Mértékelmélet

1. Félgyűrű, gyűrű, σ-gyűrű

Definíció 1.1. Legyen X egy alaphalmaz és $\mathcal{Q},\mathcal{R},\mathcal{S}\subset\mathcal{P}(X)$.

(1) A $\mathcal{Q}$ egy *félgyűrű*, ha minden $A,B\in\mathcal{Q}$-ra $A\cap B\in\mathcal{Q}$ és

$$A-B=\sqcup_{i=1}^{k}C_i,$$

ahol $C_1,\dots,C_k\in\mathcal{Q}$ páronként diszjunktak.

(2) Az $\mathcal{R}$ egy *gyűrű*, ha minden $A,B\in\mathcal{R}$-re

$$A-B\in\mathcal{R},\qquad A\cup B\in\mathcal{R}\qquad\text{és}\qquad A\cap B\in\mathcal{R}.$$

(3) Az $\mathcal{S}$ egy *σ-gyűrű*, ha
  (a) minden $A,B\in\mathcal{S}$-re $A-B\in\mathcal{S}$,
  (b) minden $A_1,\dots,A_n,\dots\in\mathcal{S}$-re

$$\bigcup_{i\geq 1}A_i\in\mathcal{S}\qquad\text{és}\qquad\bigcap_{i\geq 1}A_i\in\mathcal{S}.$$

Megjegyezzük, hogy ha $\mathcal{S}$ egy olyan σ-gyűrű amire $X\in\mathcal{S}$, akkor $\mathcal{S}$-et σ-*algebrának* is nevezzük.

Könnyen láthatóan $\emptyset\in\mathcal{Q},\mathcal{R},\mathcal{S}$. Az is igaz, hogy minden σ-gyűrű gyűrű és minden gyűrű félgyűrű.

Állítás 1.2. *Ha $\mathcal{Y}\subset\mathcal{P}(X)$, akkor egyértelműen létezik az $\mathcal{Y}$-t tartalmazó legszűkebb gyűrű és σ-gyűrű.*

Bizonyítás. A $\mathcal{P}(X)$ nyilván tartalmazza $\mathcal{Y}$-t és gyűrű, ezért az $\mathcal{Y}$-t tartalmazó X-beli gyűrűk metszete nem üres, könnyen láthatóan gyűrű, tehát a legszűkebb $\mathcal{Y}$-t tartalmazó gyűrű. Hasonlóan kapjuk a legszűkebb $\mathcal{Y}$-t tartalmazó σ-gyűrűt is. $\square$

Ezeket az $\mathcal{Y}$ *által generált* gyűrűnek illetve σ-gyűrűnek nevezzük.

Állítás 1.3. *A $\mathcal{Q}$ félgyűrűt tartalmazó legszűkebb gyűrű (azaz a $\mathcal{Q}$ által generált gyűrű) egyértelműen létezik, és elemei az $\sqcup_{i=1}^{k}A_i$ alakú halmazok, ahol $A_i\in\mathcal{Q}$ páronként diszjunktak.*

Bizonyítás. Az előző állítás alapján a generált gyűrű azonos a $\mathcal{Q}$-t tartalmazó X-beli gyűrűk metszetével, ezt $\mathcal{R}(\mathcal{Q})$-val jelöljük. Definiáljuk a következő halmazt:

$$\mathcal{R} = \{\sqcup_{i=1}^k A_i : A_1, \dots, A_k \in \mathcal{Q},\ \text{az } A_i\text{-k páronként diszjunktak és } k \in \mathbb{N}\}.$$

Nyilván $\mathcal{R} \subset \mathcal{R}(\mathcal{Q})$, mert $\mathcal{Q} \subset \mathcal{R}(\mathcal{Q})$ és akkor $\mathcal{Q}$-beli halmazok véges uniója is benne van $\mathcal{R}(\mathcal{Q})$-ban. $\mathcal{R}(\mathcal{Q}) \subset \mathcal{R}$ is teljesül, mert $\mathcal{Q} \subset \mathcal{R}$ és $\mathcal{R}$ gyűrű a következők miatt. Ha $A, B \in \mathcal{R}$, akkor $A = \sqcup_{i=1}^k A_i$ és $B = \sqcup_{j=1}^l B_j$ felírással

$$A \cap B = (\sqcup_{i=1}^k A_i) \cap (\sqcup_{j=1}^l B_j) = \cup_{i=1}^k \cup_{j=1}^l (A_i \cap B_j),$$

ahol az $A_i \cap B_j$-k egymástól diszjunktak és $\mathcal{Q}$-beliek, tehát $\mathcal{R}$ metszetzárt. Az $A - B$ is benne van $\mathcal{R}$-ben, mert

$$A - B = A - B_1 - B_2 - \dots - B_l = \cup_{i=1}^k (A_i - B_1 - B_2 - \dots - B_l),$$

ami $\mathcal{R}$-beli, mert az $A_i - B_1 - B_2 - \dots - B_l$ halmazok páronként diszjunktak és előállnak diszjunkt $\mathcal{Q}$-beliek uniójaként. Végül $\mathcal{R}$ zárt az unióra is, mert $A \cup B = A \sqcup (B - A)$és $\mathcal{R}$ zárt a diszjunkt unióra. □

Állítás 1.4. *A $\mathcal{Q}$ félgyűrű által generált gyűrű elemei az $\cup_{i=1}^k A_i$ alakú halmazok, ahol $A_i \in \mathcal{Q}$ tetszőlegesek.*

Bizonyítás. Egyszerűen következik abból, hogy $\mathcal{Q}$-beli halmazok véges uniói benne vannak a generált gyűrűben és a generált gyűrű elemei az előbbi állítás szerint $\mathcal{Q}$-beliek uniói. □

Definíció 1.5. Ha $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$, akkor az $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ *direkt szorzat* elemei az $A \times B$ alakú halmazok, ahol $A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{B}$.

Állítás 1.6. *Ha $\mathcal{Q}_1$ és $\mathcal{Q}_2$ félgyűrűk, akkor a $\mathcal{Q}_1 \otimes \mathcal{Q}_2$ direkt szorzat is félgyűrű.*

Bizonyítás. A $\mathcal{Q}_1 \otimes \mathcal{Q}_2$ metszetzárt, mert ha $A \times B, C \times D \in \mathcal{Q}_1 \otimes \mathcal{Q}_2$, akkor

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$$

és $\mathcal{Q}_1$, $\mathcal{Q}_2$ metszetzártak. Ha $A \times B, C \times D \in \mathcal{Q}_1 \otimes \mathcal{Q}_2$, akkor a $C \subset A,\ D \subset B$ esetben

$$(A \times B) - (C \times D) = (A - C) \times (B - D) \sqcup C \times (B - D) \sqcup (A - C) \times D,$$

ahol $A - C$ és $B - D$ tovább bomlanak $\mathcal{Q}_1$-beliek véges diszjunkt uniójára és $\mathcal{Q}_2$-beliek véges diszjunkt uniójára, amik végül összeszorozva $\mathcal{Q}_1 \otimes \mathcal{Q}_2$-beliek véges diszjunkt unióiját eredményezik. Ha pedig $C \not\subseteq A$ vagy $D \not\subseteq B$, akkor a tetszőleges halmazokra igaz $E - F = E - (E \cap F)$ egyenlőséget alkalmazva kapjuk az állítást. □

Ebből rögtön következik, hogy véges sok gyűrű illetve σ-gyűrű szorzata is félgyűrű.

2. Additív és σ-additív halmazfüggvények

A továbbiakban szeretnénk halmazok méretét megmérni és "végtelen nagyságú" halmazokról is beszélni, ezért bevezetjük egy bővítését a $[0,\infty)$ zárt félegyenesnek és hasonlóan az $\mathbb{R}$ valós számhalmaznak.

Definíció 2.1. Jelölje $[0,\infty]$ azt a halmazt, ami a $[0,\infty)$ halmaznak és egy új elemnek, a ∞-nek ("végtelen"-nek) az uniója. Néhány algebrai műveletet definiálunk: minden $x\in\mathbb{R}$-re $\infty+\infty=\infty+x=\infty$, és $\infty>x$. Ha pedig $\varepsilon>0$, akkor ∞-nek az ε-sugarú környezete az $\{x\in\mathbb{R}: x>1/\varepsilon\}$ halmaz. Az $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ ∞-nel bővített számegyenest jelölje $\mathbb{R}_\infty$. Hasonlóan kapjuk a $[-\infty,0]$ és az $\mathbb{R}_{-\infty}$ halmazokat a $-\infty$ értelemszerű bevezetésével. Definíció szerint $-1\cdot\pm\infty=\mp\infty$.

A továbbiakban $\mathbb{R}_{\pm\infty}$ jelöli az $\mathbb{R}_\infty$ vagy az $\mathbb{R}_{-\infty}$ halmazok valamelyikét. Fontos megjegyezni, hogy $\mathbb{R}_{\pm\infty}$ a ∞ és $-\infty$ közül csak az egyiket tartalmazza. Ezért van értelme tetszőleges két $x,y\in\mathbb{R}_{\pm\infty}$ összegéről beszélni.

Természetesen egy $(a_n)\in\mathbb{R}_{\pm\infty}$ sorozatnak egy $x\in\mathbb{R}_{\pm\infty}$ pontosan akkor határértéke, ha minden $\varepsilon>0$-hoz létezik olyan $K>0$, hogy minden $n>K$-ra az a_n az x-nek az ε-sugarú környezetébe esik.

2.1. Additív halmazfüggvények gyűrűre való kiterjesztése.

Definíció 2.2. Legyen $\mathcal{Q}$ egy félgyűrű. A $\varphi\colon\mathcal{Q}\to\mathbb{R}_{\pm\infty}$ valós értékű függvény *additív*, ha

(1) $\varphi(\emptyset)=0$ és
(2) ha $A=\sqcup_{i=1}^k A_i$, ahol $A_1,\dots,A_k\in\mathcal{Q}$ páronként diszjunktak és $A\in\mathcal{Q}$, akkor
$$\varphi(A)=\sum_{i=1}^k\varphi(A_i).$$

Állítás 2.3. *Ha $\varphi\colon\mathcal{Q}\to\mathbb{R}_{\pm\infty}$ egy additív függvény a $\mathcal{Q}$ félgyűrűn, akkor φ-nek egyértelműen létezik additív kiterjesztése a $\mathcal{Q}$ által generált $\mathcal{R}$ gyűrűre. Ha $\varphi\geq 0$, akkor a kiterjesztés is nemnegatív.*

Bizonyítás. Definiáljuk a φ kiterjesztését egy $A_1\sqcup\cdots\sqcup A_k\in\mathcal{R}$-re a
$$\tilde\varphi(A_1\sqcup\cdots\sqcup A_k)=\sum_{i=1}^k\varphi(A_i)$$
formulával ha $A_1,\dots,A_k\in\mathcal{Q}$. Így $\tilde\varphi$ jóldefiniált, mert ha
$$A=\sqcup_{i=1}^k A_i=\sqcup_{j=1}^l B_j,$$

ahol A_i és B_j $\mathcal{Q}$-beliek, akkor a φ additivitása miatt

$$\sum_{i=1}^{k}\varphi(A_i)=\sum_{i=1}^{k}\varphi(A_i\cap\sqcup_{j=1}^{l}B_j)=\sum_{i=1}^{k}\varphi(\sqcup_{j=1}^{l}A_i\cap B_j)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\varphi(A_i\cap B_j),$$

ami hasonló okok miatt megegyezik $\sum_{j=1}^{l}\varphi(B_j)$-vel. A $\tilde{\varphi}$ nyilván kiterjesztése φ-nek, tehát

$$\tilde{\varphi}(A)=\varphi(A)$$

ha $A\in\mathcal{Q}$. Ez a

$$\tilde{\varphi}\colon\mathcal{R}\to\mathbb{R}$$

additív is, mert ha $A\in\mathcal{R}$ és $A=\sqcup_{i=1}^{k}A_i$, ahol $A_i\in\mathcal{R}$, akkor mindegyik $A_j=\sqcup_{n=1}^{m_j}B_{j,n}$ valamilyen $B_{j,n}\in\mathcal{Q}$-ra és $\tilde{\varphi}$ definíciója alapján

$$\tilde{\varphi}(A)=\tilde{\varphi}(\sqcup_{i=1}^{k}\sqcup_{n=1}^{m_i}B_{i,n})=\sum_{i=1}^{k}\sum_{n=1}^{m_i}\varphi(B_{i,n})=\sum_{i=1}^{k}\tilde{\varphi}(A_i).$$

Végül a $\tilde{\varphi}$ az egyetlen additív kiterjesztés, mert $\tilde{\varphi}$ definíciója szükséges is az additivitáshoz, ezért nem is lehetne máshogyan definiálni. □

Állítás 2.4. *Legyen $\varphi\colon\mathcal{R}\to\mathbb{R}_{\pm\infty}$ egy $\mathcal{R}$ gyűrűn értelmezett additív függvény. Ekkor a következők teljesülnek.*

(1) *Ha $A,B\in\mathcal{R}$ és $A\subset B$, akkor*

$$\varphi(B-A)=\varphi(B)-\varphi(A).$$

(2) *Minden $A,B\in\mathcal{R}$-re*

$$\varphi(A\cup B)+\varphi(A\cap B)=\varphi(A)+\varphi(B).$$

(3) *Ha $\varphi\geq 0$, akkor φ monoton növekvő, azaz ha $A,B\in\mathcal{R}$ és $A\subset B$, akkor*

$$\varphi(A)\leq\varphi(B).$$

(4) *Ha $\varphi\geq 0$, akkor φ szubadditív, azaz minden $A_1,\dots,A_k\in\mathcal{R}$-re*

$$\varphi(\bigcup_{i=1}^{k}A_i)\leq\sum_{i=1}^{k}\varphi(A_i).$$

Bizonyítás. Az (1)-es következik abból, hogy

$$B=A\sqcup(B-A).$$

A (2)-es abból, hogy

$$A\cup B=(A-B)\sqcup(A\cap B)\sqcup(B-A),$$

ezért

$$\varphi(A\cup B)+\varphi(A\cap B)=\varphi(A-B)+\varphi(A\cap B)+\varphi(B-A)+\varphi(A\cap B)=\varphi(A)+\varphi(B).$$

A (3)-as azért igaz, mert

$$\varphi(A)+\varphi(B-A)=\varphi(B),$$

de persze

$$\varphi(B - A) \geq 0.$$

A (4)-es pedig azért, mert

$$\varphi(A_1 \cup \dots \cup A_k) = \varphi(A_1) + \varphi(A_2 - A_1) + \varphi(A_3 - (A_1 \cup A_2)) + \\ \dots + \varphi(A_k - (A_1 \cup \dots \cup A_{k-1})) \leq \sum_{i=1}^{k} \varphi(A_i).$$

□

2.2. σ-additív halmazfüggvények gyűrűre való kiterjesztése.

Definíció 2.5. Legyen $\mathcal{Q}$ egy félgyűrű. A $\varphi\colon \mathcal{Q} \to \mathbb{R}_{\pm\infty}$ függvény σ*-additív*, ha

(1) $\varphi(\emptyset) = 0$ és
(2) ha $A = \sqcup_{k\geq 1} A_k$, ahol $A_1, \dots, A_k, \dots \in \mathcal{Q}$ páronként diszjunktak és $A \in \mathcal{Q}$, akkor
  (a) mindegyik $\varphi(A_k)$ véges, a $\sum_{k\geq 1} \varphi(A_k)$ sor abszolút konvergens és
  $$\varphi(A) = \sum_{k\geq 1} \varphi(A_k),$$
  vagy
  (b) mindegyik $\varphi(A_k)$ véges, $\sum_{k\geq 1} \varphi(A_k) = \pm\infty$ és $\varphi(A) = \pm\infty$, vagy
  (c) valamelyik $\varphi(A_k) = \pm\infty$ és $\varphi(A) = \pm\infty$.

Állítás 2.6. *Ha $\varphi\colon \mathcal{Q} \to \mathbb{R}_{\pm\infty}$ egy σ-additív függvény a $\mathcal{Q}$ félgyűrűn, akkor φ-nek egyértelműen létezik σ-additív kiterjesztése a $\mathcal{Q}$ által generált gyűrűre. Ha $\varphi \geq 0$, akkor a kiterjesztés is nemnegatív.*

Bizonyítás. Jelölje $\mathcal{R}$ a generált gyűrűt. A (2.3) állítás bizonyításához hasonlóan definiáljuk a φ kiterjesztését egy $A_1 \sqcup \dots \sqcup A_k \in \mathcal{R}$-re a

$$\tilde{\varphi}(A_1 \sqcup \dots \sqcup A_k) = \sum_{i=1}^{k} \varphi(A_i)$$

formulával ha $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{Q}$. Ekkor ugyanúgy következik, hogy $\tilde{\varphi}\colon \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ jóldefiniált, additív, kiterjesztés és egyértelműen létezik. Ezért csak azt kell megmutatni, hogy $\tilde{\varphi}$ σ-additív is ha φ az volt. Ha $A \in \mathcal{R}$, $A = \sqcup_{i=1}^{k} C_i$ valamilyen $\mathcal{Q}$-beliekkel és $A = \sqcup_{i\geq 1} A_i$, ahol $A_i \in \mathcal{R}$ megszámlálhatóan végtelen sok halmaz, akkor mindegyik $A_j = \sqcup_{n=1}^{m_j} B_{j,n}$ valamilyen $B_{j,n} \in \mathcal{Q}$-ra és

$$C_j = C_j \cap A = C_j \cap (\sqcup_{i\geq 1} A_i) = C_j \cap (\sqcup_{i\geq 1} \sqcup_{n=1}^{m_i} B_{i,n}) = \sqcup_{i\geq 1} \sqcup_{n=1}^{m_i} B_{i,n} \cap C_j.$$

Tehát

$$\tilde{\varphi}(A) = \sum_{j=1}^{k} \varphi(C_j) = \sum_{j=1}^{k} \varphi(\sqcup_{i\geq 1} \sqcup_{n=1}^{m_i} B_{i,n} \cap C_j) = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i\geq 1} \sum_{n=1}^{m_i} \varphi(B_{i,n} \cap C_j)$$

a $\tilde{\varphi}$ definícióját és φ σ-additivitását felhasználva, és

$$\sqcup_{n=1}^{m_i} B_{i,n} \cap C_j = A_i \cap C_j,$$
$$\sqcup_{j=1}^{k} A_i \cap C_j = A_i \cap A = A_i$$

miatt

$$\sum_{j=1}^{k}\sum_{i\geq 1}\sum_{n=1}^{m_i}\varphi(B_{i,n}\cap C_j) = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i\geq 1}\tilde{\varphi}(A_i\cap C_j) = \sum_{i\geq 1}\sum_{j=1}^{k}\tilde{\varphi}(A_i\cap C_j) = \sum_{i\geq 1}\tilde{\varphi}(A_i)$$

a $\tilde{\varphi}$ definícióját és additivitását felhasználva. □

Definíció 2.7. Legyen $\mathcal{Q}$ egy félgyűrű. A $\varphi\colon \mathcal{Q} \to [0,\infty]$ függvény *mérték*, ha $\varphi \geq 0$ és σ-additív.

Egy $\varphi\colon \mathcal{Q} \to [0,\infty]$ mérték monoton növő is, mert ha $A, B \in \mathcal{Q}$, $A \subset B$, akkor $B - A$ előáll véges sok diszjunkt $\mathcal{Q}$-beli $C_1 \ldots, C_k$ uniójaként, ezért

$$\varphi(A) + \sum_{i=1}^{k}\varphi(C_i) = \varphi(B),$$

és így

$$\varphi(A) \leq \varphi(B).$$

Az eddigiekből következik:

Tétel 2.8. *Ha $\varphi\colon \mathcal{Q} \to [0,\infty]$ egy mérték a $\mathcal{Q}$ félgyűrűn, akkor φ egyértelműen kiterjeszthető mértékké a $\mathcal{Q}$ által generált $\mathcal{R}$ gyűrűre.* □

Tétel 2.9. *Egy $\mathcal{Q}$ félgyűrűn értelmezett $\varphi\colon \mathcal{Q} \to [0,\infty]$ függvény pontosan akkor mérték, ha additív és σ-szubadditív, azaz minden $A_1, \ldots, A_k, \ldots \in \mathcal{Q}$-ra és $A \in \mathcal{Q}$, $A \subset \bigcup_{k\geq 1} A_k$-ra*

$$\varphi(A) \leq \sum_{k\geq 1}\varphi(A_k).$$

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy φ additív és σ-szubadditív. A σ-additivitáshoz elég megmutatni, hogy φ σ-szuperadditív is, azaz minden olyan $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{Q}$ páronként diszjunkt tagokból álló sorozatra amire $\sqcup_{i\geq 1} A_i \in \mathcal{Q}$, az is teljesül, hogy

$$\varphi(\sqcup_{i\geq 1} A_i) \geq \sum_{i\geq 1}\varphi(A_i).$$

Terjesszük ki φ-t additívan a $\mathcal{Q}$ által generált $\mathcal{R}$ gyűrűre, a kiterjesztést is jelölje φ. Legyen $B_n = \sqcup_{1\leq i\leq n} A_i$. Mivel $B_n \in \mathcal{R}$, $B_n \subset \sqcup_{i\geq 1} A_i$ és φ monoton, ezért

$$\sum_{i=1}^{n}\varphi(A_i) = \varphi(B_n) \leq \varphi(\sqcup_{i\geq 1} A_i),$$

és ha $n \to \infty$, akkor

$$\sum_{i\geq 1}\varphi(A_i) \leq \varphi(\sqcup_{i\geq 1} A_i),$$

tehát φ σ-szuperadditív a $\mathcal{Q}$-n. Ebből már következik, hogy $\varphi\colon \mathcal{Q} \to [0,\infty]$ σ-additív, mert ha $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{Q}$ páronként diszjunktak és az uniójuk is $\mathcal{Q}$-beli, akkor a σ-szubadditivitás miatt persze

$$\sum_{i\geq 1} \varphi(A_i) \geq \varphi(\sqcup_{i\geq 1} A_i)$$

is teljesül, tehát φ egy mérték a $\mathcal{Q}$-n. Fordítva, ha φ-ről feltesszük, hogy egy mérték, akkor φ nyilván additív, de σ-szubadditív is, mert ha $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{Q}$ és $A \in \mathcal{Q}$, $A \subset \cup_{i\geq 1} A_i$, akkor

$$\varphi(A) = \varphi(A \cap \cup_{i\geq 1} A_i) = \varphi(A \cap \sqcup_{k\geq 1}(A_k - \cup_{i=1}^{k-1} A_i)) = \varphi(\sqcup_{k\geq 1} A \cap (A_k - \cup_{i=1}^{k-1} A_i)) =$$
$$\sum_{k\geq 1} \varphi(A \cap (A_k - \cup_{i=1}^{k-1} A_i)) \leq \sum_{k\geq 1} \varphi(A \cap A_k) \leq \sum_{k\geq 1} \varphi(A_k),$$

ahol a halmazműveleteket a $\mathcal{Q}$ által generált gyűrűben végezzük, amire a φ mértéket kiterjesztjük. $\square$

2.3. Halmazsorozatok határértéke és a mérték folytonossága.

Tétel 2.10. *Legyen $\mathcal{S}$ egy σ-gyűrű. Ha $\varphi\colon \mathcal{S} \to \mathbb{R}_{\pm\infty}$ egy σ-additív függvény, akkor*

(1) *minden $A_1 \subset \cdots \subset A_k \subset \cdots$ $\mathcal{Q}$-beli monoton növő sorozatra*

$$\varphi(\bigcup_{k\geq 1} A_k) = \lim_{k\to\infty} \varphi(A_k)$$

(2) *ha $\varphi(A_1)$ véges, akkor minden $A_1 \supset \cdots \supset A_k \supset \cdots$ $\mathcal{Q}$-beli monoton csökkenő sorozatra*

$$\varphi(\bigcap_{k\geq 1} A_k) = \lim_{k\to\infty} \varphi(A_k).$$

Bizonyítás. Legyen $A_0 = \emptyset$, ekkor

$$\varphi(\cup_{k\geq 1} A_k) = \varphi(\sqcup_{k\geq 1}(A_k - A_{k-1})) = \textstyle\sum_{k\geq 1} \varphi(A_k - A_{k-1}) =$$
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \varphi(A_k - A_{k-1}) = \lim_{n\to\infty} \varphi(\sqcup_{k=1}^{n}(A_k - A_{k-1})) = \lim_{n\to\infty} \varphi(A_n),$$

tehát (1) igaz. A (2)-eshez pedig az (1) felhasználásával

$$\varphi(\cap_{k\geq 1} A_k) = \varphi(\cap_{k\geq 1} A_k) - \varphi(A_1) + \varphi(A_1) = -\varphi(A_1 - \cap_{k\geq 1} A_k) + \varphi(A_1) =$$
$$-\varphi(\cup_{k\geq 1} A_1 - A_k) + \varphi(A_1) = -\lim_{k\to\infty} \varphi(A_1 - A_k) + \varphi(A_1) =$$
$$-\lim_{k\to\infty} (\varphi(A_1) - \varphi(A_k)) + \varphi(A_1) = \lim_{k\to\infty} \varphi(A_k).$$

$\square$

Definíció 2.11. Az $A_1, \dots, A_k, \dots \subset X$ sorozat *konvergens*, ha

$$\bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{k\geq n} A_k = \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} A_k.$$

Ekkor ezt a halmazt

$$\lim_{k\to\infty} A_k$$

jelöli.

Tétel 2.12. *Legyen $\mathcal{S}$ egy σ-gyűrű. Ha φ egy mérték $\mathcal{S}$-en, akkor minden $A_1, \dots, A_k, \dots \in \mathcal{Q}$ konvergens sorozatra amire $\varphi(\cup_{k\geq 1} A_k) < \infty$, a $\varphi(A_k)$ sorozat is konvergens és*

$$\varphi(\lim_{k\to\infty} A_k) = \lim_{k\to\infty} \varphi(A_k).$$

Bizonyítás. Először egy lemmát bizonyítunk.

Lemma 2.13. *Ha $A_1, \dots, A_k, \dots \in \mathcal{S}$ tetszőleges és $\varphi\colon \mathcal{S} \to [0, \infty]$ egy mérték, akkor*

$$\varphi(\bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{k\geq n} A_k) \leq \liminf_{k\to\infty} \varphi(A_k),$$

és ha $\varphi(\bigcup_{n\geq 1} A_n) < \infty$, akkor

$$\limsup_{k\to\infty} \varphi(A_k) \leq \varphi(\bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} A_k).$$

Bizonyítás.

$$\varphi(\bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{k\geq n} A_k) = \lim_{n\to\infty} \varphi(\bigcap_{k\geq n} A_k) = \liminf_{n\to\infty} \varphi(\bigcap_{k\geq n} A_k) \leq \liminf_{n\to\infty} \varphi(A_n),$$

ha pedig $\varphi(\bigcup_{n\geq 1} A_n) < \infty$, akkor

$$\limsup_{n\to\infty} \varphi(A_n) \leq \limsup_{n\to\infty} \varphi(\bigcup_{k\geq n} A_k) = \lim_{n\to\infty} \varphi(\bigcup_{k\geq n} A_k) = \varphi(\bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} A_k)$$

az előző tételt felhasználva. □

Ezek után bizonyítjuk a tételt. Mivel az $A_1, \dots$ konvergens, ezért

$$\bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{k\geq n} A_k = \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} A_k,$$

tehát $\varphi(\bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{k\geq n} A_k) = \varphi(\bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} A_k)$ amiből a lemma alapján

$$\liminf_{k\to\infty} \varphi(A_k) = \limsup_{k\to\infty} \varphi(A_k)$$

következik. Ez azt jelenti, hogy a $\varphi(A_n)$ sorozatnak van határértéke. A lemmából az is következik, hogy

$$\varphi(\bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{k\geq n} A_k) = \lim_{k\to\infty} \varphi(A_k),$$

azaz $\varphi(\lim_{k\to\infty} A_k) = \lim_{k\to\infty} \varphi(A_k)$. Mivel pedig

$$\bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n} A_k \subset \bigcup_{n\geq 1} A_n$$

és $\bigcup_{n\geq 1} A_n$ véges mértékű, $\varphi(\lim_{k\to\infty} A_k) = \varphi(\bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n} A_k)$ is véges. □

Állítás 2.14. *Legyen $\mathcal{S}$ egy σ-gyűrű. Ha φ egy mérték $\mathcal{S}$-en, akkor minden olyan $A_1, \dots, A_k, \dots \in \mathcal{S}$ sorozatra, amire $\sum_{k\geq 1} \varphi(A_k)$ véges*

$$\varphi(\bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n} A_k) = 0.$$

Bizonyítás. A φ monotonitásából és σ-szubadditivitásából minden $m \in \mathbb{N}$-re

$$\varphi(\bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n} A_k) \leq \varphi(\bigcup_{k\geq m} A_k) \leq \sum_{k\geq m} \varphi(A_k),$$

ami 0-hoz tart ha $k \to \infty$. □

Egy következménye az eddigieknek az, hogy ha $\varphi\colon \mathcal{S} \to [0,\infty]$ az $\mathcal{S}$ σ-gyűrűn adott mérték, akkor van olyan $A \in \mathcal{S}$, hogy

$$\varphi(A) = \sup\{\varphi(B) : B \in \mathcal{S}\}.$$

Ez azért igaz, mert ha $A_n \in \mathcal{S}$ olyan, hogy $\varphi(A_n)$ tart $\sup\{\varphi(B) : B \in \mathcal{S}\}$-hoz, akkor $A_n \subset \cup_{k\geq 1} A_k$ miatt $\varphi(A_n) \leq \varphi(\cup_{k\geq 1} A_k)$, így

$$\sup\{\varphi(B) : B \in \mathcal{S}\} = \lim \varphi(A_n) \leq \varphi(\cup_{k\geq 1} A_k),$$

ugyanakkor

$$\varphi(\cup_{k\geq 1} A_k) \leq \sup\{\varphi(B) : B \in \mathcal{S}\},$$

mert $\cup_{k\geq 1} A_k \in \mathcal{S}$. Tehát az $A = \cup_{k\geq 1} A_k$ választás megfelelő. Ebből persze az is látszik, hogy ha φ értékkészlete nem tartalmazza a ∞-t, akkor

$$\sup\{\varphi(B) : B \in \mathcal{S}\}$$

is véges, mert különben $\varphi(A) = \infty$ lenne az előbbi $A \in \mathcal{S}$-re.

3. Additív Jordan mérték

Legyen $\varphi\colon \mathcal{Q} \to [0,\infty)$ egy félgyűrűn adott additív függvény, láttuk, hogy ekkor φ egyértelműen kiterjeszthető additívan a generált $\mathcal{R}$ gyűrűre. Szeretnénk kiterjeszteni a φ-t az additivitás megtartásával a lehető legbővebb gyűrűre. A következőkben találunk is egy $\mathcal{R}$-et tartalmazó megfelelő bővebb gyűrűt, ezt $\mathcal{J}$-vel fogjuk jelölni és azzal a tulajdonsággal fog rendelkezni, hogy ha $A \in \mathcal{J}$ és $\varphi(A) = 0$, akkor A összes részhalmaza is $\mathcal{J}$-beli, és így természetesen φ azokon is 0-t vesz fel.

Legyen $\varphi\colon \mathcal{R} \to [0,\infty)$ a $\mathcal{Q}$ által generált gyűrűn értelmezett additív kiterjesztés. Álljon $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}(X)$ azokból a halmazokból, amik befedhetők $\mathcal{R}$-beli halmazzal:

$$\mathcal{H} = \{A \in X : A \subset B \text{ valamilyen } B \in \mathcal{R}\text{-re}\}.$$

Ezen kívül legyen $\varphi^*\colon \mathcal{H} \to [0,\infty)$ az a függvény, amit $\varphi\colon \mathcal{R} \to [0,\infty)$ felülről approximál, tehát amire

$$\varphi^*(A) = \inf\{\varphi(B) : B \in \mathcal{R}, A \subset B\}. \tag{3.1}$$

Állítás 3.1. *A $\mathcal{H}$ egy $\mathcal{R}$-et tartalmazó gyűrű, φ^* szubadditív és $\varphi^*|_{\mathcal{R}} = \varphi$.*

Bizonyítás. Nyilván $\mathcal{R} \subset \mathcal{H}$. Ha $A, B \in \mathcal{H}$, akkor könnyen láthatóan $A \cup B$ is $\mathcal{H}$-beli. És $A - B$ is, mert ha A-t fedi egy halmaz, akkor $A - B$-t is. A φ^* szubadditív, mert ha $A_i \in \mathcal{H}$, $A_i \subset B_i \in \mathcal{R}$, akkor φ^* definíciójából és a φ szubadditivitásából

$$\varphi^*(\cup_{i=1}^k A_i) \leq \varphi(\cup_{i=1}^k B_i) \leq \sum_{i=1}^k \varphi(B_i),$$

de a $\varphi(B_i)$-k infimumát véve

$$\varphi^*(\cup_{i=1}^k A_i) \leq \sum_{i=1}^k \varphi^*(A_i)$$

következik. Végül $\varphi^*|_{\mathcal{R}} = \varphi$, mert ha $A \in \mathcal{R}$, akkor $\varphi^*(A) = \inf\{\varphi(B) : B \in \mathcal{R}, A \subset B\} = \varphi(A)$ mivel φ monoton. $\square$

Ha a legbővebb olyan gyűrűt próbáljuk megkeresni, amin φ^* nem csak szubadditív de additív is, akkor definiáljuk a $\varphi_*\colon \mathcal{H} \to [0,\infty)$ függvényt úgy, hogy

$$\varphi_*(A) = \sup\{\varphi(B) : B \in \mathcal{R}, B \subset A\},$$

ez várhatóan szuperadditív, azaz

$$\varphi_*(\sqcup_{i=1}^k A_i) \geq \sum_{i=1}^k \varphi_*(A_i)$$

tetszőleges $\mathcal{H}$-beli páronként diszjunkt A_i-kre, és tekintsük azt a legbővebb $\mathcal{J} \subset \mathcal{H}$ gyűrűt, amire megszorítva a φ^* és φ_* függvények megegyeznek, tehát

$$\varphi^*|_{\mathcal{J}} = \varphi_*|_{\mathcal{J}}.$$

Ekkor a $\varphi^*\colon \mathcal{J} \to [0,\infty)$ additív, ami azt jelenti, hogy ha $A, B \in \mathcal{J}$ diszjunktak és $A \sqcup B \in \mathcal{J}$ is teljesül, akkor $\varphi^*(A \sqcup B) = \varphi^*(A) + \varphi^*(B)$. Egyébként minden $A \in \mathcal{H}$ halmazra nyilván

$$\varphi_*(A) \leq \varphi^*(A)$$

teljesül.

Lemma 3.2. *Ha $C, D, E, F \subset X$, akkor*

$$(D - E) - (C - F) \subset (D - C) \cup (F - E).$$

BIZONYÍTÁS. Jelölje $\overline{H}$ egy X-beli H halmaz komplementerét. Ekkor

$$(D - E) - (C - F) = (D \cap \overline{E}) \cap \overline{(C \cap \overline{F})} = (D \cap \overline{E}) \cap (\overline{C} \cup F) =$$
$$(D \cap \overline{E} \cap \overline{C}) \cup (D \cap \overline{E} \cap F) \subset (D \cap \overline{C}) \cup (\overline{E} \cap F) = (D - C) \cup (F - E).$$

□

Állítás 3.3. *A φ_* jóldefiniált a $\mathcal{H}$ halmazon, nemnegatív, szuperadditív és a*

$$\mathcal{J} = \{A \in \mathcal{H} : \varphi^*(A) = \varphi_*(A)\}$$

egy $\mathcal{R}$-et tartalmazó gyűrű.

BIZONYÍTÁS. A φ_* jóldefiniált, mert minden $A \in \mathcal{H}$-ra $\emptyset \subset A$, tehát van olyan $\mathcal{R}$-beli halmaz, ami benne van A-ban. Nemnegatív is, mert $\varphi(\emptyset) = 0$. A φ_* szuperadditív, mert ha $A_i \in \mathcal{H}$ páronként diszjunktak, $A_i \supset B_i \in \mathcal{R}$, akkor a B_i-k is diszjunktak, φ_* definíciójából és a φ szuperadditivitásából pedig

$$\varphi_*(\sqcup_{i=1}^k A_i) \geq \varphi(\sqcup_{i=1}^k B_i) \geq \sum_{i=1}^k \varphi(B_i),$$

de a $\varphi(B_i)$-k szuprémumát véve

$$\varphi_*(\sqcup_{i=1}^k A_i) \geq \sum_{i=1}^k \varphi_*(A_i)$$

következik. A $\mathcal{J}$ tartalmazza az $\mathcal{R}$-et, mert

$$\varphi^*(A) = \varphi_*(A)$$

minden $A \in \mathcal{R}$-re, hiszen

$$\varphi(A) \geq \inf\{\varphi(B) : B \in \mathcal{R}, A \subset B\} \geq \sup\{\varphi(B) : B \in \mathcal{R}, B \subset A\} \geq \varphi(A).$$

A $\mathcal{J}$ gyűrű a következők miatt. Ha $A, B \in \mathcal{J}$ diszjunktak, akkor

$$\varphi_*(A) + \varphi_*(B) \leq \varphi_*(A \sqcup B) \leq \varphi^*(A \sqcup B) \leq \varphi^*(A) + \varphi^*(B)$$

és mivel $\varphi_*(A) = \varphi^*(A)$, $\varphi_*(B) = \varphi^*(B)$, ezért

$$\varphi_*(A \sqcup B) = \varphi^*(A \sqcup B),$$

tehát $A \sqcup B \in \mathcal{J}$. Ha $A, B \in \mathcal{J}$, akkor $A - B \in \mathcal{J}$ is teljesül, mert bármilyen $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $C, D, E, F \in \mathcal{R}$, hogy

$$C \subset A \subset D \quad \text{és} \quad E \subset B \subset F,$$

ugyanakkor

$$\varphi(C) \leq \varphi_*(A) = \varphi^*(A) \leq \varphi(D) \quad \text{és} \quad \varphi(D - C) = \varphi(D) - \varphi(C) < \varepsilon,$$
$$\varphi(E) \leq \varphi_*(B) = \varphi^*(B) \leq \varphi(F) \quad \text{és} \quad \varphi(F - E) = \varphi(F) - \varphi(E) < \varepsilon.$$

Ekkor

$$C - F \subset A - B \subset D - E,$$
$$\varphi(C - F) \leq \varphi_*(A - B) \leq \varphi^*(A - B) \leq \varphi(D - E)$$

és az előbbi lemmát is felhasználva

$$\varphi(D - E) - \varphi(C - F) = \varphi((D - E) - (C - F)) \leq \varphi((D - C) \cup (F - E)) \leq \\ \varphi(D - C) + \varphi(F - E) < 2\varepsilon,$$

ezért

$$\varphi_*(A - B) = \varphi^*(A - B),$$

tehát $A - B \in \mathcal{J}$. Ezekből már könnyen következik, hogy tetszőleges $A, B \in \mathcal{J}$-re $A \cup B \in \mathcal{J}$, mert

$$A \cup B = A \sqcup (B - A).$$

□

Definíció 3.4. A $\mathcal{J}$ gyűrű elemeit *Jordan mérhető* halmazoknak nevezzük, a φ^* és φ_* $\mathcal{H}$-n értelmezett függvényeket Jordan féle *külső* és *belső mértéknek* nevezzük, a φ-vel jelölt

$$\varphi^*|_{\mathcal{J}}$$

additív függvényt pedig (a $\varphi\colon \mathcal{Q} \to [0, \infty)$ által generált) *Jordan mértéknek.*

Állítás 3.5. *Egy $H \subset X$ halmazra a következők ekvivalensek.*

(1) $H \in \mathcal{J}$ *és* $\varphi(H) = 0$.
(2) *Az összes* $A \subset H$ *részhalmaz* $\mathcal{J}$*-beli és* $\varphi(A) = 0$.
(3) $\varphi^*(H) = 0$.
(4) *Minden* $\varepsilon > 0$*-hoz létezik véges sok páronként diszjunkt* $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{Q}$, *amikre*

$$H \subset \sqcup_{i=1}^k A_i$$

és

$$\sum_{i=1}^k \varphi(A_i) < \varepsilon.$$

Bizonyítás. Az (1)-esből következik a (2)-es, mert ha $\varphi(H) = 0$ és $A \subset H$, akkor $A \in \mathcal{H}$ és

$$0 \leq \varphi^*(A) \leq \varphi^*(H) = \varphi(H) = 0.$$

A (2)-esből a (3)-as, mert ha $\varphi(H) = 0$, akkor $\varphi^*(H) = 0$ is igaz. A (3)-asból a (4)-es, mert a $\varphi^*(H)$-nak a (3.1)-es definíciójában szereplő, $\varphi^*(A)$-hoz tetszőlegesen közel lévő $\varphi(B)$ felírható

$$\varphi(B) = \sum_{i=1}^k \varphi(B_i)$$

alakban, ahol $B_i \in \mathcal{Q}$ páronként diszjunktak. És végül a (4)-esből következik, hogy $\varphi^*(H) = 0$, tehát $\varphi_*(H) = 0$ is igaz. □

4. σ-additív mérték kiterjesztése

Legyen $\varphi\colon \mathcal{Q} \to [0,\infty]$ egy mérték a $\mathcal{Q}$ félgyűrűn. A következőkben φ-t a σ-additivitás megtartásával szeretnénk kiterjeszteni egy bővebb σ-gyűrűre. Legyen

$$\varphi^*\colon \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$$

az a függvény, amire

$$\varphi^*(A) = \inf\{\sum_{n\geq 1} \varphi(B_n) : B_1,\dots,B_n,\dots \in \mathcal{Q}, A \subset \cup_{n\geq 1} B_n\}$$

ha A befedhető megszámlálhatóan végtelen sok $\mathcal{Q}$-beli halmazzal, különben

$$\varphi^*(A) = \infty.$$

Ezt az egész $\mathcal{P}(X)$-en értelmezett φ^* függvényt a φ által generált *külső mértéknek* nevezzük, és sok olyan tulajdonsággal rendelkezik, amik általában mértékekre teljesülnek.

Tétel 4.1. *A $\varphi^*\colon \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ függvényre a következők igazak.*

(1) *A φ^* σ-szubadditív, azaz minden olyan $A \subset X$, $A_1,\dots,A_k,\dots \subset X$ halmazra, amire $A \subset \cup_{k\geq 1} A_k$,*
$$\varphi^*(A) \leq \sum_{k\geq 1} \varphi^*(A_k).$$
(2) *A φ^* kiterjesztése φ-nek,*
$$\varphi^*|_{\mathcal{Q}} = \varphi.$$
(3) *A φ^* definíciójában az infimumot elég diszjunkt halmazokra nézni.*
(4) *A φ^* monoton, tehát $A \subset B$ esetén $\varphi^*(A) \leq \varphi^*(B)$.*

Bizonyítás. Az (1)-eshez valamilyen $\varepsilon > 0$ esetén legyenek minden $k,n \geq 1$-re $B_{k,n} \in \mathcal{Q}$ olyan halmazok, amikre $A_k \subset \cup_{n\geq 1} B_{k,n}$ és

$$\varphi^*(A_k) \leq \sum_{n\geq 1} \varphi(B_{k,n}) < \frac{\varepsilon}{2^k} + \varphi^*(A_k).$$

Ekkor

$$A \subset \cup_{k\geq 1} A_k \subset \cup_{k\geq 1} \cup_{n\geq 1} B_{k,n}$$

miatt

$$\varphi^*(A) \leq \sum_{k,n\geq 1} \varphi(B_{k,n}),$$

de

$$\sum_{k\geq 1} \varphi^*(A_k) \leq \sum_{k\geq 1}\sum_{n\geq 1} \varphi(B_{k,n}) < \sum_{k\geq 1} \frac{\varepsilon}{2^k} + \varphi^*(A_k) = \varepsilon + \sum_{k\geq 1} \varphi^*(A_k)$$

és így $\sum_{k,n\geq 1} \varphi(B_{k,n})$ tetszőlegesen közel lehet $\sum_{k\geq 1} \varphi^*(A_k)$-hoz. Ezért

$$\varphi^*(A) \leq \sum_{k\geq 1} \varphi^*(A_k).$$

A (2)-es azért igaz, mert ha $A \in \mathcal{Q}$, akkor nyilván

$$\varphi^*(A) \leq \varphi(A),$$

másrészt φ σ-szubadditivitásából

$$\varphi(A) \leq \sum_{n \leq 1} \varphi(A_n)$$

minden olyan $A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{Q}$ esetén, amire

$$A \subset \cup_{n \geq 1} A_n,$$

ezért

$$\varphi(A) \leq \varphi^*(A)$$

is igaz. A (3)-ashoz elég azt belátni, hogy minden $A \subset X$-hez és $\mathcal{Q}$-beli $B_1, \dots, B_n, \dots$ halmazokhoz, amikre

$$A \subset \cup_{n \geq 1} B_n$$

léteznek olyan páronként diszjunkt $\mathcal{Q}$-beli $C_1, \dots, C_n, \dots$ halmazok, hogy

$$A \subset \sqcup_{n \geq 1} C_n$$

és

$$\sum_{n \geq 1} \varphi(C_n) \leq \sum_{n \geq 1} \varphi(B_n).$$

Legyen $B_n' = B_n - \cup_{i=1}^{n-1} B_i$. Ekkor a B_n'-ek páronként diszjunktak és $\sqcup_{n \geq 1} B_n' = \cup_{n \geq 1} B_n$. Persze a B_n'-ek nem feltétlenül $\mathcal{Q}$-beliek, de benne vannak a $\mathcal{Q}$ által generált $\mathcal{R}(\mathcal{Q})$ gyűrűben és

$$B_n' \subset B_n.$$

Ugyanakkor mindegyik B_n' előáll véges sok páronként diszjunkt $\mathcal{Q}$-beli $C_{n,k}$ uniójaként, ahol $k = 1, \dots, m_n$. Ekkor

$$A \subset \cup_{n \geq 1} B_n = \sqcup_{n \geq 1} B_n' = \sqcup_{n \geq 1} \sqcup_{k=1}^{m_n} C_{n,k} = \sqcup_{i \geq 1} C_i$$

valamilyen $C_1, \dots, C_i, \dots$ sorozatba rendezésére a $C_{n,k}$-knak. Jelölje $\tilde{\varphi}$ a φ-nek az $\mathcal{R}(\mathcal{Q})$-ra való additív kiterjesztését. Ekkor

$$\sum_{i \geq 1} \varphi(C_i) = \sum_{n \geq 1} \sum_{k=1}^{m_n} \varphi(C_{n,k}) = \sum_{n \geq 1} \tilde{\varphi}(B_n') \leq \sum_{n \geq 1} \tilde{\varphi}(B_n) = \sum_{n \geq 1} \varphi(B_n).$$

A (4)-esbeli monotonitás pedig következik a φ^* szubadditivitásából. $\square$

Legyen $\mathcal{L} \subset \mathcal{P}(X)$ az a halmazrendszer, aminek bármely $A \in \mathcal{L}$ elemére teljesül, hogy minden $M \subset X$-re

$$\varphi^*(M) = \varphi^*(M \cap A) + \varphi^*(M - A).$$

Jelölje

$$\mu\colon \mathcal{L} \to [0, \infty]$$

a φ^* megszorítását $\mathcal{L}$-re. Az $\mathcal{L}$ elemeit *μ-mérhető* (vagy *φ^*-mérhető*) halmazoknak nevezzük. Megjegyezzük, hogy

$$\varphi^*(M) \leq \varphi^*(M \cap A) + \varphi^*(M - A)$$

minden $A, M \subset X$-re teljesül, mert φ^* szubadditív. Az is igaz, hogy minden $A, M \subset X$-re és minden $B \in \mathcal{L}$-re

$$\varphi^*(M \cap (A \sqcup B)) = \varphi^*(M \cap B) + \varphi^*(M \cap A),$$

mert $M \cap (A \sqcup B) \cap B = M \cap B$ és $M \cap (A \sqcup B) - B = M \cap A$. Az $M = X$ választással ebből az is következik, hogy μ additív.

Lemma 4.2. *Ha $\psi \colon \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ egy tetszőleges függvény, amire $\psi(\emptyset) = 0$, akkor a ψ-mérhető halmazok, tehát az*

$$\mathcal{M} = \{A \subset X : \textit{minden } M \subset X\textit{-re } \psi(M) = \psi(M \cap A) + \psi(M - A)\}$$

halmaz egy X-et tartalmazó gyűrű.

Bizonyítás. Nyilván $X \in \mathcal{M}$, mert

$$\psi(M \cap X) + \psi(M - X) = \psi(M) + \psi(\emptyset) = \psi(M)$$

minden $M \subset X$-re. Könnyen láthatóan a $\psi(M) = \psi(M \cap A) + \psi(M - A)$ egyenlőség pontosan akkor igaz valamilyen $A \subset X$-re, ha igaz $X - A$-ra, tehát az $\mathcal{M}$ zárt a komplementum képzésre. Az $\mathcal{M}$ metszetzárt is a következők miatt. Ha $A, B \in \mathcal{M}$, akkor minden $M \subset X$-re

$$\begin{aligned}\psi(M) = \psi(M - A) + \psi(M \cap A) = \\ \psi(M - A) + \psi((M \cap A) \cap B) + \psi((M \cap A) - B) = \\ \psi(M \cap (A \cap B)) + \psi(M - A) + \psi((M \cap A) - B).\end{aligned}$$

De

$$\begin{aligned}\psi(M - (A \cap B)) = \psi((M - (A \cap B)) \cap A) + \psi((M - (A \cap B)) - A) = \\ \psi((M - (A \cap B)) \cap A) + \psi(M - A) = \psi((M \cap A) - (A \cap B)) + \psi(M - A) = \\ \psi((M \cap A) - B) + \psi(M - A),\end{aligned}$$

és ezért

$$\psi(M) = \psi(M \cap (A \cap B)) + \psi(M - (A \cap B)).$$

□

Ezekből kapjuk a következő állítást.

Állítás 4.3. *Az $\mathcal{L}$ egy gyűrű és a rajta értelmezett μ egy additív függvény.* □

Ennél sokkal több is igaz:

Tétel 4.4. *Az $\mathcal{L}$ halmazra és a μ függvényre a következők teljesülnek.*

(1) *Az $\mathcal{L}$ egy σ-algebra, azaz egy X-et tartalmazó σ-gyűrű, és μ egy rajta értelmezett mérték.*
(2) *$\mathcal{Q} \subset \mathcal{L}$ és a μ megszorítása $\mathcal{Q}$-ra megegyezik φ-vel, tehát*

$$\mu|_{\mathcal{Q}} = \varphi.$$

(3) *A μ mérték teljes, tehát ha $A \in \mathcal{L}$ és $\mu(A) = 0$, akkor minden $B \subset A$-ra $B \in \mathcal{L}$ is teljesül és $\mu(B) = 0$.*

(4) *Legyen $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}$ egy $\mathcal{Q}$-t tartalmazó σ-gyűrű. Ha $\nu\colon \mathcal{S} \to [0, \infty]$ egy olyan mérték, amire*

$$\nu|_{\mathcal{Q}} = \varphi,$$

akkor

$$\nu \le \mu|_{\mathcal{S}}.$$

Bizonyítás. Az (1)-eshez először azt mutatjuk meg, hogy $\mathcal{L}$ zárt a megszámlálható diszjunkt unióra. Legyenek $A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{L}$ páronként diszjunkt halmazok. Azt kell megmutatni, hogy minden $M \subset X$-re

$$\varphi^*(M) \ge \varphi^*(M \cap \sqcup_{n\ge1} A_n) + \varphi^*(M - \sqcup_{n\ge1} A_n).$$

Persze véges sok A_n uniója is $\mathcal{L}$-beli, hiszen az előző lemma alapján $\mathcal{L}$ egy gyűrű. Ekkor

$$\varphi^*(M) = \varphi^*(M \cap \sqcup_{n=1}^{k} A_n) + \varphi^*(M - \sqcup_{n=1}^{k} A_n) \ge$$

$$\varphi^*(M \cap \sqcup_{n=1}^{k} A_n) + \varphi^*(M - \sqcup_{n\ge1} A_n) = \sum_{n=1}^{k} \varphi^*(M \cap A_n) + \varphi^*(M - \sqcup_{n\ge1} A_n).$$

Ha $k \to \infty$, akkor ezek szerint φ^* σ-szubadditivitását felhasználva

$$\varphi^*(M) \ge \sum_{n\ge1} \varphi^*(M \cap A_n) + \varphi^*(M - \sqcup_{n\ge1} A_n) \ge \varphi^*(M \cap \sqcup_{n\ge1} A_n) + \varphi^*(M - \sqcup_{n\ge1} A_n).$$

Ezek után azt mutatjuk meg, hogy $\mathcal{L}$ zárt bármilyen megszámlálható unióra. Ha $A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{L}$ tetszőleges halmazok, akkor

$$\cup_{n\ge1} A_n = \sqcup_{n\ge1} (A_n - \cup_{k=1}^{n-1} A_k),$$

ahol $A_n - \cup_{k=1}^{n-1} A_k$ szintén $\mathcal{L}$-beliek, mert $\mathcal{L}$ gyűrű. Ezért az előzőek alapján

$$\cup_{n\ge1} A_n \in \mathcal{L}.$$

Tehát $\mathcal{L}$ egy X-et tartalmazó σ-gyűrű. Végül mivel μ additív és σ-szubadditív, ezért a μ σ-additív is. A (2)-es bizonyításához legyen $A \in \mathcal{Q}$ egy rögzített halmaz. Elég azt belátni, hogy

$$\varphi^*(M) \ge \varphi^*(M \cap A) + \varphi^*(M - A)$$

minden $M \subset X$-re. Ha $\varphi^*(M) = \infty$, akkor ez nyilván teljesül, ha pedig $\varphi^*(M)$ véges, akkor

$$M \subset \cup_{n\ge1} A_n$$

valamilyen $A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{Q}$ halmazokra. Jelölje $\tilde{\varphi}$ a φ-nek a generált $\mathcal{R}(\mathcal{Q})$ gyűrűre való additív kiterjesztését. Ekkor

$$M \cap A \subset \cup_{n\ge1} (A_n \cap A)$$

és

$$M \cap (X - A) \subset \cup_{n\ge1} (A_n \cap (X - A))$$

miatt

$$\varphi^*(M \cap A) \leq \sum_{n \geq 1} \varphi(A_n \cap A)$$

és

$$\varphi^*(M - A) \leq \sum_{n \geq 1} \tilde{\varphi}(A_n \cap (X - A)),$$

mert az $A_n \cap A$ és $A_n \cap (X - A)$ halmazok $\mathcal{Q}$-beliek illetve $\mathcal{R}(\mathcal{Q})$-beliek (amik megint csak $\mathcal{Q}$-beliek diszjunkt uniói). Ekkor

$$\varphi(A_n) = \tilde{\varphi}(A_n) = \tilde{\varphi}((A_n \cap A) \sqcup (A_n \cap (X - A))) =$$
$$\tilde{\varphi}(A_n \cap A) + \tilde{\varphi}(A_n \cap (X - A)) = \varphi(A_n \cap A) + \tilde{\varphi}(A_n \cap (X - A)),$$

ezért

$$\varphi^*(M \cap A) + \varphi^*(M - A) \leq \sum_{n \geq 1} \varphi(A_n \cap A) + \tilde{\varphi}(A_n \cap (X - A)) = \sum_{n \geq 1} \varphi(A_n).$$

Mivel az A_n-ek tetszőlegesek voltak, φ^* definíciója alapján

$$\varphi^*(M \cap A) + \varphi^*(M - A) \leq \varphi^*(M),$$

tehát $\mathcal{Q} \subset \mathcal{L}$. Az is igaz, hogy $\mu|_{\mathcal{Q}} = \varphi$, mert $\varphi^*|_{\mathcal{Q}} = \varphi$. A (3)-as azért igaz, mert ha $\mu(A) = 0$, akkor $\varphi^*(A) = 0$, tehát

$$0 = \inf\{\sum_{i \geq 1} \varphi(B_i) : B_i \subset \mathcal{Q}, A \subset \cup_{i \geq 1} B_i\},$$

és $B \subset A$ miatt $\varphi^*(B) \leq \varphi^*(A)$, ezért $\varphi^*(B) = 0$. Ha pedig $M \subset X$, akkor $M - B \subset M$ és $M \cap B \subset B$ miatt

$$\varphi^*(M) \geq \varphi^*(M - B) = \varphi^*(M - B) + \varphi^*(M \cap B).$$

A (4)-eshez legyen $A \in \mathcal{S}$. Ha $A \subset \cup_{i \geq 1} B_i$, ahol $B_i \in \mathcal{Q}$, akkor

$$\nu(A) \leq \sum_{i \geq 1} \nu(B_i) = \sum_{i \geq 1} \varphi(B_i),$$

mert ν σ-szubadditív. Ezért az infimumokra áttérve $\nu(A) \leq \varphi^*(A) = \mu|_{\mathcal{S}}(A)$. □

Felhasznált irodalom.

Czách László: Mértékelmélet jegyzet
Paul Halmos: Measure theory