$ és legyenek az X-en értelmezett f_n függvények az

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2}$$

formulával definiálva.

Ekkor $[f_n]$ tart az azonosan 0 függvényhez pontonként az X-en. De $[f_n]$ nem konvergál egyenletesen, mert például $f_n(1/n) = 1/2$ minden $n \in \mathbb{N}$-re.

Állítás 1.12. *Tegyük fel, hogy $f_n \to f$ pontonként X-en. Legyen rögzített $x \in X$-hez és $\varepsilon > 0$-hoz $N(\varepsilon, x)$ a legkisebb olyan természetes szám amire ha $n > N(\varepsilon, x)$, akkor*

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Ekkor $f_n \to f$ egyenletesen $\iff$ minden $\varepsilon > 0$-ra $\sup_{x \in X}\{N(\varepsilon, x)\} < \infty$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $f_n \to f$ egyenletesen. Legyen $x_0 \in X$ és $\varepsilon > 0$, ekkor van a feltételeknek megfelelő $N(\varepsilon, x_0)$, de az egyenletes konvergencia miatt van olyan $M(\varepsilon) \in \mathbb{R}$ is hogy minden $x \in X$-re

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

ha $n > M(\varepsilon)$, speciálisan x_0-ra is. Ezért $N(\varepsilon, x_0) \leq M(\varepsilon)$, tehát

$$\sup_{x \in X}\{N(\varepsilon, x)\} \leq M(\varepsilon) < \infty.$$

Most tegyük fel, hogy $\varepsilon > 0$ és $\sup_{x \in X}\{N(\varepsilon, x)\} < \infty$. Legyen $M(\varepsilon) = \sup_{x \in X}\{N(\varepsilon, x)\}$. Emiatt ha $n > M(\varepsilon)$, akkor minden $x \in X$-re $n > N(\varepsilon, x)$ tehát minden $x \in X$-re $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. $\square$

Az előbbi 1.12 állításból egyszerűen adódik a következő.

Állítás 1.13. *Tegyük fel, hogy $f_n \to f$ pontonként X-en. Legyenek valamilyen $k \in \mathbb{N}$-re $A_1, \ldots, A_k$ olyan X-beli halmazok, hogy*

$$\bigcup_{i=1}^{k} A_i = X.$$

Ha minden $i = 1, \ldots, k$-ra $f_n \to f$ egyenletesen az A_i halmazon, akkor $f_n \to f$ egyenletesen az egész X-en is.

Bizonyítás. Az 1.12 állítás szerint minden $\varepsilon > 0$-ra és minden $i = 1, \ldots, k$-ra $\sup_{x \in A_i}\{N(\varepsilon, x)\} < K_i$ valamilyen $K_i \in \mathbb{R}$-el. De mivel

$$\sup_{x \in X}\{N(\varepsilon, x)\} \leq \max_{1 \leq i \leq k}\{K_i\},$$

ezért $\sup_{x \in X}\{N(\varepsilon, x)\} < \infty$. $\square$

2. Adott tulajdonsággal rendelkező függvényekből álló függvénysorozatok

A következőkben azzal a problémával foglalkozunk, hogy ha az X-en értelmezett $[f_n]$ függvénysorozat tagjai mind rendelkeznek egy adott tulajdonsággal és $[f_n]$ tart f-hez X-en, akkor az f függvény rendelkezik-e ezzel a tulajdonsággal.

2.1. Folytonos függvények.

Tétel 2.1. *Legyen $X \subseteq \mathbb{R}$. Ha az $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ függvények folytonosak és egyenletesen tartanak egy $f\colon X \to \mathbb{R}$ függvényhez, akkor f is folytonos.*

Bizonyítás. Elég megmutatni, hogy ha $x_0 \in X$ tetszőleges pont, akkor f folytonos x_0-ban. Legyen $\varepsilon > 0$ rögzített, ekkor kell találni x_0-nak egy olyan U_{x_0} nyílt környezetét, hogy ha $x \in U_{x_0} \cap X$, akkor $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Legyenek $x \in X$ es $n \in \mathbb{N}$ tetszőlegesek. Ekkor

$$f(x) - f(x_0) = f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0),$$

tehát

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|.$$

Mivel $f_n \to f$ egyenletesen X-en, ezért az előbb rögzített ε-hoz létezik $N(\varepsilon)$ hogy minden $n \geq N(\varepsilon)$-ra és $x \in X$-re $|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Emiatt

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{2\varepsilon}{3} + |f_{N(\varepsilon)}(x) - f_{N(\varepsilon)}(x_0)|$$

is teljesül minden $x \in X$-re.

Mivel az $f_{N(\varepsilon)}$ függvény is folytonos, ezért $\frac{\varepsilon}{3}$-hoz létezik olyan U_{x_0} környezet, hogy minden $x \in U_{x_0} \cap X$-re $|f_{N(\varepsilon)}(x) - f_{N(\varepsilon)}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

De akkor minden $x \in U_{x_0} \cap X$-re

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

tehát az f függvény folytonos x_0-ban. □

Megjegyzés 2.2. A bizonyításból az is látszik, hogy ha csak annyit teszünk fel, hogy az f_n-ek folytonosak egy x_0 pontban és $f_n \to f$ egyenletesen, akkor abból következik, hogy f is folytonos x_0-ban.

2.2. Riemann integrálható függvények.

Emlékeztetünk, hogy egy $[a,b]$ kompakt intervallumon értelmezett $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor Riemann integrálható, ha korlátos és minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan felosztása az $[a,b]$ intervallumnak $I_1, \dots I_n$ részintervallumokra, hogy

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda(I_k) \sup_{x,y \in I_k} \{|f(x) - f(y)|\} < \varepsilon,$$

ahol $\lambda(I_k)$ jelöli az I_k intervallum hosszát.

Tétel 2.3. *Az $[f_n]$ függvénysorozat minden tagja Riemann-integrálható $[a,b]$-n és $f_n \to f$ egyenletesen $[a,b]$-n $\Longrightarrow$ f is Riemann-integrálható $[a,b]$-n és*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f.$$

Bizonyítás. Tetszőleges $N \in \mathbb{N}$-re

$$|f(x) - f(y)| \le |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(y)| + |f_N(y) - f(y)|.$$

Mivel $f_n \to f$ egyenletesen $[a,b]$-n, ezért minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $N(\varepsilon)$, hogy minden $n \ge N(\varepsilon)$-re és $x \in [a,b]$-re $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$.

Ezekből következik, hogy ha J egy tetszőleges részintervalluma $[a,b]$-nek, akkor minden $x, y \in J$-re

$$|f(x) - f(y)| < 2\varepsilon + |f_{N(\varepsilon)}(x) - f_{N(\varepsilon)}(y)|.$$

De ekkor

$$\sup_{x,y\in J} \{|f(x) - f(y)|\} \le 2\varepsilon + \sup_{x,y \in J} \{|f_{N(\varepsilon)}(x) - f_{N(\varepsilon)}(y)|\} \tag{2.1}$$

is teljesül. Ebből a $J = [a,b]$ választással könnyen látszik az is, hogy f korlátos, mert $f_{N(\varepsilon)}$ korlátos hiszen Riemann integrálható.

Mivel az $f_{N(\varepsilon)}$ függvény Riemann integrálható $[a,b]$-n, ezért van olyan $I_1, \dots, I_n$ felosztása az $[a,b]$ intervallumnak, hogy

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda(I_k) \sup_{x,y\in I_k} \{|f_{N(\varepsilon)}(x) - f_{N(\varepsilon)}(y)|\} < \varepsilon.$$

De ekkor (2.1) miatt

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda(I_k) \sup_{x,y\in I_k} \{|f(x) - f(y)|\} \le \sum_{k=1}^{n} \lambda\left(I_k\right) \left(2\varepsilon + \sup_{x,y\in I_k} \{|f_{N(\varepsilon)}(x) - f_{N(\varepsilon)}(y)|\}\right) =$$

$$(b-a)2\varepsilon + \sum_{k=1}^{n} \lambda(I_k) \sup_{x,y\in I_k} \{|f_{N(\varepsilon)}(x) - f_{N(\varepsilon)}(y)|\} < (b-a)2\varepsilon + \varepsilon = \varepsilon\left(2(b-a)+1\right),$$

ami azt mutatja, hogy f is Riemann integrálható.

Meg kell még mutatnunk, hogy $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n = \int_a^b f$. Mivel $f_n \to f$ egyenletesen az $[a,b]$ intervallumon, ezért az

$$n \mapsto \sup_{x\in[a,b]} \{|f(x) - f_n(x)|\}$$

számsorozat 0-hoz tart ha $n\to\infty$. Ezért

$$\left|\int_a^b f - \int_a^b f_n\right| = \left|\int_a^b (f-f_n)\right| \le \int_a^b |f-f_n| \le (b-a)\sup_{x\in[a,b]}\{|f(x)-f_n(x)|\} \to 0$$

ha $n\to\infty$. Tehát $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n = \int_a^b f$. □

Példa 2.4. Ha az f_n függvények Riemann integrálhatók és $f_n \to f$ pontonként, abból nem következik, hogy f is Riemann integrálható, még akkor se ha f korlátos. Például legyen $f(x) = 1$ ha $x\in[0,1]$ racionális és $f(x) = 0$ ha $x \in [0,1]$ irracionális. Ez az f függvény nem Riemann integrálható, de mivel csak megszámlálható sok racionális szám van, ezért könnyen konstruálhatunk olyan Riemann integrálható függvényekből álló $[0,1]$-en értelmezett f_n függvénysorozatot, amelyik pontonként tart f-hez. Ugyanis rendezzük sorozatba a $[0,1]$-beli racionális számokat, legyen ez a számsorozat $[a_n]$. Ekkor legyen $f_n(x) = 1$ ha $x\in\{a_1,\dots,a_n\}$, és $f_n(x) = 0$ különben. Ezek az f_n függvények Riemann integrálhatók, mert korlátosak és csak véges sok szakadási pontjuk van, és nyilván pontonként, de nem egyenletesen konvergálnak f-hez.

Példa 2.5. Olyan Riemann integrálható $[a,b]$-n értelmezett függvényekből álló $[f_n]$ függvénysorozat is létezik, ami nem konvergál egyenletesen, hanem csak pontonként egy Riemann integrálható f függvényhez, mégis $\int_a^b f_n \to \int_a^b f$ ha $n\to\infty$. Például legyen $[a,b] = [0,1]$ és $f_n(x) = x^n$. Ekkor f_n csak pontonként tart az f függvényhez, ahol $f(x) = 0$ ha $0 \le x < 1$ és $f(1) = 1$. Ugyanakkor

$$\int_0^1 x^n \mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1} \to 0$$

ha $n\to\infty$ és persze az is igaz, hogy

$$\int_0^1 f = 0.$$

Példa 2.6. Konstruálhatunk olyan Riemann integrálható és folytonos $[0,1]$-en értelmezett nemnegatív függvényekből álló $[f_n]$ függvénysorozatot is, ami pontonként tart az azonosan 0 függvényhez, aminek persze 0 a Riemann integrálja, de

$$\int_0^1 f_n \to \alpha,$$

ahol α előre adott akármilyen $0<\alpha\in\mathbb{R}$ vagy ahol $\alpha=\infty$.

Abban az esetben, ha $0<\alpha\in\mathbb{R}$, akkor legyen

$$f_n(x) = 4\alpha n^2 x$$

ha $0 \le x \le \frac{1}{2n}$, legyen

$$f_n(x) = -4\alpha n^2 \left(x - \frac{1}{n}\right)$$

ha $\frac{1}{2n} \le x \le \frac{1}{n}$ és legyen

$$f_n(x) = 0$$

ha $x \ge 1/n$. Ekkor f_n folytonos függvény, $\int_0^1 f_n = \alpha$, de $[f_n]$ pontonként tart az azonosan 0 függvényhez, aminek persze 0 az integrálja.

Ha meg $\alpha = \infty$, akkor az előbbi $4\alpha n^2 x$ és $-4\alpha n^2 \left(x - \frac{1}{n}\right)$ helyett

$$2n^3 x\text{-et}$$

és

$$-2n^3 \left(x - \frac{1}{n}\right)\text{-et}$$

véve $\int_0^1 f_n = \frac{n}{2}$ ami persze tart ∞-hez, de megint csak $[f_n]$ pontonként tart 0-hoz.

2.3. Differenciálható függvények.

A Riemann integrál után a deriválhatóságot is megvizsgáljuk. Meglepő módon nem a függvénysorozat egyenletes konvergenciája lesz fontos, hanem a deriváltfüggvények egyenletes konvergenciája. Sőt, a függvénysorozat konvergenciáját elég csak egyetlen egy pontban feltenni.

Emlékeztetünk, hogy egy f függvényt akkor nevezünk differenciálhatónak egy $[a, b]$ kompakt intervallumon, ha $a \neq b$, az f differenciálható az (a, b) nyílt intervallumon és f balról ill. jobbról differenciálható a-ban ill. b-ben.

Példa 2.7. Nem nehéz példát mutatni olyan $[-1, 1]$-en értelmezett $[f_n]$ függvénysorozatra, ami az $f(x) = |x|$ függvényhez egyenletesen konvergál $[-1, 1]$-en, de az f_n függvények mindenütt differenciálhatók. Legyen ugyanis

$$f_n(x) = \sqrt{\frac{1}{n} + x^2}$$

ha $-1 \le x \le 1$. Ekkor nem nehéz belátni, hogy $f_n \to f$ egyenletesen és nyilvánvalóan mindegyik f_n differenciálható, míg az f függvény nem differenciálható a 0-ban.

Tétel 2.8. *Tegyük fel, hogy*

- *az f_n függvények folytonosan differenciálhatók a kompakt $[a, b]$ intervallumon,*
- *egy valamilyen $x_0 \in [a, b]$-re az $[f_n(x_0)]$ számsorozat konvergens és*
- *az f_n' deriváltfüggvények egyenletesen tartanak valamihez az $[a, b]$ intervallumon.*

Ekkor $[f_n]$ egyenletesen tart az $[a,b]$-n valamilyen folytonosan differenciálható

$$f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$$

függvényhez és $[f_n']$ is egyenletesen tart az $[a,b]$-n f'-hoz.

Bizonyítás. A tétel feltételei szerint az f_n' deriváltfüggvények egyenletesen tartanak valamilyen $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ függvényhez. Mivel az f_n' függvények folytonosak, ezért a 2.1 tétel szerint g is folytonos $[a,b]$-n. Legyen

$$G(x) = \int_{x_0}^{x} g$$

a g egy integrálfüggvénye. A G deriválható $[a,b]$-n, mert g ott folytonos, és $G' = g$.

Jelölje $\alpha \in \mathbb{R}$ az $[f_n(x_0)]$ számsorozat határértékét. Legyen az $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény úgy definiálva, hogy

$$f(x) = \alpha + G(x).$$

Ekkor f differenciálható $[a,b]$-n és $f' = g$, ezért f folytonosan differenciálható $[a,b]$-n. Az is teljesül, hogy $f(x_0) = \alpha$.

Mivel $f' = g$, ezért nyilván $[f_n']$ egyenletesen tart f'-hoz. Meg kell még mutatnunk, hogy $[f_n]$ egyenletesen tart az f-hez. Az f_n' függvények folytonosak és így Riemann integrálhatóak, ezért a Newton-Leibniz szabály alapján minden $x \in [a,b]$-re

$$\int_{x_0}^{x} f_n' = f_n(x) - f_n(x_0),$$

tehát

$$f_n(x) = \int_{x_0}^{x} f_n' + f_n(x_0).$$

Ugyanakkor $f(x) = \alpha + \int_{x_0}^{x} g$, és ezekből az következik, hogy minden $x \in [a,b]$-re

$$|f(x) - f_n(x)| \le |\alpha - f_n(x_0)| + \left| \int_{x_0}^{x} (g - f_n') \right| \le |\alpha - f_n(x_0)| + \int_{x_0}^{x} |g - f_n'| .$$

Mivel

$$\int_{x_0}^{x} |g - f_n'| \le \int_{a}^{b} |g - f_n'| \le (b-a) \sup_{x \in [a,b]} \{|g - f_n'\}$$

ezért az

$$\varepsilon_n = |\alpha - f_n(x_0)| + (b-a) \sup_{x \in [a,b]} \{|g - f_n'\}$$

jelöléssel

$$|f(x) - f_n(x)| \le \varepsilon_n$$

minden $x \in [a,b]$-re. Nyilván az $[\varepsilon_n]$ számsorozat 0-hoz tart ha $n \to \infty$, így $[f_n]$ egyenletesen tart az f-hez. $\square$

Az előző tételt kicsit átfogalmazva egyszerűen kapjuk a következő állítást.

Tétel 2.9. *Tegyük fel, hogy*

- *az f_n függvények folytonosan differenciálhatók a kompakt $[a, b]$ intervallumon,*
- *az $[f_n]$ függvénysorozat pontonként konvergál egy f függvényhez az $[a, b]$ intervallumon és*
- *az f_n' deriváltfüggvények egyenletesen tartanak valamihez az $[a, b]$ intervallumon.*

Ekkor f folytonosan differenciálható, $[f_n]$ egyenletesen tart f-hez és $[f_n']$ is egyenletesen tart f'-hoz.

Bizonyítás. Az előbbi 2.8 tétel szerint (mivel $[f_n]$ konvergens valamilyen $x_0 \in [a, b]$ pontban) az $[f_n]$ függvénysorozat egyenletesen tart valamilyen folytonosan differenciálható függvényhez, de akkor pontonként is. Ebből nyilván következik, hogy ez a függvény az f, mert a határérték mindig egyértelmű ha létezik. Ebből következnek a tétel állításai. □

2.4. Függvénysorok.

Definíció 2.10 (Függvénysor). Legyen $X \subseteq \mathbb{R}$. Az olyan $[s_n]$ függvénysorozatot, amelyik

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$$

alakú, ahol minden $k \in \mathbb{N}$-re $f_k : X \to \mathbb{R}$ egy X-en értelmezett függvény, X-en értelmezett függvénysornak nevezzük. Ilyenkor az $[s_n]$ függvénysorozatot $\sum f_n$-el vagy $\sum_{n \geq 0} f_n$-el, esetleg értelemszerűen $\sum_{n \geq \mu} f_n$-el is[2] jelöljük. Ha egy X-en értelmezett $\sum f_n$ függvénysor konvergens az X halmazon, akkor azt a $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$-el jelölt függvényt, amelyik egy $x \in X$ ponthoz a $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ numerikus sor határértékét rendeli, a függvénysor összegfüggvényének nevezzük.

Megjegyzés 2.11. Gyakran az f_n függvényeket egyszerűbb csak valamilyen x-től függő formulával megadni. Ilyenkor a függvénysort szokás x-től függő formulával megadni, például $\sum x^n$, $\sum \sin(x)$, $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n!}$, stb. Hogy ez mikor jelöl mégis numerikus sort (valamilyen x értékre) és mikor valamilyen függvénysort, arra esetenként felhívjuk a figyelmet, amikor ez nehezen érthető vagy fontos különbséget tenni.

Megjegyzés 2.12. Az eddig függvénysorozatokra bizonyított tételek nyilván függvénysorokra is érvényesek. Megfogalmazzuk a legfontosabb tételeket, amelyek egyszerű következményei a függvénysorozatokra vonatkozó megfelelő tételeknek.

Tétel 2.13. *Ha az $f_n : X \to \mathbb{R}$ függvények folytonosak és a $\sum f_n$ függvénysor egyenletesen konvergens, akkor a $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ függvény is folytonos.*

---

[2] Ahol $0 \leq \mu \in \mathbb{N}$ egy rögzített egész szám.

Tétel 2.14. *Legyen $[a,b]$ egy kompakt intervallum. Ha az $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ függvények Riemann integrálhatók és $\sum f_n$ egyenletesen tart f-hez, akkor f is Riemann integrálható és $\int_a^b f = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n$.*

Tétel 2.15. *Legyen $[a,b]$ egy kompakt intervallum. Ha az $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ függvények folytonosan differenciálhatók $[a,b]$-n, a $\sum f_n$ függvénysor konvergens és a $\sum f_n'$ függvénysor egyenletesen konvergens, akkor az $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ függvény is folytonosan differenciálható és $f' = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'$.*

3. Cauchy kritérium és Weierstrass féle egyenletes konvergencia tétel

Állítás 3.1. *Az $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ függvényekből álló $[f_n]$ függvénysorozat pontonként konvergens $\iff$ $[f_n]$ pontonként Cauchy sorozat.*

Bizonyítás. Minden $x \in X$-re az $[f_n(x)]$ számsorozat pontosan akkor konvergens, ha Cauchy sorozat. Ebből nyilvánvalóan következik az állítás. □

Megjegyzés 3.2. Ugyanez a tétel érvényes függvénysorokra is.

Állítás 3.3. *Az $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ függvényekből álló $[f_n]$ függvénysorozat egyenletesen konvergens $\iff$ minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy bármilyen $n,m \geq N$ esetén minden $x \in X$-re $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az $[f_n]$ függvénysorozat egyenletesen tart az f függvényhez. Ekkor minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy bármilyen $n,m \geq N$ esetén minden $x \in X$-re
$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$
és
$$|f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$
De ekkor minden $x \in X$-re
$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f(x)| + |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$
amiből következik az állítás.

Ha meg azt tesszük fel, hogy minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy bármilyen $n,m \geq N(\varepsilon)$ esetén minden $x \in X$-re $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$, akkor mivel ezek szerint minden $x \in X$-re az $[f_n(x)]$ számsorozat Cauchy sorozat, ebből következik, hogy minden $x \in X$-re az $[f_n(x)]$ számsorozat konvergens. Jelölje a határértéket $f(x)$.

Ekkor az
$$m \mapsto |f_m(x) - f_n(x)|$$

számsorozat konvergens ha $m \to \infty$ és a határértéke $|f(x) - f_n(x)|$.

De akkor a feltétel szerint létező $N(\varepsilon)$-ra fennáll, hogy minden $x \in X$-re és $n \geq N(\varepsilon)$-ra $|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$, ami azt jelenti, hogy az $[f_n]$ függvénysorozat egyenletesen tart az f függvényhez. □

Állítás 3.4. *Legyenek $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ adott függvények. A $\sum f_n$ függvénysor egyenletesen konvergens $\iff$ minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy bármilyen $n \geq N$ és $p \in \mathbb{N}$ esetén minden $x \in X$-re $|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)| < \varepsilon$.*

Bizonyítás. Következik az előző 3.3 állításból, ha $m = n + p$. □

Tétel 3.5 (Weierstrass kritérium). *Legyen $[f_n]$ egy függvénysorozat. Ha valamilyen $\sum a_n$ konvergens nemnegatív tagú sorral minden $x \in X$-re és $n \in \mathbb{N}$-re teljesül, hogy $|f_n(x)| \leq a_n$, akkor a $\sum f_n$ függvénysor egyenletesen konvergens.*

Bizonyítás. Ha a $\sum a_n$ sor konvergens, akkor az is teljesül, hogy minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy bármilyen $n \geq N$ és $p \in \mathbb{N}$ esetén $\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon$.

De mivel akkor minden $x \in X$-re

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon,$$

ezért az előző 3.4 állítás szerint a $\sum f_n$ függvénysor egyenletesen konvergens. □

Példa 3.6. A Weierstrass kritérium alapján a

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sin nx}{n^{3/2}}$$

függvénysor egyenletesen konvergens az egész $\mathbb{R}$-en, mert minden $x \in \mathbb{R}$-re

$$\left| \frac{\sin nx}{n^{3/2}} \right| \leq \frac{1}{n^{3/2}}$$

és a

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{3/2}}$$

sor konvergens.

4. Abel és Dirichlet féle egyenletes konvergencia tétel

A következőkben $\sum f_n g_n$ alakú függvénysorok egyenletes konvergenciájával foglalkozunk, ahol $[f_n]$ pontonként monoton függvénysorozat.

Lemma 4.1. *Legyen* $p \in \mathbb{N}$ *és* $a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_p \in \mathbb{R}$. *Legyen* $B_i = b_1 + \cdots + b_i$, $1 \le i \le p$. *Ekkor*

$$\sum_{i=1}^{p} a_i b_i = a_p B_p + \sum_{i=1}^{p-1} (a_i - a_{i+1}) B_i.$$

Bizonyítás. Legyen $B_0 = 0$. Ekkor

$$\sum_{i=1}^{p} a_i b_i = \sum_{i=1}^{p} a_i (B_i - B_{i-1}) = \sum_{i=1}^{p} a_i B_i - \sum_{i=1}^{p} a_i B_{i-1} = \sum_{i=1}^{p} a_i B_i - \sum_{i=0}^{p-1} a_{i+1} B_i =$$

$$a_p B_p + \sum_{i=1}^{p-1} (a_i - a_{i+1}) B_i.$$

□

Lemma 4.2. *Legyen* $p \in \mathbb{N}$ *és* $a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_p \in \mathbb{R}$. *Legyen* $B_i = b_1 + \cdots + b_i$, $1 \le i \le p$. *Tegyük fel, hogy az* a_i*-k monoton sorozatot alkotnak* $i = 1, \ldots, p$*-re, és tegyük fel, hogy létezik olyan* $0 < A, B \in \mathbb{R}$, *hogy* $|a_i| \le A$ *és* $|B_i| \le B$ *minden* $i = 1, \ldots, p$*-re. Ekkor*

$$\left| \sum_{i=1}^{p} a_i b_i \right| \le 3AB.$$

Bizonyítás. Az előző 4.1 lemmát felhasználva

$$\left| \sum_{i=1}^{p} a_i b_i \right| = \left| a_p B_p + \sum_{i=1}^{p-1} (a_i - a_{i+1}) B_i \right| \le AB + B \sum_{i=1}^{p-1} |a_i - a_{i+1}|.$$

Mivel az $a_i - a_{i+1}$-ek egyező előjelűek, ezért

$$AB + B \sum_{i=1}^{p-1} |a_i - a_{i+1}| = AB + B \left| \sum_{i=1}^{p-1} a_i - a_{i+1} \right| = AB + B|a_1 - a_p| \le 3AB.$$

□

Definíció 4.3 (Egyenletesen korlátos függvénysorozat). Legyen $X \subseteq \mathbb{R}$. Az X-en értelmezett $[f_n]$ függvénysorozat egyenletesen korlátos az X-en, ha létezik olyan $K \in \mathbb{R}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$-re és $x \in X$-re $|f_n(x)| \le K$.

Tétel 4.4 (Abel féle egyenletes konvergencia tétel). *Ha az* $[f_n]$ *függvénysorozat pontonként monoton és egyenletesen korlátos* X*-en, a* $\sum g_n$ *függvénysor meg egyenletesen konvergens* X*-en, akkor a* $\sum f_n g_n$ *függvénysor egyenletesen konvergens* X*-en.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az $[f_n]$ függvénysorozat egyenletesen korlátos egy $0 \le K \in \mathbb{R}$-el. Ekkor a $\sum g_n$ egyenletes konvergenciája miatt minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \geq N$-re, $p \in \mathbb{N}$-re és $x \in X$-re

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} g_k(x) \right| < \frac{\varepsilon}{3K}.$$

Ezért az előző 4.2 lemma alapján minden $n \geq N$-re, $p \in \mathbb{N}$-re és $x \in X$-re

$$\left| \sum_{i=n+1}^{n+p} f_i(x) g_i(x) \right| \leq 3K \frac{\varepsilon}{3K} = \varepsilon.$$

Tehát a $\sum f_n g_n$ függvénysor egyenletesen konvergens. □

Tétel 4.5 (Dirichlet féle egyenletes konvergencia tétel). *Ha az $[f_n]$ függvénysorozat pontonként monoton és egyenletesen tart 0-hoz X-en, a $\sum g_n$ függvénysor egyenletesen korlátos X-en, akkor a $\sum f_n g_n$ függvénysor egyenletesen konvergens X-en.*

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$. Mivel $[f_n]$ egyenletesen tart 0-hoz, ezért létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \geq N$-re és $x \in X$-re $|f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{6K}$. Ugyanakkor minden $1 \leq j \leq p$-re

$$\left| \sum_{i=n+1}^{n+j} g_i(x) \right| = \left| \sum_{i=1}^{n+j} g_i(x) - \sum_{i=1}^{n} g_i(x) \right| \leq \left| \sum_{i=1}^{n+j} g_i(x) \right| + \left| \sum_{i=1}^{n} g_i(x) \right| \leq 2K.$$

Most alkalmazzuk a 4.2 lemmát tetszőleges $n \geq N$, $p \in \mathbb{N}$ és $x \in X$ mellett

$$f_{n+1}(x), \ldots, f_{n+p}(x), g_{n+1}(x), \ldots, g_{n+p}(x)\text{-re.}$$

Ekkor

$$\left| \sum_{i=n+1}^{n+p} f_i(x) g_i(x) \right| \leq 3 \frac{\varepsilon}{6K} 2K = \varepsilon.$$

□

Példa 4.6. Azt már láttuk, hogy a

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sin nx}{n^{3/2}}$$

függvénysor egyenletesen konvergens az egész $\mathbb{R}$-en. Ha $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^{3/2}}$ az összegfüggvény, akkor az f függvény folytonos, de felmerül a kérdés, hogy az f differenciálható-e? Az eddigi tételeink alapján elég azt bebizonyítani, hogy a tagonkénti differenciálással nyert

$$\sum_{n \geq 1} \frac{n \cos nx}{n^{3/2}} = \sum_{n \geq 1} \frac{\cos nx}{n^{1/2}}$$

függvénysor egyenletesen konvergens. A Weierstrass kritérium itt nem használható, mert a $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{1/2}}$ sor divergens. De a Dirichlet féle egyenletes konvergencia tételből könnyen látszik, hogy $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos nx}{n^{1/2}}$ egyenletesen konvergens minden $[\delta, 2\pi - \delta]$ intervallumon, ahol $\delta > 0$ akármilyen szám. Ebből következik, hogy f differenciálható legalábbis a $(0, 2\pi)$ intervallumon.

Ahhoz, hogy a Dirichlet féle egyenletes konvergencia tételt használhassuk, gondoljuk meg a következőket. Mivel az $1/n^{1/2}$ sorozat monoton és tart a 0-hoz, elég azt belátni, hogy a $\sum_{n\geq 1}\cos nx$ függvénysor egyenletesen korlátos.

Lemma 4.7. *Minden* $x \in (0, 2\pi)$*-re*

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right| \leq \frac{1}{\sin\frac{x}{2}}.$$

Bizonyítás.

$$2\sin\frac{x}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos(kx) = \sum_{k=1}^{n}2\sin\frac{x}{2}\cos(kx) = \sum_{k=1}^{n}\sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right) - \sin\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right),$$

mert

$$2\cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)$$

teljesül minden $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$-re. De

$$\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right) - \sin\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right) = \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right) - \sin\frac{x}{2}$$

és így

$$\sum_{k=1}^{n}\cos(kx) = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}$$

ha $x \in (0, 2\pi)$. Ebből azt kapjuk, hogy

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right| = \left|\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}\right| \leq \left|\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\frac{x}{2}}\right| + \frac{1}{2} \leq$$

$$\left|\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\frac{x}{2}}\right| + \frac{1}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|} \leq \frac{1}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|} + \frac{1}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|} = \frac{1}{\sin\frac{x}{2}}.$$

□

Ebből már következik, hogy akármilyen $\delta > 0$-ra minden $x \in [\delta, 2\pi - \delta]$ esetén

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right| \leq \frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}.$$

Tehát a $\sum_{n\geq 1}\cos nx$ sor egyenletesen korlátos a $[\delta, 2\pi - \delta]$ intervallumon és így a Dirichlet féle egyenletes konvergencia tétel miatt az

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^{3/2}}$$

függvény differenciálható a $[\delta, 2\pi-\delta]$ intervallumon, de akkor a $(0, 2\pi)$ intervallumon is.

5. Hatványsorok

5.1. Hatványsor konvergencia halmaza.

Definíció 5.1 (Hatványsor és konvergencia sugár). Legyen $[a_n]_{n\geq 0}$ egy számsorozat és $x_0 \in \mathbb{R}$. Ha $[f_n]_{n\geq 0}$ egy olyan, az egész $\mathbb{R}$-en értelmezett függvénysorozat, ahol $f_n(x) = a_n(x-x_0)^n$, akkor az

$$\sum_{n\geq 0} f_n$$

függvénysort hatványsornak nevezzük és általában

$$\sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n\text{-el}$$

jelöljük. Legyen

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\left(|a_n|^{1/n}\right)}$$

ha $0 < \limsup_{n\to\infty}\left(|a_n|^{1/n}\right) \in \mathbb{R}$, legyen

$$R = \infty$$

ha $\limsup_{n\to\infty}\left(|a_n|^{1/n}\right) = 0$ és legyen

$$R = 0$$

ha $\limsup_{n\to\infty}\left(|a_n|^{1/n}\right) = \infty$. Ekkor R-et a $\sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$ hatványsor konvergencia sugarának nevezzük.

Megjegyzés 5.2. Mivel 0^0 definíció szerint 1, és $0^n = 0$ ha $n \geq 1$, ezért egy hatványsor mindig konvergens az x_0 pontban és a határértéke a $\sum_{n\geq 0} a_n(x_0-x_0)^n = \sum_{n\geq 0} a_n 0^n$ numerikus sornak a_0.

Fontos kérdés, hogy milyen $t \in \mathbb{R}$ számokra konvergens a $\sum_{n\geq 0} a_n(t-x_0)^n$ numerikus sor. A következő tétel miatt használjuk a konvergencia sugár elnevezést.

Tétel 5.3. *Legyen $\sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$ egy hatványsor. Ha $t \in \mathbb{R}$ olyan, hogy $|t-x_0| < R$, akkor a $\sum_{n\geq 0} a_n(t-x_0)^n$ numerikus sor abszolút konvergens. Ha pedig $|t-x_0| > R$, akkor divergens.*

Bizonyítás. Ha

$$0 < \limsup\left(|a_n|^{1/n}\right) \in \mathbb{R},$$

akkor $|t-x_0| < R$ esetén

$$\limsup\left(|a_n(t-x_0)^n|^{1/n}\right) = |t-x_0| \limsup\left(|a_n|^{1/n}\right) = |t-x_0|/R < 1,$$

ezért a Cauchy gyökkritérium miatt a $\sum_{n\geq 0} a_n |t-x_0|^n$ numerikus sor konvergens. Hasonlóan kapjuk, hogy $|t-x_0| > R$ esetén divergens.

Ha
$$\limsup \left(|a_n|^{1/n}\right) = 0,$$
akkor minden $t \in \mathbb{R}$-re
$$\limsup \left(|a_n (t - x_0)^n|^{1/n}\right) = |t - x_0| \limsup \left(|a_n|^{1/n}\right) = 0 < 1,$$
ezért megint a Cauchy gyökkritérium miatt a $\sum_{n\geq 0} a_n |t - x_0|^n$ numerikus sor konvergens.

Ha pedig
$$\limsup \left(|a_n|^{1/n}\right) = \infty,$$
akkor minden rögzített $|t - x_0| > 0$ esetén
$$\limsup \left(|a_n (t - x_0)^n|^{1/n}\right) = \limsup \left(|a_n|^{1/n} |t - x_0|\right) = \infty,$$
tehát megint a Cauchy gyökkritérium miatt a $\sum_{n\geq 0} a_n |t - x_0|^n$ numerikus sor divergens. □

Definíció 5.4 (Konvergencia intervallum). Ezek szerint azok a $t \in \mathbb{R}$ számok, amikre a $\sum_{n\geq 0} a_n(t - x_0)^n$ numerikus sor konvergens, egy intervallumot alkotnak. Ezt az intervallumot a hatványsor konvergencia intervallumának (vagy konvergencia halmazának) nevezzük és K-val jelöljük.

Megjegyzés 5.5. Ha $0 < R \in \mathbb{R}$, akkor
$$(x_0 - R, x_0 + R) \subseteq K \subseteq [x_0 - R, x_0 + R].$$
Lehet, hogy K tartalmazza az $x_0 - R$ vagy $x_0 + R$ határpontokat, de az is lehet, hogy nem. Ha $R = 0$, akkor
$$K = \{x_0\}.$$
Ha pedig $R = \infty$, akkor
$$K = \mathbb{R}.$$

Példa 5.6. A
$$\sum_{n\geq 0} x^n, \quad \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}, \quad \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+1} x^{n+1}, \quad \text{és} \quad \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+1)^2} x^{n+1}$$
hatványsorok konvergencia intervallumai $(-1, 1)$, $(-1, 1]$, $[-1, 1)$ es $[-1, 1]$. A konvergencia sugara mindegyiknek 1.

Példa 5.7. Az előző tétel csak az $(x_0 - R, x_0 + R)$ nyílt intervallumban mondja meg, hogy ott a hatványsor abszolút konvergens. Az $x_0 \pm R$ pontokban a hatványsor lehet abszolút konvergens, feltételesen konvergens vagy divergens is. Például
$$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$$
csak feltételesen konvergens az $x = 1$ pontban, de
$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+1)^2} x^{n+1}$$
abszolút konvergens $x = \pm 1$-ben.

Egy függvénysor egyenletes konvergenciájának bizonyításához a Weierstrass kritérium és az Abel illetve Dirichlet féle egyenletes konvergencia tételek adnak eszközt. Próbáljuk ezekkel megvizsgálni, hogy egy hatványsor konvergens-e az $x_0 \pm R$ határpontokban. A Weierstrass kritériummal a következő tételt egyszerűen tudjuk bizonyítani.

Tétel 5.8. *Legyen $A \subseteq K$ az a halmaz, ahol a hatványsor abszolút konvergens. Ekkor a hatványsor az A intervallum bármely kompakt részintervallumán egyenletesen konvergens.*

Bizonyítás. Legyen $x_0 \in \mathbb{R}$ és $0 \neq r \in \mathbb{R}$. Jelölje $I_r(x_0)$ az $[x_0, x_0 + r]$ intervallumot ha $r > 0$ és az $[x_0 + r, x_0]$ intervallumot ha $r < 0$. Az 1.13 állítás alapján elég belátni, hogy ha egy hatványsor abszolút konvergens az $x_0 + r$ pontban, akkor a hatványsor egyenletesen konvergens az $I_r(x_0)$ intervallumban. A $\sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$ hatványsor az x_0+r pontban egyenő a $\sum_{n\geq 0} a_n r^n$ numerikus sorral. Ha a $\sum_{n\geq 0} |a_n||r|^n$ numerikus sor konvergens, akkor mivel minden $t \in I_r(x_0)$-ra

$$|a_n||t - x_0|^n \leq |a_n||r|^n,$$

a Weierstrass kritérium alapján a $\sum_{n\geq 0} a_n(x - x_0)^n$ függvénysor egyenletesen konvergens az $I_r(x_0)$ intervallumon. □

Megjegyzés 5.9. A tételből következik, hogy ha egy hatványsor konvergencia sugara ∞, akkor a hatványsor egyenletesen konvergens bármely korlátos intervallumon, hiszen bármely korlátos intervallum benne van valamilyen kompakt intervallumban.

Példa 5.10. A $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+1)^2} x^{n+1}$ hatványsor egyenletesen konvergens az egész $[-1, 1]$ konvergencia intervallumán, mert a $(-1, 1)$ intervallumon abszolút konvergens és az $x = \pm 1$ pontokban is abszolút konvergens.

A $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$ hatványsor egyenletesen konvergens bármely $[-1 + \delta, 1 - \delta]$ intervallumon, ahol $\delta > 0$, mert abszolút konvergens a $(-1, 1)$ intervallumon. Az $x = 1$-ben nem abszolút konvergens, de konvergens. Ezért kérdéses, hogy $\delta > 0$-ra a $[-1 + \delta, 1]$ intervallumon egyenletesen konvergens-e. Az alábbiakban látni fogjuk, hogy igen.

A $\sum_{n\geq 0} x^n$ hatványsor konvergencia intervalluma $(-1, 1)$, ahol

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

és ez a hatványsor egyenletesen konvergens bármely $[-1 + \delta, 1 - \delta]$ intervallumon, ahol $\delta > 0$, mert abszolút konvergens a $(-1, 1)$ intervallumon. Ugyanakkor nem egyenletesen konvergens az egész $(-1, 1)$-en, mert ha

$$s_m(x) = \sum_{n=0}^{m} x^n = \frac{1 - x^{m+1}}{1 - x}$$

jelöli a részletösszegek sorozatát és

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

az összegfüggvény $(-1,1)$-en, akkor például

$$s_m(1-\frac{1}{m})-f(1-\frac{1}{m}) = \frac{1-\left(1-\frac{1}{m}\right)^{m+1}}{1-\left(1-\frac{1}{m}\right)} - \frac{1}{1-\left(1-\frac{1}{m}\right)} = -m\left(1-\frac{1}{m}\right)^{m+1} \to -\infty$$

ha $m \to \infty$.

Az Abel féle egyenletes konvergencia tételt használjuk a következő állítás bizonyításában.

Tétel 5.11. *Egy hatványsor a konvergencia intervallumának minden kompakt részintervallumán egyenletesen konvergens.*

Bizonyítás. Legyen $x_0 \in \mathbb{R}$ és $0 \neq r \in \mathbb{R}$. Jelölje $I_r(x_0)$ az $[x_0, x_0 + r]$ intervallumot ha $r > 0$ és az $[x_0 + r, x_0]$ intervallumot ha $r < 0$. Az 1.13 állítás alapján elég belátni, hogy ha egy hatványsor konvergens az $x_0 + r$ pontban, akkor a hatványsor egyenletesen konvergens az $I_r(x_0)$ intervallumban.

Ha a $\sum_{n\geq 0} a_n r^n$ numerikus sor konvergens, akkor legyen minden $n \geq 0$-ra és $x \in \mathbb{R}$-re $f_n(x) = \left(\frac{x-x_0}{r}\right)^n$, és legyen $g_n(x) = a_n r^n$. Ekkor ha $x \in I_r(x_0)$, akkor az $[f_n(x)]_{n\geq 0}$ számsorozat monoton és minden $n \geq 0$-ra $0 \leq f_n(x) \leq 1$, tehát az $[f_n]_{n\geq 0}$ függvénysorozat egyenletesen korlátos $I_r(x_0)$-on.

Ugyanakkor a g_n függvények konstans függvények minden $n \geq 0$-ra és így a $\sum_{n\geq 0} g_n$ függvénysor nyilván egyenletesen konvergens (akár az egész $\mathbb{R}$-en is), mert feltettük, hogy a $\sum_{n\geq 0} a_n r^n$ numerikus sor konvergens.

Ezért a $\sum_{n\geq 0} a_n(x - x_0)^n = \sum_{n\geq 0} f_n g_n$ függvénysor egyenletesen konvergens $I_r(x_0)$-on az Abel féle egyenletes konvergencia tétel miatt. $\square$

Példa 5.12. A $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$ hatványsor konvergencia intervalluma $(-1, 1]$ és ezért a hatványsor egyenletesen konvergens bármely $[-1 + \delta, 1]$ intervallumon, ahol $\delta > 0$.

5.2. Hatványsor összegfüggvénye.

A függvénysorok összegfüggvényének folytonosságáról szóló 2.13 tételt a hatványsorokra alkalmazva a következő állítást nyerjük.

Tétel 5.13. *Egy hatványsor összegfüggvénye folytonos az egész konvergencia intervallumban.*

Bizonyítás. Egy hatványsor egyenletesen konvergens a konvergencia intervallum minden I kompakt részintervallumán, de mivel az $x \mapsto a_n(x-x_0)^n$ függvények folytonosak, a hatványsor is folytonos I-n. A tétel egyszerűen következik abból, hogy a hatványsor konvergencia intervallumának minden pontja benne van valamilyen I kompakt részintervallumban így ott a hatványsor folytonos. □

Állítás 5.14. *Legyen $k \in \mathbb{N}$ tetszőleges, ekkor a $\sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$ hatványsor konvergencia sugara egyenlő a k-szor tagonkénti deriválással kapott*

$$\sum_{n\geq k} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(x-x_0)^{n-k}$$

hatványsor konvergencia sugarával.

Bizonyítás. Az állítást elég belátni $k = 1$-re, abból már teljes indukcióval következik minden $k > 1$-re is. A $k = 1$ esetben azt szeretnénk bizonyítani, hogy a

$$\sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$$

hatványsor és a tagonkénti deriválással kapott

$$\sum_{n\geq 1} na_n(x-x_0)^{n-1} = \sum_{n\geq 0}(n+1)a_{n+1}(x-x_0)^n$$

hatványsor konvergencia sugara egyenlő. Ehhez nyilván elég azt megmutatni, hogy

$$\limsup\left(|a_n|^{1/n}\right) = \limsup\left(((n+1)\,|a_{n+1}|)^{1/n}\right).$$

Mivel $\lim\left((n+1)^{1/n}\right) = 1$, ezért

$$\limsup\left(((n+1)\,|a_{n+1}|)^{1/n}\right) = \limsup\left(|a_{n+1}|^{1/n}\right).$$

Ugyanakkor nyilvánvalóan $\limsup\left(|a_{n+1}|^{1/(n+1)}\right) = \limsup\left(|a_n|^{1/n}\right)$. Tehát azt kell bebizonyítani, hogy

$$\limsup\left(|a_{n+1}|^{1/(n+1)}\right) = \limsup\left(|a_{n+1}|^{1/n}\right).$$

De

$$\left(|a_{n+1}|^{1/(n+1)}\right)^{\frac{n+1}{n}} = |a_{n+1}|^{1/n}$$

és

$$|a_{n+1}|^{1/(n+1)} = \left(|a_{n+1}|^{1/n}\right)^{\frac{n}{n+1}},$$

ezért elég azt megmutatni, hogy ha $[b_n]$ egy nemnegatív tagú számsorozat, akkor

$$\limsup b_n \leq \limsup b_n^{\frac{n+1}{n}}$$

és

$$\limsup b_n \leq \limsup b_n^{\frac{n}{n+1}}.$$

Ha $[b_n]_{n\geq N}$ a konstans 0 sorozat valamilyen $N \in \mathbb{N}$-re, akkor nyilván teljesülnek ezek az egyenlőtlenségek.

Tegyük fel tehát, hogy végtelen sok $n \in \mathbb{N}$-re $b_n > 0$. Legyen $[b_{n_k}]_{k\geq 0}$ egy olyan részsorozata $[b_n]$-nek, hogy $\lim_{k\to\infty} b_{n_k} = \limsup b_n$. Akkor az is nyilván feltehető, hogy $[b_{n_k}]$ pozitív tagú. Ekkor

$$b_{n_k}^{\frac{n_k+1}{n_k}} = e^{\frac{n_k+1}{n_k}\ln b_{n_k}} \to \lim_{k\to\infty} b_{n_k}$$

ha $k \to \infty$. Tehát

$$\limsup b_n \leq \limsup b_n^{\frac{n+1}{n}}.$$

Hasonlóan

$$b_{n_k}^{\frac{n_k}{n_k+1}} = e^{\frac{n_k}{n_k+1}\ln b_{n_k}} \to \lim_{k\to\infty} b_{n_k}$$

ha $k \to \infty$, tehát

$$\limsup b_n \leq \limsup b_n^{\frac{n}{n+1}}.$$

□

Példa 5.15. Egy hatványsornak és a tagonkénti differenciálásával kapott hatványsornak a konvergencia intervalluma nem biztos, hogy ugyanaz. Például a

$$\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$$

hatványsor konvergens az $x = -1$ pontban, de a $\sum_{n\geq 0} x^n$ hatványsor, amit a tagonkénti deriválásával kapunk, divergens az $x = -1$-ben. Vagy a

$$\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n^2}$$

hatványsor abszolút konvergens $x = 1$-ben, de a tagonkénti deriválással kapott $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n+1}$ hatványsor divergens az $x = 1$-ben.

Tétel 5.16. *Legyen $\sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$ egy hatványsor, jelölje K a konvergencia halmazát és R a konvergencia sugarát. Jelölje K' a tagonkénti deriválással kapott $\sum_{n\geq 1} na_n(x-x_0)^{n-1}$ hatványsor konvergencia halmazát. Ekkor*

(1)
$$(x_0 - R, x_0 + R) \subseteq K' \subseteq K$$

és

(2) *ha $R > 0$, akkor a $\sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$ hatványsor K konvergencia halmazán értelmezett*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

összegfüggvény folytonosan differenciálható a K' halmazon és

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}$$

minden $x \in K'$*-re.*

Bizonyítás. A K' halmaz minden x_0-at tartalmazó I kompakt részintervallumán a tagonkénti deriválással kapott $\sum_{n\geq 1} na_n(x-x_0)^{n-1}$ hatványsor egyenletesen konvergens, és mivel x_0-ban a $\sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$ hatványsor biztosan konvergens, a függvénysorozatok differenciálásáról szóló 2.8 tétel miatt $\sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$ egyenletesen konvergens az I halmazon, és ha f jelöli az összegfüggvényt, akkor f folytonosan differenciálható I-n és minden $x \in I$-re $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}$. De mivel $I \subseteq K'$ tetszőleges x_0-at tartalmazó kompakt intervallum, ezért minden $x \in K'$-re

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}.$$

□

Teljes indukcióval nyilvánvalóan adódik a következő állítás.

Következmény 5.17. *Az* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *akárhányszor differenciálható* $(x_0 - R, x_0 + R)$*-en és*

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(x-x_0)^{n-k}$$

minden $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$*-re.*

Példa 5.18. A $\sum_{n\geq 0} x^n$ hatványsor konvergencia intervalluma $(-1, 1)$ és az összegfüggvénye $\frac{1}{1-x}$. Az előző tételeket használva tagonkénti deriválással azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n.$$

Például ha $x = 1/2$, akkor azt kapjuk, hogy

$$4 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}.$$

Tagonkénti többszöri deriválással meg azt, hogy

$$\frac{(-1)^{k+1}k!}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k}.$$

Ha $\binom{n}{k}$ jelöli az

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

számot, akkor

$$\frac{(-1)^{k+1}}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^n.$$

Tétel 5.19. *Egy hatványsor* $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ *összegfüggvénye minden* $I\subseteq K$ *kompakt részintervallumban Riemann integrálható és*

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\int_I(x-x_0)^n\mathrm{d}x=\int_I f(x)\mathrm{d}x.$$

Bizonyítás. Az f függvény folytonos az egész K konvergencia intervallumban, ezért minden $I\subseteq K$ kompakt intervallumon Riemann integrálható. De mivel a hatványsor egyenletesen konvergens I-n, a hatványsor tagonként integrálható és a $\sum_{n\geq 0}a_n\int_I(x-x_0)^n\mathrm{d}x$ numerikus sor tart $\int_I f(x)\mathrm{d}x$-hez. □

Példa 5.20. Ha a $\sum_{n\geq 0}a_nx^n$ hatványsor konvergencia sugara $R>0$ és összegfüggvénye

$$f(x)=\sum_{n\geq 0}^{\infty}a_nx^n,$$

akkor minden $x\in(-R,R)$-re

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\int_0^x t^n\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}.$$

Példa 5.21. A $\sum_{n\geq 0}(-1)^n x^n$ hatványsor konvergencia intervalluma $(-1,1)$ és összegfüggvénye

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n.$$

Ha $x\in(-1,1)$, akkor

$$\int_0^x\frac{1}{1+t}\mathrm{d}t=\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots. \tag{5.1}$$

Ez a $\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$ hatványsor konvergens az $x=1$-ben, mert akkor egy Leibniz sort kapunk, és divergens az $x=-1$-ben, tehát a konvergencia intervalluma $(-1,1]$. Az (5.1) egyenlőség csak $x\in(-1,1)$-re következik az előbbi tételből. De könnyen látható, hogy akkor $x=1$-re is igaz, mert $\ln(x+1)$ is és a $\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$ hatványsor is folytonos az $x=1$-ben. Tehát

$$\ln 2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots.$$

Példa 5.22. Mivel minden $x\in(-1,1)$-re $\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$, ezért x helyére t^2-et írva azt kapjuk, hogy minden $t\in(-1,1)$-re

$$\frac{1}{1+t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}$$

és így minden $x \in (-1,1)$-re

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = \operatorname{arctg}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots .$$

Ez a hatványsor az $x = \pm 1$-ben is konvergens, ezért az összegfüggvény folytonos is $x = \pm 1$-ben. Mivel $\operatorname{arctg}(x)$ is folytonos $x = \pm 1$-ben, azt kapjuk, hogy

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}(1) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots .$$

6. Taylor sor

A következőkben egy adott f függvényhez próbálunk olyan hatványsort találni, aminek f az összegfüggvénye.

Tétel 6.1. *Ha egy $\sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$ hatványsor konvergencia sugara $R > 0$ és összegfüggvénye f, akkor*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},$$

tehát $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ az egész konvergencia intervallumban.

Bizonyítás. Egy hatványsor tagonként differenciálható minden $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ esetén. Ezért az erről szóló tétel szerint

$$f^{(k)}(x_0) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(x_0-x_0)^{n-k} = k!a_k.$$

□

Definíció 6.2 (Analitikus függvény). Legyen $x_0 \in \mathbb{R}$ és legyen f egy olyan függvény, ami értelmezve van az x_0-nak valamilyen környezetében. Ha van egy olyan $\sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$ hatványsor, hogy valamilyen $\delta > 0$-ra minden $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$-ra

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n,$$

akkor az f függvényt az x_0 pontban analitikus függvénynek nevezzük. Ha az f értelmezve van egy I nyílt intervallumban és f az I minden pontjában analitikus, akkor az f függvényt az I intervallumban analitikus függvénynek nevezzük.

Állítás 6.3. *Egy $x_0 \in \mathbb{R}$-ben analitikus függvény akárhányszor differenciálható az x_0 egy környezetében.*

Bizonyítás. Az állítás egyszerűen következik abból, hogy egy x_0 közepű és pozitív konvergencia sugarú hatványsor akárhányszor differenciálható az x_0 egy környezetében. □

A továbbiakban azt a kérdést vizsgáljuk, hogy egy $x_0 \in \mathbb{R}$ egy környezetében akárhányszor differenciálható függvény analitikus-e x_0-ban, tehát hogy ilyenkor létezik-e olyan x_0 közepű hatványsor, aminek az x_0 egy környezetében f az összegfüggvénye. Ezzel kapcsolatos a következő definíció.

Definíció 6.4 (Taylor sor). Legyen f akárhányszor differenciálható az $x_0 \in \mathbb{R}$ pontban. Az f függvénynek az x_0-beli Taylor sora a

$$\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$$

hatványsor.

Definíció 6.5 (Taylor sorba fejthető függvény). Legyen f egy $x_0 \in \mathbb{R}$ pont környezetében értelmezett függvény, és tegyük fel, hogy f akárhányszor differenciálható az x_0 egy környezetében. Ha az f függvény x_0-beli Taylor sora konvergens egy $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ intervallumban valamilyen $\delta > 0$-ra és a Taylor sor összegfüggvénye f ezen az intervallumon, akkor az mondjuk, hogy az f függvény Taylor sorba fejthető az x_0-ban.

Megjegyzés 6.6. A 6.1 tétel szerint egy pozitív konvergencia sugarú x_0 közepű hatványsor megegyezik az összegfüggvényének az x_0-beli Taylor sorával.

Állítás 6.7. *Az f függvény analitikus x_0-ban $\iff$ az f függvény Taylor sorba fejthető x_0-ban.*

Bizonyítás. Az állítás egyszerűen következik az előbbiekből. □

Példa 6.8. Az

$$\frac{1}{1-x}, \quad \frac{1}{1+x}, \quad \ln(1+x), \quad \frac{1}{1+x^2} \quad \text{és} \quad \operatorname{arctg}(x)$$

függvények Taylor sorba fejthetők a 0 körül, mert már láttuk, hogy előállnak bizonyos pozitív konvergencia sugarú és 0 közepű hatványsorok összegfüggvényeként.

Példa 6.9. Legyen $f(x) = e^{-1/x^2}$ ha $x \in \mathbb{R}$ és $x \neq 0$, és legyen $f(0) = 0$. Egyszerűen kiszámolható, hogy ez az f függvény minden $x \in \mathbb{R}$ pontban akárhányszor differenciálható és minden $0 \leq n \in \mathbb{N}$-re $f^n(0) = 0$. Ezért az f függvény Taylor sorának minden együtthatója 0, tehát

$$\sum_{n\geq 0} 0\, x^n$$

alakú, ami minden $x \in \mathbb{R}$-re konvergens, vagyis a konvergencia sugara ∞, és az összegfüggvénye az egész $\mathbb{R}$-en értelmezett azonosan 0 függvény. Emiatt az összegfüggvénye csak az $x = 0$-ban egyenlő $f(x)$-el. Tehát ez az f függvény a 0-ban nem Taylor sorba fejthető (és akkor nem is analitikus a 0-ban).

Vizsgáljuk meg azt a kérdést, hogy egy f függvény, ami egy $x_0 \in \mathbb{R}$ pont egy környezetében akárhányszor differenciálható, mikor lesz Taylor sorba fejthető az x_0-ban.

Definíció 6.10 (Taylor polinom). Egy $x_0 \in \mathbb{R}$ pontban akárhányszor differenciálható f függvény n-ed fokú x_0-hoz tartozó Taylor polinomja

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k .$$

Az f függvény x_0-hoz tartozó n-edik maradéktagja az

$$R_n = f - T_n$$

függvény, ami ugyanazon a halmazon van értelmezve, mint az f függvény.

Megjegyzés 6.11. Az R_n függvény is akárhányszor deriválható x_0-ban és minden $0 \leq k \leq n$-re $R^{(k)}(x_0) = 0$, mert $T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$.

Állítás 6.12. *Egy f függvény, ami egy $x_0 \in \mathbb{R}$ pont egy környezetében akárhányszor differenciálható, Taylor sorba fejthető az x_0-ban $\iff$ az x_0-nak egy környezetében az $[R_n]$ függvénysorozat pontonként tart 0-hoz.*

Bizonyítás. Az állítás nyilvánvalóan következik az előbbiekből. □

Az R_n maradéktagot akkor lehet jól használni, ha találunk rá valamilyen formulát. A következő tételben megadott formulát Lagrange féle maradéktagnak nevezzük.

Tétel 6.13 (Lagrange féle maradéktag). *Legyen $x_0 \in \mathbb{R}$ egy pont és U egy olyan nyílt intervallum, amire $x_0 \in U$. Legyen f olyan függvény, ami U-ban akárhányszor differenciálható és legyen $0 \leq n \in \mathbb{N}$. Ekkor minden $x \in U$, $x \neq x_0$-hoz van olyan n-től, x_0-tól és x-től függő ξ szám az x_0 és x között, hogy*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Bizonyítás. Feltehetjük, hogy $U = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ valamilyen $\delta > 0$-ra, mert U egyébként biztosan tartalmaz egy ilyen intervallumot. Legyen $\varphi = R_n$ és ψ legyen az x-hez $(x - x_0)^{n+1}$-et rendelő függvény. Először erre a két φ és ψ függvényre fogjuk alkalmazni a Cauchy középértéktételt az $[x_0, x]$ vagy $[x, x_0]$ intervallumon (attól függően, hogy $x_0 < x$ vagy $x < x_0$), aztán meg a magasabb rendű deriváltjaikra.

Könnyen látható, hogy

$$0 = \varphi(x_0) = \varphi'(x_0) = \cdots = \varphi^{(n)}(x_0)$$

és hasonlóan

$$0 = \psi(x_0) = \psi'(x_0) = \cdots = \psi^{(n)}(x_0).$$

Az is fontos lesz, hogy

$$\psi^{(k)}(t) = (n+1)n\cdots(n-k+2)(t-x_0)^{n+1-k} \neq 0$$

ha t az x_0 és x által meghatározott nyílt intervallumban van és $0 \leq k \leq n+1$.

Ezért a Cauchy középértéktétel miatt van olyan ξ_1 szám x és x_0 között, hogy

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{\psi(x)-\psi(x_0)} = \frac{\varphi'(\xi_1)}{\psi'(\xi_1)}.$$

De mivel

$$\frac{\varphi'(\xi_1)}{\psi'(\xi_1)} = \frac{\varphi'(\xi_1)-\varphi'(x_0)}{\psi'(\xi_1)-\psi'(x_0)},$$

megint a Cauchy középértéktétel miatt van olyan ξ_2 szám ξ_1 és x_0 között, hogy

$$\frac{\varphi'(\xi_1)-\varphi'(x_0)}{\psi'(\xi_1)-\psi(x_0)} = \frac{\varphi''(\xi_2)}{\psi''(\xi_2)}.$$

Így folytatva, megint van olyan ξ_3 szám ξ_2 és x_0 között, hogy

$$\frac{\varphi''(\xi_2)}{\psi''(\xi_2)} = \frac{\varphi''(\xi_2)-\varphi''(x_0)}{\psi''(\xi_2)-\psi''(x_0)} = \frac{\varphi^{(3)}(\xi_3)}{\psi^{(3)}(\xi_3)}.$$

Végül azt kapjuk, hogy

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{\psi(x)-\psi(x_0)} = \frac{\varphi'(\xi_1)}{\psi'(\xi_1)} = \frac{\varphi'(\xi_1)-\varphi'(x_0)}{\psi'(\xi_1)-\psi'(x_0)} = \frac{\varphi''(\xi_2)}{\psi''(\xi_2)} =$$
$$\frac{\varphi''(\xi_2)-\varphi''(x_0)}{\psi''(\xi_2)-\psi''(x_0)} = \cdots = \frac{\varphi^{(n+1)}(\xi)}{\psi^{(n+1)}(\xi)}$$

valamilyen ξ számra, ami x_0 és ξ_n között van. Mivel $\varphi^{(n+1)} = R_n^{(n+1)}$ és $\psi^{(n+1)} = (n+1)!$, ezért

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Ugyanakkor

$$R_n^{(n+1)} = f^{(n+1)} - T_n^{(n+1)} = f^{(n+1)} - 0$$

és így végül

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},$$

amiből a tétel állítása már következik, mert ξ az x_0 és x között van. $\square$

A Lagrange maradéktagon kívül a következő integrál maradéktagos formulát is használjuk.

Tétel 6.14 (Integrál maradéktag). *Legyen $x_0 \in \mathbb{R}$ egy pont és U egy olyan nyílt intervallum, amire $x_0 \in U$. Legyen f olyan függvény, ami U-ban akárhányszor differenciálható és legyen $0 \leq n \in \mathbb{N}$. Ekkor minden $x \in U$-ra*

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{n+1}(t)(x-t)^n \mathrm{d}t.$$

Bizonyítás. Az állítás nyilvánvalóan igaz $n = 0$-ra, mert akkor az egyenlőség mindkét oldala $f(x) - f(x_0)$-al egyenlő. Tegyük fel, hogy az állítás igaz valamilyen $n \in \mathbb{N}$-re. Ekkor parciálisan integrálva

$$\frac{1}{(n+1)!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+2)}(t)(x-t)^{n+1}\mathrm{d}t = \frac{1}{(n+1)!}\left[f^{(n+1)}(t)(x-t)^{n+1}\right]_{x_0}^{x} -$$
$$\frac{1}{(n+1)!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(n+1)(-1)(x-t)^{n}\mathrm{d}t = -\frac{f^{(n+1)}(x_0)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} +$$
$$\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^{n}\mathrm{d}t = -\frac{f^{(n+1)}(x_0)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} + f(x) - T_n(x)$$

az indukciós feltétel miatt, ami egyenlő $f(x) - T_{n+1}(x)$-el. □

A következő tétel feltételt ad arra, hogy egy függvény mikor fejthető Taylor sorba.

Tétel 6.15. *Egy f függvény, ami egy $x_0 \in \mathbb{R}$ pont egy U környezetében akárhányszor differenciálható Taylor sorba fejthető az x_0-ban ha van olyan $A, B > 0$ és x_0-nak $V \subseteq U$ környezete, hogy minden $n \in \mathbb{N}$-re és minden $x \in V$-re*

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \leq Bn!A^n.$$

Ekkor ha x_0-nak egy r sugarú környezete benne van V-ben, akkor f-nek a Taylor sora az x_0-nak a $\min\{r, 1/A\}$ sugarú környezetében előállítja f-et.

Bizonyítás. Az x_0-nak valamilyen $r > 0$ sugarú W környezete biztosan benne van V-ben, és ekkor tekintsük tetszőleges $x \in W$-re az f függvényhez tartozó

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

maradéktagot, ahol ξ az x és x_0 között fekszik.

Ezt becsülve azt kapjuk, hogy

$$\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right| \leq BA^{n+1}\left|x-x_0\right|^{n+1} = B\left(A\left|x-x_0\right|\right)^{n+1},$$

ahol $B\left(A\left|x-x_0\right|\right)^{n+1} \to 0$ ha $n \to \infty$, ha azt is feltesszük, hogy $|x - x_0| < \frac{1}{A}$.

Tehát minden $x \in W$-re amire $|x - x_0| < \frac{1}{A}$ is teljesül az $R_n(x)$ maradéktag tart a 0-hoz $n \to \infty$ esetén. Ezért az f függvény Taylor sora az ilyen x-ekben konvergens és tart $f(x)$-hez. □

Megjegyzés 6.16. Itt nem bizonyítjuk, de az előző tételben szereplő feltétel szükséges is egy $x_0 \in \mathbb{R}$ pont egy U környezetében akárhányszor differenciálható függvény Taylor sorba fejthetőségére az x_0 pontban.

Állítás 6.17. *Ha az f függvény akárhányszor differenciálható az $x_0 \in \mathbb{R}$ egy U környezetében és létezik (ettől az U környezettől függően) olyan $K > 0$, hogy minden $x \in U$-ra és minden $n \in \mathbb{N}$-re*

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \leq K,$$

akkor az f függvény Taylor sora az x_0-nak valamilyen $r > 0$ sugarú U-ban fekvő környezetében konvergens és ott az összegfüggvény egyenlő f-el.

Bizonyítás. Az $R_n(x)$ maradéktagot becsülve olyan $x \in U$-ra amire $|x - x_0| < r$ is teljesül azt kapjuk valamilyen x és x_0 között fekvő ξ-re, hogy

$$|R_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}\right| \leq K\frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!},$$

de $K\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$ tart a 0-hoz ha $n \to \infty$. □

Megjegyzés 6.18. A tételben lévő állítást úgy is meg lehet fogalmazni, hogy ha az f függvény akárhányszor differenciálható az $x_0 \in \mathbb{R}$ egy U környezetében és az

$$\left[f^{(n)}\right]_{n \geq 0}$$

függvénysorozat egyenletesen korlátos az U-n, akkor az f függvény Taylor sora az x_0-nak valamilyen $r > 0$ sugarú U-ban fekvő környezetében konvergens és ott az összegfüggvény egyenlő f-el.

Példa 6.19. A $\sin(x)$, $\cos(x)$, e^x, $\mathrm{sh}(x)$, $\mathrm{ch}(x)$ függvények 0-középű Taylor sorait könnyű kiszámolni. Az előző állítás felhasználásával azt is látjuk, hogy ezek a Taylor sorok konvergensek és előállítják a függvényt a 0-nak tetszőlegesen nagy sugarú környezetében, tehát az egész $\mathbb{R}$-en is. A $\sin(x)$ függvény 0 középű Taylor sora

$$\sum_{n \geq 0}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots,$$

a $\cos(x)$ függvényé

$$\sum_{n \geq 0}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots,$$

az e^x függvényé

$$\sum_{n \geq 0}\frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots,$$

a $\mathrm{sh}(x)$ függvényé

$$\sum_{n \geq 0}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

és a $\mathrm{ch}(x)$ függvényé

$$\sum_{n \geq 0}\frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots.$$

7. Binomiális sor

Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$ és legyen

$$f(x) = (1+x)^\alpha,$$

ahol $x \in (-1, \infty)$. Azért nézzük az egyszerűség kedvéért ezt az értelmezési tartományt, mert ha α olyan, hogy $(1+x)^\alpha$-át az $e^{\alpha \ln(1+x)}$-el definiáljuk, akkor $x > -1$ kell legyen, de egyébként is minden $\alpha < 0$-ra x nem lehet -1, mert akkor $f(x)$ meg $\frac{1}{(1+x)^{|\alpha|}}$ alakú. (Nyilván ha például $\alpha \in \mathbb{N}$, akkor $(1+x)^\alpha$ egy polinom, amit lehetne értelmezni akár az egész $\mathbb{R}$-en is.)

Könnyen látható, hogy f akárhányszor differenciálható és minden $x \in (-1, \infty)$-re

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}.$$

Definíció 7.1 (Binomiális együttható). Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}$. Ha $0 \leq \alpha \in \mathbb{N}$, akkor $\binom{\alpha}{n}$ a jól ismert binomiális együttható, de ha $\alpha \notin \mathbb{N}$, $\alpha \neq 0$, akkor legyen

$$\binom{\alpha}{0} = 1,$$

és

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

ha $1 \leq n \in \mathbb{N}$.

Ha $0 \leq \alpha \in \mathbb{N}$, akkor például $\binom{\alpha}{n} = 0$ ha $n > \alpha$. De ha $\alpha \notin \mathbb{N}$, akkor $\binom{\alpha}{n}$ semmilyen $n \in \mathbb{N}$-re nem 0.

Ezekkel a jelölésekkel nyilvánvalóan

$$f^{(n)}(x) = n!\binom{\alpha}{n}(1+x)^{\alpha-n}$$

és így az f függvény 0 közepű Taylor sora

$$\sum_{n\geq 0}\binom{\alpha}{n}x^n,$$

amit binomiális sornak nevezünk. Abban az esetben ha $0 \leq \alpha \in \mathbb{N}$, ez egy véges összeg, mert ekkor a binomiális együtthatók 0-val egyenlőek ha $n > \alpha$. Úgyhogy tegyük fel a továbbiakban, hogy $\alpha \notin \mathbb{N}$.

A $\sum_{n\geq 0}\binom{\alpha}{n}x^n$ hatványsor konvergencia sugara 1, mert ha nem is a Cauchy gyökkritériummal, de a hányados kritériummal azt kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\binom{\alpha}{n+1}x^{n+1}}{\binom{\alpha}{n}x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha-n}{n+1}x\right| = |x|.$$

Persze abból, hogy a $\sum_{n\geq 0}\binom{\alpha}{n}x^n$ hatványsor konvergens lenne egy $x\in[-1,1]$ pontban, még nem következne, hogy az összegfüggvénye egyenlő $f(x)=(1+x)^\alpha$-val a konvergencia intervallumban (ráadásul f nem is volt értelmezve -1-ben). Mégis igaz a következő állítás.

Állítás 7.2. *Minden $\alpha\in\mathbb{R}$ és $x\in(-1,1)$ esetén*

$$(1+x)^\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n.$$

Bizonyítás. Már tudjuk, hogy a $\sum_{n\geq 0}\binom{\alpha}{n}x^n$ hatványsor konvergens minden $x\in(-1,1)$-re, legyen $g\colon(-1,1)\to\mathbb{R}$ az összegfüggvény. Ekkor g differenciálható és a g' deriváltfüggvényt lehet a hatványsor tagonkénti deriválásával számolni:

$$g'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n\binom{\alpha}{n}x^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1}$$

minden $x\in(-1,1)$-re.

A sorozatok (és sorok) határértékeire vonatkozó állításokat használva minden $x\in(-1,1)$-re

$$(1+x)g'(x)=$$

$$g'(x)+xg'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}x^{n}=$$

$$\alpha+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}x^n=$$

$$\alpha+\sum_{n=1}^{\infty}\left((\alpha-n)\binom{\alpha}{n}+n\binom{\alpha}{n}\right)x^n=\alpha+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha\binom{\alpha}{n}x^n=\alpha\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n=\alpha g(x).$$

Ezért minden $x\in(-1,1)$-re

$$g'(x)=\frac{\alpha}{1+x}g(x).$$

Könnyen látható abból, hogy $f(x)=(1+x)^\alpha$, hogy szintén minden $x\in(-1,1)$-re

$$f'(x)=\frac{\alpha}{1+x}f(x),$$

emiatt

$$g'(x)f(x)-g(x)f'(x)=0.$$

Mivel $f(x)\neq 0$ ha $x\in(-1,1)$, ezért létezik a g/f függvény $(-1,1)$-en és az előbbiek alapján

$$\left(\frac{g}{f}\right)'=0,\quad\text{így}\quad\frac{g}{f}=c$$

valamilyen $c\in\mathbb{R}$ konstansra. De $f(0)=1$ és $g(0)=1$, így $c=1$ és akkor $f=g$. □

Tehát nem csak abszolút konvergens a $\sum_{n\geq 0}\binom{\alpha}{n}x^n$ binomiális sor a $(-1,1)$ intervallumban, de az összegfüggvénye $(1+x)^\alpha$-val egyenlő minden $x\in(-1,1)$ esetén.

Nézzük meg, hogy a binomiális sor mikor konvergens az $x=\pm 1$-ben. Ehhez a

$$\sum_{n\geq 0}\binom{\alpha}{n} \quad \text{és} \quad \sum_{n\geq 0}(-1)^n\binom{\alpha}{n}$$

numerikus sorok konvergenciáját kell megvizsgálni. Használni fogjuk a következő becslést.

Állítás 7.3. *Legyen $\alpha\in\mathbb{R}$. Ekkor léteznek olyan $K, L>0$ az α-tól függő számok, hogy minden $n\in\mathbb{N}$-re*

$$\frac{K}{n^{\alpha+1}}\leq\left|\binom{\alpha}{n}\right|\leq\frac{L}{n^{\alpha+1}}.$$

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy minden $x\geq-\frac{1}{2}$-re

$$e^{x-2x^2}\leq 1+x\leq e^x.$$

Ehhez egy lemmát bizonyítunk be.

Lemma 7.4. *Minden $x\geq-\frac{1}{2}$-re*

$$x-2x^2\leq\ln(1+x)\leq x.$$

Bizonyítás. Az $\ln(1+x)$ függvény 0-hoz tartozó T_1 elsőfokú Taylor polinomja

$$T_1(x)=x$$

és a 0-hoz tartozó R_1 maradéktagja

$$R_1(x)=-\frac{1}{2!}\frac{1}{(1+\xi)^2}x^2,$$

ahol ξ a 0 és x között van. Emiatt ha $x\geq-\frac{1}{2}$, akkor ξ is $\geq-\frac{1}{2}$, ezért $(1+\xi)^2\geq 1/4$ és ezért

$$R_1(x)=-\frac{1}{2!}\frac{1}{(1+\xi)^2}x^2\geq-2x^2$$

és így

$$\ln(1+x)=x+R_1(x)\geq x-2x^2$$

ha $x\geq-\frac{1}{2}$. Ugyanakkor mivel $R_1\leq 0$, az is igaz, hogy

$$\ln(1+x)\leq x.$$

Tehát minden $x\geq-\frac{1}{2}$-re

$$x-2x^2\leq\ln(1+x)\leq x.$$

□

Tehát minden $x \geq -\frac{1}{2}$-re

$$e^{x-2x^2} \leq 1 + x \leq e^x \tag{7.1}$$

is teljesül.

A binomiális együtthatókat célszerű lesz

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} = (-1)^{n-1}\frac{\alpha}{n}\left(1-\frac{\alpha}{1}\right)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{\alpha}{n-1}\right)$$

alakban írni, ekkor

$$\left|\binom{\alpha}{n}\right| = \frac{|\alpha|}{n}\prod_{k=1}^{n-1}\left|1-\frac{\alpha}{k}\right|.$$

Ha $k \in \mathbb{N}$ elég nagy, mondjuk nagyobb, mint egy α-tól függő megfelelő $N_\alpha \in \mathbb{N}$, akkor nyilván $-\frac{\alpha}{k} \geq -\frac{1}{2}$ és így nem csak hogy $-\frac{\alpha}{k}$-ra érvényes lesz a (7.1) becslés, amit mindjárt használni fogunk, de $1 - \frac{\alpha}{k} > 0$ is teljesül.

Ezért ha bevezetjük a

$$\tilde{K} = \prod_{k=1}^{N_\alpha}\left|1-\frac{\alpha}{k}\right|$$

jelölést, akkor

$$\left|\binom{\alpha}{n}\right| = \frac{|\alpha|}{n}\tilde{K}\prod_{k=N_\alpha+1}^{n-1}\left(1-\frac{\alpha}{k}\right)$$

minden $n \geq N_\alpha + 2$-re. És így a (7.1) becslést egyenként az összes $1 + x = 1 - \frac{\alpha}{k}$-ra alkalmazva azt az alsó és felső becslést kapjuk $n \geq N_\alpha + 2$ esetén, hogy

$$e^{-\alpha\sum_{k=N_\alpha+1}^{n-1}\frac{1}{k}-2\alpha^2\sum_{k=N_\alpha+1}^{n-1}\frac{1}{k^2}} \leq \prod_{k=N_\alpha+1}^{n-1}\left(1-\frac{\alpha}{k}\right) \leq e^{-\alpha\sum_{k=N_\alpha+1}^{n-1}\frac{1}{k}}.$$

Azaz azt a becslést kapjuk $\left|\binom{\alpha}{n}\right|$-re $n \geq N_\alpha + 2$ esetén, hogy

$$\frac{|\alpha|}{n}\tilde{K}e^{-\alpha\sum_{k=N_\alpha+1}^{n-1}\frac{1}{k}-2\alpha^2\sum_{k=N_\alpha+1}^{n-1}\frac{1}{k^2}} \leq \left|\binom{\alpha}{n}\right| \leq \frac{|\alpha|}{n}\tilde{K}e^{-\alpha\sum_{k=N_\alpha+1}^{n-1}\frac{1}{k}}.$$

Mivel

$$\sum_{k=N_\alpha+1}^{n-1}\frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} \leq \tilde{L}$$

valamilyen $\tilde{L} \in \mathbb{R}$-re, ezért

$$e^{-2\alpha^2\tilde{L}} \leq e^{-2\alpha^2\sum_{k=N_\alpha+1}^{n-1}\frac{1}{k^2}}$$

és így minden $n \geq N_\alpha + 2$-re

$$\frac{|\alpha|}{n}\tilde{K}e^{-2\alpha^2\tilde{L}}e^{-\alpha\sum_{k=N_\alpha+1}^{n-1}\frac{1}{k}} \leq \left|\binom{\alpha}{n}\right| \leq \frac{|\alpha|}{n}\tilde{K}e^{-\alpha\sum_{k=N_\alpha+1}^{n-1}\frac{1}{k}}. \tag{7.2}$$

A további számoláshoz szükségünk van a következő állításra.

Lemma 7.5. *Minden* $1 \le n \in \mathbb{N}$*-re*

$$\ln(n) \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \le 1 + \ln(n).$$

PROOF. A Riemann integrál definíciójából következik, hogy az $1/x$ függvény grafikonja feletti $1/k$ magas téglalap területekre

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \ge \int_1^{n+1} \frac{1}{x} \mathrm{d}x = [\ln(x)]_1^{n+1} = \ln(n+1) \ge \ln(n)$$

és hasonlóan az $1/x$ függvény grafikonja alatti területekre

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \le 1 + \int_1^{n} \frac{1}{x} \mathrm{d}x = 1 + [\ln(x)]_1^{n} = 1 + \ln(n).$$

□

Ennek felhasználásával azt kapjuk, hogy minden $n \ge N_\alpha + 2$-re

$$e^{-\alpha}(n-1)^{-\alpha} = e^{-\alpha(1+\ln(n-1))} \le e^{-\alpha \sum_{k=N_\alpha+1}^{n-1} \frac{1}{k}} \le e^{-\alpha\left(\ln(n) - \sum_{k=1}^{N_\alpha} \frac{1}{k}\right)} = e^{\alpha \sum_{k=1}^{N_\alpha} \frac{1}{k}} n^{-\alpha}$$

ha $\alpha \ge 0$ és hasonlóan

$$e^{\alpha \sum_{k=1}^{N_\alpha} \frac{1}{k}} n^{-\alpha} \le e^{-\alpha \sum_{k=N_\alpha+1}^{n-1} \frac{1}{k}} \le e^{-\alpha}(n-1)^{-\alpha}$$

ha $\alpha < 0$.

Mivel $(n-1)^{-\alpha} \ge (2n)^{-\alpha}$ ha $\alpha \ge 0$ és $(n-1)^{-\alpha} \le n^{-\alpha}$ ha $\alpha < 0$, ezért mindenesetre léteznek α-tól függő olyan C és D pozitív számok, hogy

$$Cn^{-\alpha} \le e^{-\alpha \sum_{k=N_\alpha+1}^{n-1} \frac{1}{k}} \le Dn^{-\alpha}.$$

Ebből és (7.2)-ből azt kapjuk, hogy minden $n \ge N_\alpha + 2$-re

$$\frac{|\alpha|}{n} \tilde{K} e^{-2\alpha^2 \tilde{L}} C n^{-\alpha} \le \left| \binom{\alpha}{n} \right| \le \frac{|\alpha|}{n} \tilde{K} D n^{-\alpha}.$$

Mivel csak véges sok $N_\alpha + 2$-nél kisebb természetes szám van, végül azt kapjuk, hogy léteznek α-tól függő olyan $K, L > 0$ számok, hogy minden $n \in \mathbb{N}$-re

$$\frac{K}{n^{\alpha+1}} \le \left| \binom{\alpha}{n} \right| \le \frac{L}{n^{\alpha+1}}.$$

□

Az eddigieket felhasználva már könnyű megvizsgálni, hogy a binomiális sor konvergens-e $x = \pm 1$-ben.

Tétel 7.6. *Legyen* $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{N}$, $\alpha \ne 0$.

(i) *Ha* $\alpha > 0$, *akkor a binomiális sor abszolút konvergens* $x = \pm 1$*-ben.*

(ii) *Ha* $-1 < \alpha < 0$*, akkor a binomiális sor konvergens* $x = 1$*-ben és divergens* $x = -1$*-ben.*
(iii) *Ha* $\alpha \leq -1$*, akkor a binomiális sor divergens* $x = \pm 1$*-ben.*

Bizonyítás. Ha $\alpha > 0$, akkor ± 1-ben a binomiális sor n-dik tagjának abszolút értéke felülről becsülhető $\frac{L}{n^{\alpha+1}}$-el, ezért a binomiális sor ± 1-ben a majoráns kritérium miatt abszolút konvergens.

Ha $\alpha \leq -1$, akkor ± 1-ben a binomiális sor n-dik tagjainak abszolút értékei alulról becsülhetők $\frac{K}{n^{\alpha+1}}$-el, tehát nem alkotnak nullsorozatot, ezért a binomiális sor ± 1-ben divergens.

Ha pedig $-1 < \alpha < 0$, akkor mivel α negatív és így $\binom{\alpha}{n}$ számlálójában n darab negatív számot szorzunk össze, azt kapjuk, hogy $x = 1$-ben a binomiális sor tagjai váltakozó előjelűek. Ha az $\left[\left|\binom{\alpha}{n}\right|\right]$ számsorozat monoton csökkenő nullsorozat, akkor ezek szerint a $\sum_{n\geq 0}\binom{\alpha}{n}$ numerikus sor Leibniz sor és így konvergens. Persze $\left[\left|\binom{\alpha}{n}\right|\right]$ nullsorozat, ez rögtön következik az előző állításban bizonyított becslésekből. Megmutatjuk, hogy $\left[\left|\binom{\alpha}{n}\right|\right]$ monoton csökkenő sorozat.

Nyilván
$$\left|\binom{\alpha}{n+1}\right| \leq \left|\binom{\alpha}{n}\right|$$
pontosan akkor, ha
$$\frac{\left|\binom{\alpha}{n+1}\right|}{\left|\binom{\alpha}{n}\right|} = \left|\frac{\alpha - n}{n+1}\right| \leq 1.$$
Mivel
$$-(n+1) = -1 - n < \alpha - n < -n,$$
ezért
$$-1 < \frac{\alpha - n}{n+1} < \frac{-n}{n+1} = -1 + \frac{1}{n+1} < 1,$$
tehát
$$\left|\frac{\alpha - n}{n+1}\right| \leq 1$$
és így az $\left[\left|\binom{\alpha}{n}\right|\right]$ sorozat monoton csökkenő, emiatt a binomiális sor konvergens $x = 1$-ben. Ha pedig x helyébe -1-et írunk $\sum_{n\geq 0}\binom{\alpha}{n}x^n$-ben, akkor a $\sum_{n\geq 0}\left|\binom{\alpha}{n}\right|$ numerikus sort kapjuk, ami divergens, mert $\frac{K}{n^{\alpha+1}} \leq \left|\binom{\alpha}{n}\right|$. $\square$

8. Fourier sorok és egyenletes konvergenciájuk

8.1. Trigonometrikus sorok és Fourier együtthatók.

Jelölje $\mathcal{R}$ az olyan $\mathbb{R}$-en értelmezett 2π szerint periodikus függvények halmazát, amelyek bármely kompakt intervallumon Riemann integrálhatóak. Például a folytonos 2π szerint periodikus függvények $\mathcal{R}$-beliek. Sőt, a 2π szerint periodikus és csak megszámlálhatóan végtelen sok szakadási ponttal rendelkező függvények is mind $\mathcal{R}$-beliek.

Definíció 8.1 (Trigonometrikus sor). Ha $a_0, a_1, a_2, \dots$ és $b_1, b_2, \dots$ valós számok, akkor az

$$a_0 + \sum_{n \geq 1} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

alakú függvénysort trigonometrikus sornak nevezzük.

Tétel 8.2. *Ha az*

$$a_0 + \sum_{n \geq 1} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

trigonometrikus sor egyenletesen konvergens $\mathbb{R}$*-en és az összegfüggvénye* g*, akkor* $g \in \mathcal{R}$ *és* g *folytonos függvény. Emellett*

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \mathrm{d}x,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos(nx) \mathrm{d}x \quad \textit{és} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin(nx) \mathrm{d}x$$

minden $n \geq 1$*-re.*

Bizonyítás. A függvénysorokra vonatkozó 2.13 tétel szerint a g összegfüggvény folytonos. Ugyanakkor az is könnyen látható, hogy $g \in \mathcal{R}$ hiszen az

$$a_0 + \sum_{n=1}^{m} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

véges összegek is 2π szerint periodikusak, ezért a határértékük is az ha $m \to \infty$.

A függvénysorok tagonkénti Riemann integrálhatóságára vonatkozó 2.14 tétel szerint bármely kompakt intervallumon, így a $[-\pi, \pi]$ intervallumon is

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(x) \mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} a_0 \mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \mathrm{d}x + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \mathrm{d}x \right) =$$

$$2\pi a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n 0 + b_n 0) = 2\pi a_0,$$

amiből

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \mathrm{d}x = a_0.$$

Ha $k \geq 1$, akkor a_k és b_k számolása hasonló. Ha egy egyenletesen konvergens $[f_n]$ függvénysorozat minden tagját megszorozzuk egy adott F függvénnyel, akkor a kapott $[f_n F]$ függvénysorozat is egyenletesen konvergens lesz. Emellett ha $f_n \to f$, akkor $f_n F \to fF$. Ezért bármilyen rögzített $1 \le k \in \mathbb{N}$-re a

$$a_0 \cos(kx) + \sum_{n \ge 1} a_n \cos(nx)\cos(kx) + b_n \sin(nx)\cos(kx)$$

függvénysor is egyenletesen konvergens és tagonként lehet integrálni, miszerint

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos(kx)\mathrm{d}x =$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} a_0 \cos(kx)\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(kx)\mathrm{d}x + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\cos(kx)\mathrm{d}x \right).$$

Mivel

$$\cos(nx)\cos(kx) = \frac{1}{2}\left(\cos\left((n+k)\,x\right) + \cos\left((n-k)\,x\right)\right)$$

és

$$\sin(nx)\cos(kx) = \frac{1}{2}\left(\sin\left((n+k)\,x\right) + \sin\left((n-k)\,x\right)\right),$$

ezért azt kapjuk, hogy

$$\int_{-\pi}^{\pi} a_0 \cos(kx)\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(kx)\mathrm{d}x + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\cos(kx)\mathrm{d}x \right) =$$

$$0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos\left((n+k)\,x\right) + \cos\left((n-k)\,x\right)}{2}\mathrm{d}x +$$

$$b_n \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left((n+k)\,x\right) + \sin\left((n-k)\,x\right)}{2}\mathrm{d}x.$$

De mivel

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos\left((n+k)\,x\right) + \cos\left((n-k)\,x\right)}{2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((k+n)x)}{k+n} + x\right]_{-\pi}^{\pi} = \pi$$

ha $k = n$ és 0 ha $k \neq n$, és

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left((n+k)\,x\right) + \sin\left((n-k)\,x\right)}{2}\mathrm{d}x = 0$$

minden $k, n \ge 1$-re, ezért

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos(kx)\mathrm{d}x = a_k \pi,$$

tehát

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos(kx)\mathrm{d}x.$$

Hasonlóan, ha $\sin(kx)$-el szorozzuk meg a trigonometrikus sort, akkor

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin(kx)\mathrm{d}x =$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} a_0 \sin(kx)\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\sin(kx)\mathrm{d}x + b_n \int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\sin(kx)\mathrm{d}x\right)$$

és

$$\int_{-\pi}^{\pi} a_0 \sin(kx)\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\sin(kx)\mathrm{d}x + b_n \int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\sin(kx)\mathrm{d}x\right) =$$
$$0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left((n+k)\,x\right) + \sin\left((n-k)\,x\right)}{2}\mathrm{d}x +$$
$$b_n \int_{-\pi}^{\pi} \frac{-\cos\left((n+k)\,x\right) + \cos\left((n-k)\,x\right)}{2}\mathrm{d}x.$$

Most
$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{-\cos\left((n+k)\,x\right) + \cos\left((n-k)\,x\right)}{2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\frac{-\sin((n+k)x)}{n+k} + x\right]_{-\pi}^{\pi} = \pi$$
ha $n = k$ és 0 ha $k \neq n$. Ezért
$$\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin(kx)\mathrm{d}x = b_k\pi$$
és így
$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin(kx)\mathrm{d}x.$$
□

Megjegyzés 8.3. Ha $g \in \mathcal{R}$, akkor mindegy, hogy melyik 2π hosszúságú intervallumon integrálunk, azaz minden $T \in \mathbb{R}$-re
$$\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\mathrm{d}x = \int_{-\pi+T}^{\pi+T} g(x)\mathrm{d}x.$$

Megjegyzés 8.4. A tételben a trigonometrikus sor egyenletesen konvergens kellett hogy legyen. Például ha a $\sum_{n\geq 1}|a_n| + |b_n|$ numerikus sor konvergens, akkor a Weierstrass kritérium miatt az $a_0 + \sum_{n\geq 1} a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)$ trigonometrikus sor egyenletesen konvergens.

Definíció 8.5 (Fourier sor és Fourier együtthatók). Ha $f \in \mathcal{R}$, akkor az
$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x$$

és $n \geq 1$-re az

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x \quad \text{és} \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x$$

együtthatókkal definiált

$$a_0 + \sum_{n\geq 1} a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)$$

trigonometrikus sort az f függvény Fourier sorának nevezzük. Az a_n, b_n számok az f függvény Fourier együtthatói.

Állítás 8.6. *Ha $f \in \mathcal{R}$ egy kétszer folytonosan differenciálható függvény, akkor az $[a_n]$ és $[b_n]_{n\geq 1}$ Fourier együtthatók sorozatai nullsorozatot alkotnak és az f Fourier sora egyenletesen konvergens.*

Bizonyítás. Legyen $1 \leq n \in \mathbb{N}$, ekkor kétszer parciálisan integrálva

$$\pi a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x = \left[f(x)\frac{\sin(nx)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin(nx)\mathrm{d}x =$$
$$0 - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin(nx)\mathrm{d}x = -\frac{1}{n}\left[f'(x)\frac{-\cos(nx)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n^2}\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)\cos(nx)\mathrm{d}x =$$
$$0 - \frac{1}{n^2}\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)\cos(nx)\mathrm{d}x,$$

amiből

$$|a_n| \leq \frac{1}{\pi n^2}\int_{-\pi}^{\pi} |f''(x)|\, dx.$$

Ehhez hasonlóan kapjuk, hogy

$$|b_n| \leq \frac{1}{\pi n^2}\int_{-\pi}^{\pi} |f''(x)|\, dx,$$

de akkor a majoráns kritérium miatt a

$$\sum_{n\geq 1} |a_n| + |b_n|$$

numerikus sor konvergens és így az f függvény Fourier sora a Weierstrass kritérium miatt egyenletesen konvergens. □

Megjegyzés 8.7. Ha adott egy $\mathcal{R}$-beli függvény, akkor hozzárendelhetünk egy trigonometrikus sort: a Fourier sorát. Fordítva, egy trigonometrikus sorhoz, ha konvergens, hozzárendelhetjük az összegfüggvényét. Jelölje $\mathcal{R}_E$ azoknak az $\mathcal{R}$-beli függvényeknek a halmazát, amelyek Fourier sorai egyenletesen konvergensek. Például ha f egy 2π szerint periodikus és kétszer folytonosan differenciálható függvény, akkor $f \in \mathcal{R}_E$. Jelölje $\mathcal{T}_E$ az egyenletesen konvergens trigonometrikus sorok halmazát. Ezek szerint definiálhatunk egy

$$\Phi \colon \mathcal{R}_E \to \mathcal{T}_E$$

leképezést, ami egy $f \in \mathcal{R}_E$ függvényhez hozzárendeli a $\Phi(f)$ Fourier sorát, és a 8.2 tétel alapján egy

$$\Sigma\colon \mathcal{T}_E \to \mathcal{R}$$

leképezést, ami egy $\sigma \in \mathcal{T}_E$ trigonometrikus sorhoz hozzárendeli a $\Sigma(\sigma)$ összegfüggvényét. Szintén a 8.2 tétel alapján minden $\sigma \in \mathcal{T}_E$-re a $\Sigma(\sigma)$ összegfüggvény folytonos, $\mathcal{R}_E$-ben van és a $\Phi(\Sigma(\sigma))$ Fourier sor megegyezik σ-val. Ezt úgy is kifejezhetjük, hogy a $\Phi \circ \Sigma$ leképezés egyenlő a $\mathcal{T}_E$ halmaz $\mathrm{id}_{\mathcal{T}_E}$ identitás leképezésével, tehát

$$\Phi \circ \Sigma = \mathrm{id}_{\mathcal{T}_E}.$$

Például ebből következik, hogy

(1) Ha két egyenletesen konvergens trigonometrikus sor különbözik valamilyen együtthatóikban, akkor az összegfüggvényeik is különbözők.
(2) Minden egyenletesen konvergens trigonometrikus sor valamilyen folytonos $\mathcal{R}$-beli függvény Fourier sora.

A következőkben megmutatjuk, hogy a $\Sigma \circ \Phi$ leképezés megszorítása a folytonos $\mathcal{R}_E$-beli függvényekre, amiknek halmazát $\mathcal{R}_E^C$-vel jelölhetjük, egyenlő az identitás leképezéssel, azaz

$$\Sigma \circ \Phi|_{\mathcal{R}_E^C} = \mathrm{id}_{\mathcal{R}_E^C}.$$

Ebből az fog következni például, hogy

(1) Két folytonos $\mathcal{R}_E$-beli függvény ha csak kicsit is különbözik egymástól, a Fourier soraik különbözőek.
(2) Minden folytonos $\mathcal{R}_E$-beli függvény valamilyen egyenletesen konvergens trigonometrikus sornak az összegfüggvénye.

8.2. Fourier sor összegfüggvénye.

Az előbbiek szerint ha $f \in \mathcal{R}$ egy kétszer folytonosan differenciálható függvény, akkor az

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x \quad \text{és} \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x$$

együtthatókkal definiált trigonometrikus sor (tehát az f Fourier sora) egyenletesen konvergens, és ha g jelöli a folytonos összegfüggvényt, akkor

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\mathrm{d}x, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos(nx)\mathrm{d}x \quad \text{és} \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin(nx)\mathrm{d}x$$

is teljesül. Így az $f - g$ függvény Fourier együtthatói 0-val egyenlőek. A következő állításból az következik, hogy ekkor az f és g függvények megegyeznek.

Tétel 8.8. *Ha $h \in \mathcal{R}$ egy folytonos függvény és minden Fourier együtthatója 0, akkor h az azonosan 0 függvény.*

Bizonyítás. Ha a h függvény minden Fourier együtthatója 0, akkor minden

$$T(x) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cos(kx) + \beta_k \sin(kx)$$

ún. trigonometrikus polinomra (ahol $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ és $\beta_1, \beta_2, \ldots$ valós számok) azt kapjuk, hogy

$$\int_{-\pi}^{\pi} h(x)T(x)\mathrm{d}x = 0.$$

Tegyük fel, hogy a h függvény minden Fourier együtthatója 0, de h nem az azonosan 0 függvény. Ekkor esetleg valamilyen konstanssal megszorozva h-t és $h(x)$-ben x helyére $x+a$-t írva (valamilyen megfelelő $a \in \mathbb{R}$-re) és az így kapott függvényt még mindig h-val jelölve olyan h függvényt kapunk, aminek még mindig minden Fourier együtthatója 0, de létezik olyan $0 < \delta < \pi/2$, hogy minden $x \in [-\delta, \delta]$-ra $h(x) \geq 1$.

Tekintsük ekkor a

$$T(x) = 1 - \cos\delta + \cos x$$

trigonometrikus polinomot. Könnyen látható, hogy $T(x) \geq 1$ ha $x \in [-\delta, \delta]$ és $T(x) \leq 1$ ha $|x| \in [\delta, \pi/2]$.

Lemma 8.9. *Minden $n \in \mathbb{N}$-re $T(x)^n$ is egy trigonometrikus polinom, emellett $T(x)^n \geq 1$ ha $x \in [-\delta, \delta]$ és $T(x)^n \leq 1$ ha $|x| \in [\delta, \pi/2]$.*

Bizonyítás. Az állítás egyszerűen következik teljes indukcióval abból, hogy

$$\cos(kx)\cos(x) = \frac{1}{2}\left(\cos\left((k+1)\,x\right) + \cos\left((k-1)\,x\right)\right)$$

és

$$\sin(kx)\cos(x) = \frac{1}{2}\left(\sin\left((k+1)\,x\right) + \sin\left((k-1)\,x\right)\right),$$

ezért ha $T(x)^n$ trigonometrikus polinom, akkor

$$T(x)^{n+1} = T(x)^n\left(1 - \cos\delta + \cos x\right) = T(x)^n\left(1 - \cos\delta\right) + T(x)^n \cos x$$

is az.

És mivel $T(x) \geq 1$ ha $x \in [-\delta, \delta]$ és $T(x) \leq 1$ ha $|x| \in [\delta, \pi/2]$, ezért nyilván $T(x)^n \geq 1$ ha $x \in [-\delta, \delta]$ és $T(x)^n \leq 1$ ha $|x| \in [\delta, \pi/2]$ is teljesül. □

Megmutatjuk, hogy van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy

$$\int_{-\pi}^{\pi} h(x)T(x)^n\mathrm{d}x \neq 0,$$

ami ellentmond annak, hogy bármilyen trigonometrikus polinommal megszorozva h-t és utána $-\pi$-től π-ig integrálva 0-át kell kapjunk.

Legyen $n \in \mathbb{N}$ tetszőleges és legyen ε tetszőleges olyan szám, amire $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2} - \delta$. Ekkor persze $\delta < \delta + \varepsilon < \frac{\pi}{2}$ is teljesül. Így

$$\int_{-\pi}^{\pi} hT^n = \int_{-\pi}^{-\delta-\varepsilon} hT^n + \int_{-\delta-\varepsilon}^{-\delta} hT^n + \int_{-\delta}^{\delta} hT^n + \int_{\delta}^{\delta+\varepsilon} hT^n + \int_{\delta+\varepsilon}^{\pi} hT^n$$

és ezeket az összeadandókat a következő módon tudjuk becsülni. Legyen

$$K = \max_{x\in[-\pi,\pi]} \{|h(x)|\}.$$

Ekkor

$$\int_{-\delta}^{\delta} hT^n \geq \int_{-\delta}^{\delta} 1 = 2\delta,$$

$$\left|\int_{\delta}^{\delta+\varepsilon} hT^n\right| \leq \int_{\delta}^{\delta+\varepsilon} |h|\,|T^n| \leq \int_{\delta}^{\delta+\varepsilon} |h| \leq K\varepsilon, \quad \text{hasonlóan} \quad \left|\int_{-\delta-\varepsilon}^{-\delta} hT^n\right| \leq K\varepsilon,$$

és a

$$q_\varepsilon = \max_{x\in[\delta+\varepsilon,\pi]} \{|T(x)|\}$$

jelöléssel nyilván $0 \leq q_\varepsilon < 1$, ami miatt

$$\left|\int_{\delta+\varepsilon}^{\pi} hT^n\right| \leq \int_{\delta+\varepsilon}^{\pi} |h|\,|T^n| \leq q_\varepsilon^n K\pi \quad \text{és szintén} \quad \left|\int_{-\pi}^{-\delta-\varepsilon} hT^n\right| \leq q_\varepsilon^n K\pi.$$

Ezekből a becslésekből azt kapjuk, hogy

$$\int_{-\pi}^{\pi} hT^n \geq \int_{-\delta}^{\delta} hT^n - \left|\int_{-\pi}^{-\delta-\varepsilon} hT^n\right| - \left|\int_{-\delta-\varepsilon}^{-\delta} hT^n\right| - \left|\int_{\delta}^{\delta+\varepsilon} hT^n\right| - \left|\int_{\delta+\varepsilon}^{\pi} hT^n\right| \geq$$
$$2\delta - 2K\varepsilon - 2q_\varepsilon^n K\pi \geq \delta > 0$$

ha ε olyan, hogy $2K\varepsilon < \delta/2$ és ehhez az ε-hoz n olyan, hogy $2q_\varepsilon^n K\pi < \delta/2$. Így erre az n-re

$$\int_{-\pi}^{\pi} hT^n \neq 0,$$

ami ellentmondás, tehát a feltevés, miszerint h nem az azonosan 0 függvény, hamis. □

Tehát a következő állítást kapjuk.

Tétel 8.10. *Ha az $f \in \mathcal{R}$ folytonos függvény Fourier sora egyenletesen konvergens és a Fourier sor összegfüggvénye g, akkor $f = g$.*

Bizonyítás. A feltételekből következik, hogy g folytonos és $g \in \mathcal{R}$. Szintén következik, hogy

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\mathrm{d}x, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos(nx)\mathrm{d}x \quad \text{és} \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin(nx)\mathrm{d}x$$

teljesülnek, ahol $a_0, a_1, a_2, \ldots$ és $b_1, b_2, \ldots$ az f függvény Fourier együtthatói, azaz

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x \quad \text{és} \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x.$$

De ekkor az $f - g \in \mathcal{R}$ folytonos függvény Fourier együtthatói 0-val egyenlőek és akkor az előző 8.8 tétel miatt $f = g$. □

Az előbbieket felhasználva kapjuk például a következő állítást.

Következmény 8.11. *Kétszer folytonosan differenciálható és 2π szerint periodikus függvény Fourier sora előállítja a függvényt.*

Persze az ilyen függvények Fourier sora nem csak pontonként konvergens, hanem egyenletesen is. A következőkben azt vizsgáljuk, hogy milyen $\mathcal{R}$-beli, de nem feltétlenül kétszer folytonosan differenciálható függvények Fourier sora lesz olyan, hogy tart az illető függvényhez. Ilyenkor már nem biztos, hogy egyenletesen konvergens lesz a Fourier sor, ezért a pontonkénti konvergenciát fogjuk vizsgálni. Azt fogjuk látni, hogy ha a folytonosságnál egy kicsit erősebb, de a differenciálhatóságnál gyengébb feltétel már teljesül egy 2π szerint periodikus függvényre, akkor a Fourier sora már konvergál hozzá. Például egy 2π szerint periodikus, minden pontban balról és jobbról is differenciálható folytonos f függvény Fourier sora tart f-hez. De ennél gyengébb feltétel teljesülése esetén is, amikor a 2π szerint periodikus folytonos függvény ún. lokálisan Lipschitz tulajdonságú, a Fourier sora már pontonként tart a függvényhez.

Az érdekesség kedvéért azt is megjegyezzük, hogy van olyan folytonos $\mathcal{R}$-beli függvény, aminek a Fourier sora végtelen sok pontban divergens. Ennek ellenére bizonyos feltételeket kielégítő nem folytonos függvényeknek is konvergens a Fourier sora és a szakadási pontoktól eltekintve az illető függvényhez konvergál. Például a lokális Lipschitz feltétel általánosítható olyan nem folytonos függvényekre is, amiknek minden pontban van véges bal- és jobboldali határértéke. Az így kapott ún. Dini-Lipschitz feltételt kielégítő függvények Fourier sora mindenütt konvergens, de csak a szakadási pontoktól eltekintve konvergál a függvényhez (a szakadási pontokban a függvény bal- és jobboldali határértékeinek számtani közepéhez konvergál).

9. Fourier sorok pontonkénti konvergenciája

Ebben a fejezetben is jelölje $\mathcal{R}$ az olyan $\mathbb{R}$-en értelmezett 2π szerint periodikus függvények halmazát, amelyek bármely kompakt intervallumon Riemann integrálhatóak.

9.1. Dirichlet féle integrálformulák.

Az egyenletes konvergencia után vizsgáljuk meg a pontonkénti konvergenciát. Ehhez hasznos lesz a Fourier sorok részletösszegeit egyszerűbb formulákkal is kifejezni. Legyen $f \in \mathcal{R}$ és jelölje

$$s_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

az f függvény Fourier sorának n-dik részletösszegét. Ekkor mivel az a_n, b_n számok az f függvény Fourier együtthatói, ezért egy kis átalakítás után nyilvánvalóan

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{n} \cos(kt)\cos(kx) + \sin(kt)\sin(kx) \right) \mathrm{d}t.$$

Ezt egyszerűbben is írhatjuk, hiszen a $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$ egyenlőség felhasználásával

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{n} \cos\left(k(t-x)\right) \right) \mathrm{d}t.$$

Vezessük be a

$$D_n(y) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{n} \cos(ky)$$

jelölést.

Tétel 9.1 (Dirichlet féle integrálformulák). *Az $s_n(x)$ véges részletösszeget az alábbi formulákkal is kiszámolhatjuk.*

(1)

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t-x) f(t) \mathrm{d}t,$$

(2)

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} D_n(t) \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} \mathrm{d}t.$$

Bizonyítás. Az (1) formula rögtön következik az eddigiekből, mert

$$D_n(t-x) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{n} \cos\left(k(t-x)\right).$$

Az (1) formulából a (2)-őt a következő módon kaphatjuk. Helyettesítsünk $u = t - x$-et az (1)-es formulába. Ekkor

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} D_n(u) f(x+u) \mathrm{d}u.$$

Itt $u \mapsto D_n(u)$ és $u \mapsto f(x+u)$ is 2π szerint periodikus függvények, emiatt $u \mapsto D_n(u)f(x+u)$ is az, ezért mindegy, hogy melyik 2π hosszúságú intervallumon integrálunk, így

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(u)f(x+u)\mathrm{d}u.$$

Nyilvánvalóan

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} D_n(u)f(x+u)\mathrm{d}u + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} D_n(u)f(x+u)\mathrm{d}u,$$

és ennek az összegnek az első tagja az $u=-t$ helyettesítéssel az

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} D_n(u)f(x+u)\mathrm{d}u = \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{0} D_n(-t)f(x-t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} D_n(t)f(x-t)\mathrm{d}t$$

alakban is írható, mert $D_n(t) = D_n(-t)$ minden t-re.

Tehát

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} D_n(t)f(x-t)\mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} D_n(t)f(x+t)\mathrm{d}t,$$

amiből

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} D_n(t)\left(f(x-t)+f(x+t)\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} D_n(t)\frac{f(x-t)+f(x+t)}{2}\mathrm{d}t.$$

□

Persze a Dirichlet féle integrálformulák akkor lesznek jól használhatók, ha D_n-re találunk egy egyszerűbb formulát.

Lemma 9.2. *Ha $y \neq 2m\pi$, ahol $m \in \mathbb{Z}$, akkor*

$$D_n(y) = \frac{\sin\left((2n+1)\frac{y}{2}\right)}{\sin\left(\frac{y}{2}\right)}.$$

Emellett $D_n(2m\pi) = 1+2n$.

Bizonyítás. Ha $y \neq 2m\pi$, akkor szorozzuk meg a

$$D_n(y) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n}\cos(ky)$$

egyenlőséget $\sin\frac{y}{2}$-vel, akkor

$$D_n(y)\sin\frac{y}{2} = \sin\frac{y}{2} + 2\sin\frac{y}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos(ky) = \sin\frac{y}{2} + \sum_{k=1}^{n} 2\cos(ky)\sin\frac{y}{2} =$$

$$\sin\frac{y}{2} + \sum_{k=1}^{n}\sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)y\right) - \sin\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)y\right),$$

mert
$$2\cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)$$
teljesül minden $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$-re. De mivel
$$\sin\frac{y}{2} + \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)y\right) - \sin\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)y\right) = \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)y\right),$$
azt kapjuk, hogy
$$D_n(y)\sin\frac{y}{2} = \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)y\right),$$
amiből következik az állítás ha $y\neq 2m\pi$. Ha meg $y = 2m\pi$, akkor nyilván $D_n(y) = 1+2n$. □

9.2. Dini feltétel.

A következőkben azt vizsgáljuk meg, hogy egy $f\in\mathcal{R}$ függvény Fourier sora mikor konvergens egyáltalán, azaz hogy mikor konvergál pontonként valamilyen $S\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvényhez.

A 8.6 állításban azt is láttuk, hogy egy kétszer folytonosan differenciálható $\mathcal{R}$-beli függvényre az $[a_n]_{n\geq 0}$ és $[b_n]_{n\geq 1}$ Fourier együtthatók sorozatai nullsorozatot alkotnak. Ez akármilyen $\mathcal{R}$-beli függvényre is igaz, de egyébként is sokat fogjuk használni a következőt.

Állítás 9.3. *Ha $f\in\mathcal{R}$, akkor a Fourier együtthatók $[a_n]_{n\geq 0}$ és $[b_n]_{n\geq 1}$ sorozatai nullsorozatot alkotnak.*

Bizonyítás. Tekintsük $n\geq 1$-re az
$$\alpha_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x$$
számokból álló $[\alpha_n]_{n\geq 1}$ sorozatot. Mivel f Riemann integrálható, ezért minden $\varepsilon>0$-hoz létezik olyan
$$-\pi = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = \pi$$
felosztása a $[-\pi,\pi]$ intervallumnak, hogy a
$$\sum_{i=1}^{k} \inf\{f(x) : x\in[t_{i-1},t_i]\}\,(t_i - t_{i-1})$$
közelítő összeg ε-nál közelebb van $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x$-hez.

Ha minden $i=1,\ldots,k$-ra a $g_i\colon[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ függvényt úgy definiáljuk, hogy
$$g_i(x) = \inf\{f(x) : x\in[t_{i-1},t_i]\}$$

ha $x \in [t_{i-1}, t_i]$ és $g_i(x) = 0$ ha $x \notin [t_{i-1}, t_i]$, akkor a fenti közelítő összeg

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{i=1}^{k} g_i(x)\mathrm{d}x$$

alakban is írható. Legyen

$$g = \sum_{i=1}^{k} g_i.$$

Akkor az is könnyen látszik, hogy az $f|_{[-\pi,\pi]} - g$ függvény nemnegatív és ezek szerint

$$0 \leq \int_{-\pi}^{\pi} (f - g) < \varepsilon.$$

Tehát

$$\alpha_n = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - g(x)) \cos(nx)\mathrm{d}x + \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos(nx)\mathrm{d}x$$

és így

$$\begin{aligned}
|\alpha_n| \leq \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - g(x)) \cos(nx)\mathrm{d}x \right| + \left| \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos(nx)\mathrm{d}x \right| \leq \\
\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - g(x)) \left|\cos(nx)\right| \mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{k} \left| \int_{-\pi}^{\pi} g_i(x) \cos(nx)\mathrm{d}x \right| \leq \\
\varepsilon \int_{-\pi}^{\pi} \left|\cos(nx)\right| \mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{k} \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} g_i(x) \cos(nx)\mathrm{d}x \right| \leq \\
\varepsilon \int_{-\pi}^{\pi} 1\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{k} \left| \inf\{f(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]\} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \cos(nx)\mathrm{d}x \right| = \\
\varepsilon 2\pi + \sum_{i=1}^{k} \left| \inf\{f(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]\} \frac{\sin(nt_i) - \sin(nt_{i-1})}{n} \right| \leq \\
\varepsilon 2\pi + \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{k} \left|\inf\{f(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]\}\right| \leq 7\varepsilon
\end{aligned}$$

ha n elég nagy. Tehát $\alpha_n \to 0$ ha $n \to \infty$.

Hasonlóan kapjuk a $\beta_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x$ jelöléssel, hogy

$$|\beta_n| \leq \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - g(x))\sin(nx)\mathrm{d}x \right| + \left| \int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin(nx)\mathrm{d}x \right| \leq$$

$$\varepsilon \int_{-\pi}^{\pi} |\sin(nx)|\,\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{k} \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} g_i(x)\sin(nx)\mathrm{d}x \right| \leq$$

$$\varepsilon 2\pi + \sum_{i=1}^{k} \left| \inf\{f(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]\} \frac{-\cos(nt_i) + \cos(nt_{i-1})}{n} \right| \leq 7\varepsilon$$

ha n elég nagy, tehát $\beta_n \to 0$ ha $n \to \infty$. □

Szükségünk lesz a következő lemmára is. Emlékeztetünk a

$$D_n(y) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(ky)$$

jelölésre.

Lemma 9.4. *Minden $n \geq 0$-ra*

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} D_n(t)\mathrm{d}t = 1.$$

Bizonyítás. A konstans 1 függvény Fourier együtthatói

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1\mathrm{d}x = 1$$

és

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[\frac{-\cos(nx)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Ezért minden $n \geq 0$-ra az s_n részletösszeg egyenlő az azonosan 1 függvénnyel. Így a Dirichlet féle integrálformulát alkalmazva a konstans 1 függvényre, minden $x \in \mathbb{R}$-re

$$1 = s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} D_n(t)\frac{1+1}{2}\mathrm{d}t.$$

□

Tehát ha $S\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy adott függvény, akkor minden $x \in \mathbb{R}$-re

$$S(x) = S(x)\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} D_n(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} D_n(t)S(x)\mathrm{d}t$$

és ezt hozzáadva és le is vonva a 9.1 tételbeli (2)-es Dirichlet féle integrálformula jobb oldalából azt kapjuk, hogy minden $x \in \mathbb{R}$-re

$$s_n(x) = S(x) + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi D_n(t) \left(\frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} - S(x) \right) dt.$$

Legyen $\delta \in (0, \pi)$ és legyen

$$R_{n,\delta}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\delta D_n(t) \left(\frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} - S(x) \right) \mathrm{d}t$$

és

$$\varepsilon_{n,\delta}(x) = \frac{1}{\pi} \int_\delta^\pi D_n(t) \left(\frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} - S(x) \right) \mathrm{d}t.$$

Ekkor persze minden $x \in \mathbb{R}$-re

$$s_n(x) = S(x) + R_{n,\delta}(x) + \varepsilon_{n,\delta}(x).$$

Lemma 9.5. *Legyen $\delta > 0$ és $x \in \mathbb{R}$ rögzített. Ekkor $\varepsilon_{n,\delta}(x) \to 0$, ha $n \to \infty$.*

Bizonyítás. Az egyszerűség kedvéért legyen $g_x(t) = \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - S(x)$. Mivel

$$D_n(t) = \frac{\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)},$$

ezért

$$\varepsilon_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_\delta^\pi \frac{\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} g_x(t) \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi} \int_\delta^\pi \sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right) \frac{g_x(t)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \mathrm{d}t.$$

Nyilván

$$\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right) = \sin(nt)\cos\left(\frac{t}{2}\right) + \cos(nt)\sin\left(\frac{t}{2}\right)$$

és így

$$\varepsilon_{n,\delta}(x) = \frac{1}{\pi} \int_\delta^\pi \sin(nt)\cos\left(\frac{t}{2}\right) \frac{g_x(t)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \mathrm{d}t + \frac{1}{\pi} \int_\delta^\pi \cos(nt)\sin\left(\frac{t}{2}\right) \frac{g_x(t)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \mathrm{d}t =$$
$$\frac{1}{\pi} \int_\delta^\pi \sin(nt)\,\mathrm{ctg}\left(\frac{t}{2}\right) g_x(t) \mathrm{d}t + \frac{1}{\pi} \int_\delta^\pi \cos(nt)\, g_x(t) \mathrm{d}t.$$

De ha a $[\delta, \pi]$ intervallumon értelmezett $\mathrm{ctg}\left(\frac{t}{2}\right) g_x(t)$ függvényt és $g_x(t)$ függvényt azonosan 0-ként kiterjesztjük a $[-\pi, \pi]$ intervallumra, akkor $\varepsilon_{n,\delta}(x)$ egyenlő két $\mathcal{R}$-beli függvény két n-dik Fourier együtthatójának összegével. Az erről szóló 9.3 tétel miatt ezért $\varepsilon_{n,\delta}(x) \to 0$ ha $n \to \infty$. □

Legyen tehát $S \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy adott függvény. Ezek szerint egy rögzített $x \in \mathbb{R}$-re az $[s_n(x)]_{n \geq 0}$ számsorozat pontosan akkor konvergál $S(x)$-hez, ha az $[R_n(x)]_{n \geq 0}$ számsorozat konvergál 0-hoz. Ez a gyakorlatban nagyon nehezen használható feltétel, ezért vezetjük be a következő kicsit gyakorlatiasabb definíciót és bizonyítjuk be az utána következő állítást.

Definíció 9.6 (Dini feltétel). Egy $f \in \mathcal{R}$ függvény egy $x \in \mathbb{R}$ pontban kielégíti a Dini feltételt az $S(x)$ számmal, ha van olyan $\delta(x) > 0$, hogy az

$$\int_0^{\delta(x)} \frac{1}{t} \left| \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} - S(x) \right| \mathrm{d}t$$

impropriius integrál konvergens.

Állítás 9.7. *Ha egy $f \in \mathcal{R}$ függvény egy $x \in \mathbb{R}$ pontban kielégíti a Dini feltételt az $S(x)$ számmal, akkor az $[s_n(x)]_{n\geq 0}$ számsorozat konvergál $S(x)$-hez.*

Bizonyítás. Az egyszerűség kedvéért legyen $g_x(t) = \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - S(x)$. Mivel

$$D_n(t) = \frac{\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)},$$

ezért

$$R_{n,\delta}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} \frac{g_x(t)}{t} \frac{t}{\sin(\frac{t}{2})} \sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right) \mathrm{d}t.$$

Figyelembe véve, hogy $\lim_{t\to 0} \frac{\sin\frac{t}{2}}{t} = \frac{1}{2}$, a $\frac{t}{\sin\frac{t}{2}}$ függvény korlátos a $(0, \delta]$ intervallumon, tehát

$$\left| \frac{t}{\sin\frac{t}{2}} \right| \leq K$$

valamilyen $K \in \mathbb{R}$-re és minden $t \in (0, \delta]$-ra.

Így

$$\left| \frac{g_x(t)}{t} \frac{t}{\sin\frac{t}{2}} \right| \leq K \left| \frac{g_x(t)}{t} \right|$$

és ezért a Dini feltétel miatt az

$$\int_0^{\delta(x)} \left| \frac{g_x(t)}{t} \frac{t}{\sin\frac{t}{2}} \right| \mathrm{d}t$$

integrál véges.

Ekkor mivel nyilván

$$\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right) = \sin(nt)\cos\left(\frac{t}{2}\right) + \cos(nt)\sin\left(\frac{t}{2}\right),$$

azonosan 0-ként kiterjesztve a $\frac{g_x(t)}{t}\frac{t}{\sin\frac{t}{2}}$ függvényt a $[-\pi, \pi]$ intervallumra azt kapjuk, hogy $R_{n,\delta}(x)$ egyenlő két $\mathcal{R}$-beli függvény két n-dik Fourier együtthatójának összegével, tehát a 9.3 tétel miatt $R_{n,\delta}(x)$ tart a 0-hoz, ha $n \to \infty$.

Végül amiatt, hogy

$$s_n(x) = S(x) + R_{n,\delta}(x) + \varepsilon_{n,\delta}(x)$$

és $\varepsilon_{n,\delta}(x)$ és $R_{n,\delta}(x)$ is tart a 0-hoz ha $n \to \infty$, az $[s_n(x)]$ számsorozat tart $S(x)$-hez ha $n \to \infty$. □

Következmény 9.8. *Legyen $f \in \mathcal{R}$ és $S\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy függvény. Ha minden $x \in \mathbb{R}$-ben az f kielégíti a Dini feltételt az $S(x)$ számmal, akkor az f függvény Fourier sora pontonként konvergál az S függvényhez.*

Persze a Dini feltétel sem úgy néz ki, mint amit nagyon könnyű lenne használni. A következőkben az lesz a célunk, hogy a gyakorlatban még jobban használható feltételt találjunk egy Fourier sor pontonkénti konvergenciájára.

A folytonos függvényeken belül egy gyakran használt függvényosztály például a Lipschitz feltételt kielégítő függvények halmaza. Egy $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény Lipschitz tulajdonságú, ha van olyan $K > 0$ szám, hogy minden $x, y \in \mathbb{R}$-re

$$|f(x) - f(y)| \leq K\,|x - y|\,.$$

Ennek egy lokális változata a következő.

Definíció 9.9 (Lokális Lipschitz feltétel). Az f függvény kielégíti a lokális Lipschitz feltételt az x_0 pontban, ha van olyan $K, \delta, \alpha > 0$ hogy minden $|x - x_0| \leq \delta$-ra

$$|f(x) - f(x_0)| \leq K|x - x_0|^{\alpha}.$$

Megjegyzés 9.10.

(1) Ha egy függvény egy pontban kielégíti a lokális Lipschitz feltételt, akkor ott a függvény folytonos.
(2) Ha egy függvény egy x_0 pontban folytonos és balról is és jobbról is differenciálható, akkor az x_0-ban kielégíti a lokális Lipschitz feltételt $\alpha = 1$-el, mert akkor a különbségi hányados függvény korlátos az x_0 egy környezetében.

Szeretnénk nem csak folytonos függvények Fourier sorait vizsgálni, ezért általánosítjuk a lokális Lipschitz feltételt nem folytonos, de még viszonylag egyszerű típusú szakadási pontokkal rendelkező függvényekre.

Definíció 9.11 (Reguláris pont). Legyen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy függvény. Az $x \in \mathbb{R}$ az f függvény reguláris pontja, ha léteznek és végesek a $\lim_{t\to x-0} f(t)$ és $\lim_{t\to x+0} f(t)$ bal- és jobboldali x-beli határértékek.

Megjegyzés 9.12. Ha f folytonos x-ben, akkor nyilván reguláris is x-ben. Vagy ha például f egy monoton függvény az x pont valamilyen $\delta > 0$ sugarú környezetében, akkor f reguláris is x-ben.

A lokális Lipschitz feltétel általánosítása nem feltétlenül folytonos függvényekre a következő.

Definíció 9.13 (Lokális Dini-Lipschitz feltétel). Az f függvény kielégíti a lokális Dini-Lipschitz feltételt az x_0 pontban, ha x_0 reguláris pontja f-nek és van olyan $K, \delta, \alpha > 0$ hogy minden $x \in (0, \delta]$-ra

$$\left| f(x_0 - x) - \lim_{t \to x_0 - 0} f(t) \right| \leq K x^\alpha$$

és

$$\left| f(x_0 + x) - \lim_{t \to x_0 + 0} f(t) \right| \leq K x^\alpha.$$

Megjegyzés 9.14. Ha egy függvény egy pontban kielégíti a lokális Lipschitz feltételt, akkor ott a lokális Dini-Lipschitz feltételt is kielégíti.

Tétel 9.15. *Ha $f \in \mathcal{R}$ és f minden $x \in \mathbb{R}$-ben kielégíti a lokális Dini-Lipschitz feltételt, akkor a Fourier sora mindenhol konvergens és a Fourier sor összege egy $x \in \mathbb{R}$-ben egyenlő az x-beli bal- és jobboldali határértékek átlagával, tehát*

$$\frac{\lim_{t \to x - 0} f(t) + \lim_{t \to x + 0} f(t)}{2} \text{-}vel.$$

Bizonyítás. Definiáljuk az $S \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt úgy, hogy

$$S(x) = \frac{\lim_{t \to x - 0} f(t) + \lim_{t \to x + 0} f(t)}{2}.$$

Tetszőleges $x \in \mathbb{R}$-re és megfelelő $\delta(x)$-re az

$$\int_0^{\delta(x)} \frac{1}{t} \left| \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} - S(x) \right| \mathrm{d}t$$

improprius integrált fogjuk felülről becsülni, és akkor az előző 9.7 állításból következik a tétel.

Mivel az f minden $x \in \mathbb{R}$-ben kielégíti a lokális Dini-Lipschitz feltételt, létezik a megfelelő $K(x), \delta(x), \alpha(x) > 0$, hogy minden $y \in (0, \delta(x)]$-re

$$\left| f(x - y) - \lim_{t \to x - 0} f(t) \right| \leq K(x) y^{\alpha(x)}$$

és

$$\left| f(x + y) - \lim_{t \to x + 0} f(t) \right| \leq K(x) y^{\alpha(x)}.$$

De akkor nyilvánvalóan minden $y \in (0, \delta(x)]$-re

$$\left| \frac{f(x+y) + f(x-y)}{2} - S(x) \right| =$$

$$\left| \frac{f(x+y) + f(x-y)}{2} - \frac{\lim_{t \to x - 0} f(t) + \lim_{t \to x + 0} f(t)}{2} \right| \leq$$

$$\frac{1}{2} \left| f(x - y) - \lim_{t \to x - 0} f(t) \right| + \frac{1}{2} \left| f(x + y) - \lim_{t \to x + 0} f(t) \right| \leq 2 \frac{1}{2} K(x) y^{\alpha(x)},$$

ezért minden $y \in (0, \delta(x)]$-re

$$\frac{1}{y}\left|\frac{f(x+y)+f(x-y)}{2} - S(x)\right| \le K(x)y^{\alpha(x)-1}.$$

Az $\alpha(x) > 0$, ezért $\alpha(x) - 1 > -1$ és így az

$$\int_0^{\delta(x)} \frac{1}{t}\left|\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - S(x)\right| \mathrm{d}t$$

improprius integrál konvergens. □

Megjegyzés 9.16. Az eddigiekből könnyen következnek például az alábbiak.

(1) Ha $f \in \mathcal{R}$ és az f egy $x_0 \in \mathbb{R}$-ben kielégíti a lokális Lipschitz feltételt, akkor az f függvény Fourier sora konvergens x_0-ban és ott az összege egyenlő $f(x_0)$-al.
(2) Ha $f \in \mathcal{R}$ és az f egy $x_0 \in \mathbb{R}$-ben folytonos és balról is és jobbról is differenciálható, akkor az f függvény Fourier sora konvergens x_0-ban és ott az összege egyenlő $f(x_0)$-al.
(3) Ha $f \in \mathcal{R}$ egy differenciálható függvény, akkor a Fourier sora pontonként tart f-hez.

Példa 9.17. A következő függvényeket értelemszerűen csak a $[-\pi, \pi]$ vagy $[0, 2\pi]$ intervallumban adjuk meg és onnan periodikusan terjesztjük ki az $\mathbb{R}$-re.

(1) $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ ha $x \in (0, 2\pi)$ és $f(0) = f(2\pi) = 0$, ekkor

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n},$$

(2) $f(x) = \operatorname{sgn}(\sin x)$, ekkor

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin((2n-1)x)}{2n-1},$$

(3) $f(x) = x$ ha $x \in (-\pi, \pi)$ és $f(\pm\pi) = 0$, ekkor

$$f(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{\sin(nx)}{n},$$

(4) $f(x) = \frac{(\pi - x)^2}{4}$ ha $x \in [0, 2\pi]$, ekkor

$$f(x) = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}.$$

Végül a következő tétel azért érdekes, mert azt állítja, hogy bár látszólag egy f függvény Fourier sorának egy $x_0 \in \mathbb{R}$ pontban való konvergenciája függ az f egész $[-\pi, \pi]$ intervallumon való viselkedésétől (hiszen a Fourier együtthatókat úgy számoljuk ki, hogy egy 2π hosszúságú intervallumon integrálunk), valójában az f-nek csak egy x_0 körüli tetszőlegesen kicsi környezetére való megszorításától függ.

Tétel 9.18. *Legyenek $f_1 \in \mathcal{R}$ és $f_2 \in \mathcal{R}$. Ha valamilyen $x_0 \in \mathbb{R}$-re és valamilyen kis $\delta > 0$-ra $f_1(t) = f_2(t)$ minden $t \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ esetén, akkor az f_1 és f_2 Fourier sorai az x_0-ban egyszerre konvergensek vagy divergensek és konvergencia esetén a két Fourier sor összege x_0-ban azonos.*

Bizonyítás. Feltehető, hogy $\delta < \pi$. Legyenek

$$R_n(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_0^\delta D_n(t)\frac{f(x_0-t)+f(x_0+t)}{2}\mathrm{d}t$$

és

$$\varepsilon_n(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_\delta^\pi D_n(t)\frac{f(x_0-t)+f(x_0+t)}{2}\mathrm{d}t,$$

ekkor nyilvánvalóan

$$s_n(x_0) = R_n(x_0) + \varepsilon_n(x_0).$$

Megmutatjuk, hogy rögzített x_0-ra az $[\varepsilon_n(x_0)]$ számsorozat 0-hoz tart ha $n \to \infty$. Mivel

$$D_n(y) = \frac{\sin\left((2n+1)\frac{y}{2}\right)}{\sin\left(\frac{y}{2}\right)}$$

ha $y \neq 2k\pi$ ahol $k \in \mathbb{Z}$, ezért

$$\varepsilon_n(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_\delta^\pi \frac{\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)\left(f(x_0-t)+f(x_0+t)\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\mathrm{d}t.$$

Legyen g az a $[-\pi,\pi]$ intervallumon értelmezett függvény, amire

$$g(t) = 0 \qquad \text{ha } -\pi \le t < \delta \text{ és}$$

$$g(t) = \frac{f(x_0-t)+f(x_0+t)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \quad \text{ha } \delta \le t \le \pi.$$

Ekkor

$$\varepsilon_n(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_\delta^\pi g(t)\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi g(t)\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t.$$

De mivel

$$\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right) = \sin(nt)\cos\left(\frac{t}{2}\right) + \cos(nt)\sin\left(\frac{t}{2}\right),$$

ezért

$$\varepsilon_n(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi g(t)\sin(nt)\cos\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi g(t)\cos(nt)\sin\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t,$$

amiből az látszik, hogy rögzített x_0-ra $\varepsilon_n(x_0)$ megegyezik a

$$g(t)\cos\left(\frac{t}{2}\right) \qquad \text{és} \qquad g(t)\sin\left(\frac{t}{2}\right)$$

függvények egy-egy n-edik Fourier együtthatójának összegével. Az erről szóló 9.3 tétel szerint ezek az együtthatók nullsorozatot alkotnak, tehát rögzített x_0-ra az $[\varepsilon_n(x_0)]$ számsorozat 0-hoz tart ha $n \to \infty$.

Ezek szerint az $[s_n(x_0)]$ számsorozat pontosan akkor konvergens, amikor az $[R_n(x_0)]$ számsorozat konvergens, és ezek határértékei is megegyeznek. De $R_n(x_0)$ definíciójából látszik, hogy az csak az f függvény $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ intervallumra való megszorításától függ. $\square$

Tartalomjegyzék