Gradiens, rotáció, divergencia

Legyen $X \subset \mathbb{R}^3$ egy tetszőleges nyílt részhalmaz. Az X-en értelmezett akárhányszor differenciálható függvények (más néven skalármezők) halmazát jelölje $\mathcal{F}(X)$, az X-en értelmezett akárhányszor differenciálható vektormezők halmazát jelölje $\mathcal{V}(X)$. Ekkor $\mathcal{F}(X)$ és $\mathcal{V}(X)$ is vektorterek $\mathbb{R}$ felett.

A következőkben az X-en lehetséges vektormezőket szeretnénk osztályozni. Definiáljuk a következő lineáris leképezéseket.

Definíció 0.1.

(1) $\operatorname{grad} : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{V}(X)$, minden $u \in X$-re

$$\operatorname{grad} f(u) = (\partial_x f(u), \partial_y f(u), \partial_z f(u))$$

az $f \in \mathcal{F}(X)$ skalármező *gradiense* u-ban,

(2) $\operatorname{rot} : \mathcal{V}(X) \to \mathcal{V}(X)$, minden $u \in X$-re

$$\operatorname{rot} F(u) = (\partial_y F_3(u) - \partial_z F_2(u), \partial_z F_1(u) - \partial_x F_3(u), \partial_x F_2(u) - \partial_y F_1(u))$$

az $F \in \mathcal{V}(X)$ vektormező *rotációja* u-ban,

(3) $\operatorname{div} : \mathcal{V}(X) \to \mathcal{F}(X)$, minden $u \in X$-re

$$\operatorname{div} F(u) = \partial_x F_1(u) + \partial_y F_2(u) + \partial_z F_3(u)$$

az $F \in \mathcal{V}(X)$ vektormező *divergenciája* u-ban.

Szintén vezessük be a következő jelöléseket:

$$d^1 = \operatorname{grad}, d^2 = \operatorname{rot}, d^3 = \operatorname{div},$$

ezen kívül jelölje 0 a csak a nullvektorból álló vektorteret és $d^0 \colon 0 \to \mathcal{F}(X)$ és $d^4 \colon \mathcal{F}(X) \to 0$ legyenek az azonosan 0 lineáris leképezések. Tekintsük a következő diagrammot.

$$0 \xrightarrow[d^0]{0} \mathcal{F}(X) \xrightarrow[d^1]{\operatorname{grad}} \mathcal{V}(X) \xrightarrow[d^2]{\operatorname{rot}} \mathcal{V}(X) \xrightarrow[d^3]{\operatorname{div}} \mathcal{F}(X) \xrightarrow[d^4]{0} 0$$

Állítás 0.2. *Ezekre a lineáris leképezésekre teljesül, hogy*

$$\operatorname{rot} \circ \operatorname{grad} = 0,$$

$$\operatorname{div} \circ \operatorname{rot} = 0.$$

Definíció 0.3. Egy $F \in \mathcal{V}(X)$ vektormező *örvénymentes* ha $\operatorname{rot} F = 0$, tehát ha $F \in \ker d^2$, és *forrásmentes* ha $\operatorname{div} F = 0$, tehát ha $F \in \ker d^3$. Egy $F \in \mathcal{V}(X)$ vektormező *skalárpotenciálos* ha $F \in \operatorname{im} d^1$ és *vektorpotenciálos* ha $F \in \operatorname{im} d^2$.

Tehát minden skalárpotenciálos vektormező örvénymentes és minden vektorpotenciálos vektormező forrásmentes.

Tehát a diagramm jelöléseivel

$$\operatorname{im} d^i \subset \ker d^{i+1}$$

minden $0 \leq i \leq 3$-ra. Mivel tetszőleges $X \subset \mathbb{R}^3$ nyílt halmazra

$$\operatorname{im} d^i \subset \ker d^{i+1}$$

minden $0 \leq i \leq 3$-ra, a vektormezők osztályozásánál, ami szorosan összefügg az X halmaz topológiájával, mindig az az érdekes kérdés, hogy $\operatorname{im} d^i$ mennyire "kisebb", mint $\ker d^{i+1}$ egy adott $X \subset \mathbb{R}^3$ nyílt halmaz esetén. Más szóval mi a dimenziója a

$$\ker d^{i+1} / \operatorname{im} d^i$$

$\mathbb{R}$ feletti vektortérnek?

Definíció 0.4. Jelölje rögzített $X \subset \mathbb{R}^3$-ra

$$\mathcal{D}_i(X)$$

a $\ker d^{i+1} / \operatorname{im} d^i$ vektortér dimenzióját.

Példák 0.5. Legyen $X \subset \mathbb{R}^3$ egy tetszőleges nyílt halmaz.

(1) Az $F(x, y, z) = (1, 0, 0)$ konstans vektormezőre

$$\operatorname{rot} F = 0$$

és F skalárpotenciálos is, mert

$$\operatorname{grad} f = F$$

ha például $f(x, y, z) = x$. Az F forrásmentes, mert

$$\operatorname{div} F = 0$$

és vektorpotenciálos is, mert

$$\operatorname{rot}(0, 0, y) = (1, 0, 0) = F(x, y, z)$$

minden $(x, y, z) \in X$-re.

(2) Az $F(x, y, z) = (x, y, z)$ vektormezőre

$$\operatorname{div} F(x, y, z) = 3,$$

$$\operatorname{rot} F(x, y, z) = (0, 0, 0).$$

Tehát F nem lehet vektorpotenciálos, de F skalárpotenciálos, mert

$$\operatorname{grad} x^2/2 + y^2/2 + z^2/2 = F(x, y, z).$$

(3) Az $F(x, y, z) = (y, 0, 0)$ vektormezőre

$$\operatorname{rot} F(x, y, z) = (0, 0, -1).$$

(4) Az $F(x,y,z) = (-y,x,0)$-ra

$$\operatorname{div} F(x,y,z) = 0,$$

tehát F forrásmentes és vektorpotenciálos, mert

$$\operatorname{rot}(0,0,-y^2/2 - x^2/2) = F(x,y,z).$$

De

$$\operatorname{rot} F(x,y,z) = (0,0,2),$$

ezért F nem skalárpotenciálos.

(5) Legyen $\varphi\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ egy akárhányszor differenciálható függvény. Ekkor az

$$F(x,y,z) = \varphi(\sqrt{x^2+y^2+z^2})(x,y,z)$$

vektormezőnek skalárpotenciálja lesz valamilyen $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ differenciálható függvénnyel az

$$f(\sqrt{x^2+y^2+z^2}),$$

ha

$$f'(t) = t\varphi(t).$$

A következő állítással azt tudjuk megvizsgálni, hogy egy vektormező mikor skalárpotenciálos.

Állítás 0.6. *Legyen $F \in \mathcal{V}(X)$ egy vektormező.*

(1) *Ha F skalárpotenciálos, tehát $\operatorname{grad} f = F$ valamilyen $f \in \mathcal{F}(X)$ függvényre, akkor minden X-beli $\gamma\colon [a,b] \to X$ útra az $\int_\gamma F$ vonalintegrál csak γ végpontjaitól függ és megegyezik $f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$-val.*

(2) *Ha az $\int_\gamma F$ vonalintegrál csak γ végpontjaitól függ, akkor tetszőleges rögzített $x_1 \in X_1, \ldots, x_n \in X_n$-re, ahol az X_i-k az X összefüggőségi komponensei, az*

$$f(x) = \begin{cases} \int_0^1 \langle F\circ\gamma(t), \gamma'(t)\rangle dt & \text{ha } x \in X_1 \text{ és } \gamma\colon [0,1] \to X_1,\ \gamma(0) = x_1,\ \gamma(1) = x \\ \vdots & \vdots \\ \int_0^1 \langle F\circ\gamma(t), \gamma'(t)\rangle dt & \text{ha } x \in X_n \text{ és } \gamma\colon [0,1] \to X_n,\ \gamma(0) = x_n,\ \gamma(1) = x \end{cases}$$

definícióval adott $f\colon X \to \mathbb{R}$ függvény egy skalárpotenciálja F-nek.

Definíció 0.7. Legyen $F \in \mathcal{V}(X)$ egy vektormező. Az F *konzervatív*, ha bármilyen X-beli γ útra az $\int_\gamma F$ vonalintegrál csak γ végpontjaitól függ.

Persze az, hogy egy vektormező konzervatív, ekvivalens azzal, hogy skalárpotenciálos. Tehát minden konzervatív vektormező örvénymentes.

Arra, hogy egy vektormező mikor vektorpotenciálos, a következő nyújt segítséget.

Tétel 0.8. *Legyen $G \in \mathcal{V}(X)$ egy vektormező és legyen Y egy felület X-ben aminek esetleg több határoló görbéje is van.*

(1) *Ha* $G = \operatorname{rot} F$ *egy* F *vektormezőre, akkor*

$$\iint_Y G^\perp dY = \int_{\gamma_1} F + \cdots + \int_{\gamma_n} F$$

ahol $G^\perp$ *jelöli a* G *vektormezőnek az* Y *-ra merőleges, az* Y *paraméterezése által meghatározott irányba mutató komponensét és a* $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ *görbék az* Y *felület határát paraméterezik* X *-ben úgy, hogy a görbék irányításai kompatibilisek az* Y *paraméterezésével.*

(2) *Ha* G *vektorpotenciálos és* Y *egy zárt felület, akkor*

$$\iint_Y G^\perp dY = 0.$$

(3) *Ha* G *örvénymentes, akkor*

$$\int_\gamma G = 0,$$

ahol a γ *görbe az* Y *felület határát paraméterezi* X *-ben.*

És végül egy tétel a divergenciáról:

Tétel 0.9. *Ha* Y *egy* X *-beli* Z *nyílt halmaz határa, akkor*

$$\iiint_Z \operatorname{div} G \, dZ = -\iint_Y G^\perp dY.$$

$\mathcal{D}_0(X)$ kiszámítása

Állítás 0.10. *Minden* $X \subset \mathbb{R}^3$ *nyílt halmazra*

$$\mathcal{D}_0(X),$$

vagyis a 0 *gradiensű függvények alterének dimenziója egyenlő* X *összefüggőségi komponenseinek számával.*

$\mathcal{D}_1(X)$ kiszámítása

Állítás 0.11. *Ha minden* X *-beli zárt görbe határol* X *-ben valamilyen felületet, akkor* $\mathcal{D}_1(X) = 0$.

Az hogy egy $X \subset \mathbb{R}^3$ nyílt halmazon minden örvénymentes vektormező skalárpotenciálos, nem feltétlenül jelenti azt, hogy X egyszeresen összefüggő, azaz minden hurok ponttá deformálható X-ben. Ennél a $\mathcal{D}_1(X) = 0$ feltétel gyengébb. Például az Alexander féle gömb komplementerének egyik komponense olyan nyílt halmaz, ami nem egyszeresen összefüggő, de $\mathcal{D}_1(X) = 0$. Persze ha X egyszeresen összefüggő, akkor $\mathcal{D}_1(X) = 0$ teljesül.

Tétel 0.12. *Ha $X = \mathbb{R}^3$, akkor minden örvénymentes vektormező skalárpotenciálos és minden forrásmentes vektormező vektorpotenciálos, tehát*

$$\mathcal{D}_1(\mathbb{R}^3) = \mathcal{D}_2(\mathbb{R}^3) = 0.$$

Ha $X \subset \mathbb{R}^3$, akkor egy $\mathbb{R}^3$-on értelmezett vektormező egy X-en értelmezett vektormezőt is ad. Ha azt akarjuk bebizonyítani, hogy $\mathcal{D}_1(X) \geq 1$, akkor örvénymentes, de nem skalárpotenciálos vektormezőket kell keresnünk. Például olyan vektormezőket keresünk X-en, amik örvénymentesek X-en, de nem azok az egész $\mathbb{R}^3$-on.

Állítás 0.13. *Legyen X a standard tömör tórusz $\mathbb{R}^3$-ban. Az $F(x,y,z) = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0)$ vektormező örvénymentes, de nem skalárpotenciálos. Tehát*

$$\mathcal{D}_1(X) \geq 1.$$

Könnyen látható, hogy ez az F vektormező nem terjed ki differenciálhatóan $\mathbb{R}^3$-ra. Belátható, hogy $\mathcal{D}_1(X) = 1$, ami azzal ekvivalens, hogy a tömör tóruszon bármely két F_1, F_2 örvénymentes vektormezőhöz létezik olyan $\lambda \in \mathbb{R}$ szám, hogy a

$$F_1 - \lambda F_2$$

vektormező skalárpotenciálos.

$\mathcal{D}_2(X)$ kiszámítása

Ha pedig azt akarjuk bizonyítani, hogy $\mathcal{D}_2(X) \geq 1$, akkor forrásmentes, de nem vektorpotenciálos vektormezőket keresünk. Például a standard tömör tóruszon értelmezett $F(x,y,z) = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0)$ vektormezőre $\operatorname{div} F(x,y,z) = 0$ is teljesül, de

$$\operatorname{rot}(0, 0, -\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)) = F(x,y,z),$$

tehát F vektorpotenciálos. Belátható, hogy ha X a tömör tórusz, akkor $\mathcal{D}_2(X) = 0$. A következőkben megmutatjuk, hogy $X = \mathbb{R}^3 - \{0\}$-ra $\mathcal{D}_2(X) \geq 1$.

Állítás 0.14. *Legyen $X \subset \mathbb{R}^3$ egy nyílt halmaz. Minden $f \in \mathcal{F}(X)$-re és $F \in \mathcal{V}(X)$-re*

$$\operatorname{div}(fF) = \langle \operatorname{grad} f, F \rangle + f \operatorname{div} F.$$

Állítás 0.15. *Az $\mathbb{R}^3 - \{0\}$-án értelmezett*

$$F(x,y,z) = \frac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

vektormezőre $\operatorname{div} F(x,y,z) = 0$, de F nem vektorpotenciálos. Tehát

$$\mathcal{D}_2(\mathbb{R}^3 - \{0\}) \geq 1.$$

Persze $\mathcal{D}_1(\mathbb{R}^3 - \{0\}) = 0$ a (0.11) állítás alapján. Belátható, hogy $\mathcal{D}_2(\mathbb{R}^3 - \{0\}) = 1$, tehát bármely két F_1, F_2 forrásmentes vektormezőhöz létezik olyan $\lambda \in \mathbb{R}$ szám, hogy a

$$F_1 - \lambda F_2$$

vektormező vektorpotenciálos.