Differenciálható sokaságok

1. Topologikus sokaságok

Definíció 1.1 (Sokaság). Legyen $n \geq 0$ valamilyen rögzített egész. Egy $(X, \mathcal{U})$ topologikus tér egy *n-dimenziós sokaság*, ha T_2, M_2 és minden $x \in X$-nek létezik olyan környezete, ami homeomorf $\mathbb{R}^n$-el.

Egy 0-dimenziós sokaság ezek szerint homeomorf egy legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sok pontból álló diszkrét metrikus térrel. Az, hogy minden $x \in X$-nek létezik olyan környezete, ami homeomorf $\mathbb{R}^n$-el, azt jelenti, hogy a tér "lokálisan $\mathbb{R}^n$", tehát egy sokaságban egy pontszerű megfigyelő a környezetét $\mathbb{R}^n$-nek érzékeli. Persze lehet, hogy az egész sokaság nem homeomorf $\mathbb{R}^n$-el. Fontos kérdés, hogy valamilyen $n \geq 0$-ra milyen n-dimenziós sokaságok léteznek. Az egyszerűség kedvéért egy $(X, \mathcal{U})$ n-dimenziós sokaság alaphalmazát és magát a sokaságot is X^n-nel jelöljük.

Állítás 1.2. *A definícióban szereplő három tulajdonság egymástól független, tehát léteznek olyan X_1, X_2, X_3 topologikus terek, hogy*

(1) *X_1 nem lokálisan $\mathbb{R}^n$, de T_2 és M_2,*
(2) *X_2 nem T_2, de M_2 és lokálisan $\mathbb{R}^n$,*
(3) *X_3 nem M_2, de T_2 és lokálisan $\mathbb{R}^n$.*

Bizonyítás. Például az $X_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$ altere $\mathbb{R}^2$-nek T_2, M_2 de a $(0,0)$-nak nyilván nincs semmilyen $\mathbb{R}^n$-el homeomorf környezete. Az $X_2 = (\mathbb{R} \sqcup \mathbb{R})/\sim$ tér, ahol $(x,0) \sim (y,1)$ pontosan akkor, ha $x = y < 0$ egy lokálisan $\mathbb{R}^1$ tér, mert a $[(0,0)]$-nak és a $[(0,1)]$-nek is van $\mathbb{R}$-el homeomorf környezete. De a $[(0,0)]$ és a $[(0,1)]$ nem választhatók el nyílt környezetekkel, tehát X_2 nem T_2, de nyilván M_2. Végül például kontinuum sok $\mathbb{R}$ diszjunkt uniója nyilván nem M_2, de T_2 és lokálisan $\mathbb{R}^1$. $\square$

Tétel 1.3. *Minden X^n kompakt sokaság beágyazható valamilyen $\mathbb{R}^m$-be, tehát létezik olyan $f\colon X^n \to \mathbb{R}^m$ folytonos leképezés, ami egy homeomorfizmus X^n és az $f(X^n)$ altér között.*

Bizonyítás. Mivel X kompakt, ezért létezik véges sok $U_1, \ldots, U_k \subset X$ nyílt halmaz, mindegyik homeomorf $\mathbb{R}^n$-el, úgy, hogy $\bigcup_{i=1}^k U_i = X$. Definiálunk egy

$$f\colon X \to \prod_{i=1}^k \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^{k(n+1)}$$

leképezést, ami egy topologikus beágyazása lesz X-nek. Legyen $f_i\colon U_i \to \mathbb{R}^{n+1}$ az U_i homeomorfizmusa az $\mathbb{R}^{n+1}$-beli $S^n - \{x\}$-el, ahol x egy pontja az $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ standard gömbnek. Terjesszük ki az f_i leképezést X-re úgy, hogy $f_i(X - U_i) = x$. Ekkor mindegyik f_i folytonos, és az

$$f = (f_1, \dots, f_k)\colon X \to \mathbb{R}^{k(n+1)}$$

leképezés egy homeomorfizmus X és $f(X)$ között, mert injektív, az X kompakt és $\mathbb{R}^{k(n+1)}$ pedig T_2. □

Állítás 1.4. *Legyen $m, n \geq 0$. Ha X egy olyan altere az $\mathbb{R}^m$ Euklideszi térnek, hogy X minden pontjának létezik olyan $U \subset X$ környezete, ami $\mathbb{R}^n$-el homeomorf, akkor X egy n-dimenziós sokaság.*

Bizonyítás. Az $\mathbb{R}^m$ minden altere M_2 és T_2, ezért egy lokálisan $\mathbb{R}^n$ altér sokaság is. □

Például $\mathbb{R}^m$-nek az $\{x \in \mathbb{R}^m : |x| = 1\}$ altere, amit S^{m-1}-el jelölünk, egy $(m-1)$-dimenziós sokaság, mert minden $x \in S^{m-1}$-nek az $S^{m-1} - \{-x\}$ halmaz a sztereografikus projekció miatt egy $\mathbb{R}^{m-1}$-el homeomorf környezete. Egy másik példa: bármilyen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvény $\mathbb{R}^2$-beli G grafikonja egy 1-dimenziós sokaság, mert az $(x, 0) \mapsto (x, f(x))$ leképezés egy homeomorfizmus $\mathbb{R}$ és G között.

Tétel 1.5. *Ha X egy összefüggő 1-dimenziós sokaság, akkor X homeomorf $\mathbb{R}$-el vagy S^1-el.*

Bizonyítás. Először néhány lemmát bizonyítunk. Legyen X egy összefüggő 1-dimenziós sokaság. Legyen $i\colon (0,1) \to X$ és $j\colon (0,1) \to X$ két beágyazás.

Lemma 1.6. *Az $i((0,1)) \cap j((0,1))$ altérnek legfeljebb két összefüggőségi komponense lehet.*

Bizonyítás. Tekintsük az $i \times j\colon (0,1) \times (0,1) \to X \times X$

$$i \times j(s,t) = (i(s), j(t))$$

folytonos leképezést. Ekkor az $(i \times j)^{-1}(\Delta)$ halmaz, ahol

$$\Delta = \{(x,x) \in X \times X : x \in X\}$$

az $X \times X$-beli diagonális, tekinthető a $j^{-1} \circ i$ függvény grafikonjának, ami egy zárt halmaz $(0,1) \times (0,1)$-ben, mert Δ zárt. Ez csak úgy lehet, ha $j^{-1} \circ i$ lehető legbővebb értelmezési tartományának összefüggőségi komponensei a $(0,1)$ intervallum elején és végén egy-egy kisebb intervallum, vagy csak egy darab komponens van (ha az értelmezési tartomány nem üres). Ezek szerint a $j^{-1} \circ i$ értelmezési tartománya legfeljebb két összefüggőségi komponensből állhat, ahol $j^{-1} \circ i$ szigorúan monoton függvény kell legyen. Ha két komponens van, akkor $j^{-1} \circ i$ mindkét intervallumon növekvő (vagy csökkenő). □

Lemma 1.7. *Ha $i((0,1)) \cap j((0,1))$-nek két összefüggőségi komponense van, akkor X homeomorf S^1-el. Ha $i((0,1)) \cap j((0,1))$-nek csak egy összefüggőségi komponense van, akkor az i leképezés kiterjed egy $(0,1)$-nél esetleg bővebb nyílt intervallumon értelmezett és $i((0,1)) \cup j((0,1))$-re képező homeomorfizmussá.*

Bizonyítás. Ez egyszerűen következik az előző lemmából és abból, hogy $j^{-1} \circ i$ szigorúan monoton és hogy ha az értelmezési tartományának két összefüggőségi komponense van, akkor $j^{-1} \circ i$ mindkét intervallumon növekvő (vagy mindkét intervallumon csökkenő). $\square$

A tétel bizonyításához tegyük fel, hogy $\mathcal{D}$ olyan X-beli nyílt halmazok legfeljebb megszámlálhatóan végtelen rendszere, hogy $\bigcup \mathcal{D} = X$. Az is feltehető, hogy minden $\mathcal{D}$-beli halmaz homeomorf $\mathbb{R}$-el. Ha X nem homeomorf S^1-el, akkor az előző lemmák alapján minden két $\mathcal{D}$-beli halmaz vagy diszjunkt, vagy az uniójuk is homeomorf $\mathbb{R}$-el. Ugyanakkor a $\mathcal{D}$ halmazrendszer elemei olyan $U_1, U_2, \ldots$ sorozatba rendezhetőek, hogy minden n-re $\bigcup_{i=1}^{n} U_i$ metszi U_{n+1}-et, különben X nem lehetne összefüggő. De ekkor az $\bigcup_{i=1}^{n} U_i$ halmazsorozat egymásba ágyazott növekvő halmazsorozat, aminek minden tagja homeomorf $\mathbb{R}$-el, tehát $\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ is homeomorf $\mathbb{R}$-el. De mivel $\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i = X$, ezért $X = \mathbb{R}$. $\square$

Állítás 1.8. *Ha X egy n-dimenziós sokaság és Y egy m-dimenziós sokaság, akkor az $X \times Y$ direkt szorzat egy $(n+m)$-dimenziós sokaság.*

Bizonyítás. Nyilván $X \times Y$ is T_2 és M_2, és bármely $(x,y) \in X \times Y$ pontnak van $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$-el homeomorf környezete. $\square$

Definíció 1.9 (Peremes sokaság). Legyen $n \geq 1$ valamilyen rögzített egész. Egy $(X, \mathcal{U})$ topologikus tér egy *n-dimenziós peremes sokaság*, ha T_2, M_2 és minden $x \in X$-nek létezik olyan környezete, ami homeomorf $\mathbb{R}^n$-el vagy az

$$\mathbb{R}^{n-1} \times [0, \infty) = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\}$$

zárt féltérrel. Az $x \in X$ egy *perempont*, ha nem létezik $\mathbb{R}^n$-el homeomorf környezete. A perempontok által meghatározott alteret ∂X jelöli, amit az X *peremének* nevezünk.

Ezek szerint ha $f \colon X \to Y$ egy homeomorfizmus két n-dimenziós peremes sokaság között, akkor f megszorítva ∂X-re egy homeomorfizmus ∂X és ∂Y között.

Állítás 1.10. *Ha X egy n-dimenziós peremes sokaság és $\partial X \neq \emptyset$, akkor ∂X egy $(n-1)$-dimenziós sokaság.*

Bizonyítás. A ∂X altér nyilván T_2, M_2 és minden perempontnak van ∂X-beli $\{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$ alakú környezete, ami $\mathbb{R}^{n-1}$-el homeomorf. $\square$

Tétel 1.11. *Legyen X egy n-dimenziós peremes sokaság. Ha $f \colon \partial X \to \partial X$ egy tetszőleges homeomorfizmus, amire $f \circ f = \mathrm{id}_{\partial X}$, akkor az a topologikus tér, amit* *úgy kapunk, hogy kifaktorizálunk az*

$$x \sim y \iff \begin{cases} f(x) = y & \text{ha } x, y \in \partial X \\ x = y & \text{különben} \end{cases}$$

ekvivalencia relációval egy n-dimenziós (peremes) sokaság.

Bizonyítás. Az állítás feltételei szerint f megszorítva ∂X-re egy homeomorfizmus ∂X különböző komponensei között, vagy olyan homeomorfizmusa egyetlen komponensnek, ami önmagára képez. Jelölje X_1 azokat a peremkomponenseket, amikre $f|_{X_1} = \mathrm{id}_{X_1}$, X_2 azokat, amiket f nem önmagukba képez és X_3 azokat, amiket f önmagukba képez de nem az identitással. Ha $[x] \in X/\sim$ úgy, hogy $x \in X_2 \cup X_3$, akkor van egyetlen olyan $y \in \partial X$, $y \neq x$, amire $[x] = [y]$. Ha $x \in X_2$, akkor x-nek egy kis U környezetéből és $y = f(x)$-nek az $f(U)$ környezetéből könnyen kaphatunk $[x]$-nek egy $\mathbb{R}^n$-el homeomorf környezetét. Ha $q\colon X \to X/\sim$ jelöli a faktorleképezést, akkor $q(U \cup f(U))$ egy környezete lesz $[x]$-nek. Sőt, ha $h\colon U \to \mathbb{R}^{n-1} \times [0, \infty)$ egy homeomorfizmus, akkor az az

$$F\colon \mathbb{R}^n \to q(U \cup f(U))$$

leképezés, amire minden $v \in \mathbb{R}^n$-re

$$F(v) = \begin{cases} q(h^{-1}(v)) & \text{ha } v \in \mathbb{R}^{n-1} \times [0, \infty) \\ q(f(h^{-1}(T(v)))) & \text{ha } v \in \mathbb{R}^{n-1} \times (-\infty, 0], \end{cases}$$

ahol T az n-dik koordináta -1-el való szorzása, egy homeomorfizmus $\mathbb{R}^n$ és $q(U \cup f(U))$ között. Ha pedig $x \in X_3$, akkor ugyanígy találhatunk $[x]$-nek $\mathbb{R}^n$-el homeomorf környezetét, de U olyan kell legyen, ami diszjunkt $f(U)$-tól. Ha U csak olyan lenne, hogy $y \notin U$, akkor U helyett $U - f(U)$ egy megfelelő környezetét már tartalmazza x-nek. Végül könnyen láthatóan $q(X_1)$ lesz a pereme az $X/\sim$ sokaságnak. □

Állítás 1.12. *Ha X egy n-dimenziós peremes sokaság és Y egy m-dimenziós peremes sokaság, akkor az $X \times Y$ direkt szorzat egy $(n+m)$-dimenziós peremes sokaság és*

$$\partial(X \times Y) = (\partial X \times Y) \cup (X \times \partial Y),$$

és

$$(\partial X \times Y) \cap (X \times \partial Y) = \partial X \times \partial Y.$$

Bizonyítás. Az eddigiek alapján csak az nem elég nyilvánvaló, hogy ha $x \in \partial X$ és $y \in \partial Y$, akkor (x, y)-nak van $\mathbb{R}^{n+m-1} \times [0, \infty)$-el homeomorf környezete. Ezt viszont elég az $n = m = 1$ esetben bizonyítani, mert ha x-nek U_x egy $\mathbb{R}^{n-1} \times [0, \infty)$-el és y-nak U_y egy $\mathbb{R}^{m-1} \times [0, \infty)$-el homeomorf környezete, akkor $U_x \times U_y$ homeomorf $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^{m-1} \times [0, \infty) \times [0, \infty)$-el, tehát ha megmutatjuk, hogy $[0, \infty) \times [0, \infty)$ homeomorf $\mathbb{R} \times [0, \infty)$-el, azzal bebizonyítjuk az állítást. De például az $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq |x|\}$ síkrész és az $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$ féltér között az $f(x, y) = (x, y - |x|)$ leképezés egy homeomorfizmus. □

2. Differenciálható sokaságok

A továbbiakban egy $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ leképezést akkor nevezünk differenciálhatónak, ha akárhányszor differenciálható.

Definíció 2.1 (Térkép sokaságon). Ha X^n egy sokaság, $U \subset X$ egy $\mathbb{R}^n$-el homeomorf nyílt halmaz és $a \in U$, akkor egy $\bar{x}\colon U \to \mathbb{R}^n$ homeomorfizmust egy a *körüli térképnek* nevezünk.

Ha $\bar{x}\colon U \to \mathbb{R}^n$ és $\bar{y}\colon V \to \mathbb{R}^n$ két térkép, akkor

$$\bar{y} \circ \bar{x}^{-1}|_{\bar{x}(U \cap V)}\colon \bar{x}(U \cap V) \to \bar{y}(U \cap V)$$

egy homeomorfizmus $\mathbb{R}^n$ két nyílt részhalmaza között. Egy ilyen homeomorfizmust akkor nevezünk diffeomorfizmusnak, ha differenciálható és az inverze is differenciálható.

Definíció 2.2 (Sima struktúra). Legyen X^n egy sokaság és $\mathcal{D}$ térképeknek egy halmaza. A $\mathcal{D}$ egy *sima* (vagy *differenciálható*) *struktúra* X-en, ha

(1) a $\mathcal{D}$-beli térképek értelmezési tartományai fedik X-et,
(2) minden $\bar{x}, \bar{y} \in \mathcal{D}$ térképekre $\bar{y} \circ \bar{x}^{-1}$ egy diffeomorfizmus $\bar{x}(D_{\bar{x}} \cap D_{\bar{y}})$ és $\bar{y}(D_{\bar{x}} \cap D_{\bar{y}})$ között, és
(3) ha $\bar{x}$ egy olyan térkép, amire $\bar{y} \circ \bar{x}^{-1}$ diffeomorfizmus minden $\bar{y} \in \mathcal{D}$ esetén, akkor $\bar{x}$ is benne van $\mathcal{D}$-ben.

Ekkor az X egy *sima* (vagy *differenciálható*) *sokaság* a $\mathcal{D}$ sima struktúrával.

Ha $\mathcal{D}'$ egy olyan halmaza térképeknek, amire az (1)-es és (2)-es tulajdonság teljesül, akkor egyértelműen kiterjeszthető sima struktúrává. Egyszerűen csak az összes olyan $\bar{x}$ térképet kell $\mathcal{D}'$-hez hozzávenni, amikre teljesül, hogy minden $\bar{y} \in \mathcal{D}'$-re $\bar{y} \circ \bar{x}^{-1}$ diffeomorfizmus. Az így kapott $\mathcal{D}$ halmazra könnyen láthatóan (1), (2) és (3) is teljesül. Emiatt gyakran egy sokaságon csak egy (1)-est és (2)-est kielégítő $\mathcal{D}'$ halmazzal adunk meg egy sima struktúrát.

Például $\mathbb{R}^n$-en a csak az $\bar{y}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\bar{y}(x) = x$ leképezésből álló

$$\mathcal{D}' = \{\bar{y}\}$$

halmaz is kiterjed sima struktúrává, ezt hívjuk az $\mathbb{R}^n$ standard sima struktúrájának. Ekkor a jól ismert tétel szerint ha $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ az $a \in \mathbb{R}^n$ egy környezetében differenciálható és deriváltjának a-ban a rangja k, akkor léteznek olyan $\bar{x}$ és $\bar{x}'$ térképek a standard sima struktúrákból a és $f(a)$ körül, hogy $\bar{x}(a) = 0$, $\bar{x}'(f(a)) = 0$ és az $\bar{x}' \circ f \circ \bar{x}^{-1}$ leképezés $\bar{x}(a)$ egy környezetében

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots x_k, 0, \dots, 0)$$

alakú. A továbbiakban $\mathbb{R}^n$-en mindig a standard sima struktúrát tekintjük.

Persze lehet, hogy egy sokaságon nem létezik sima struktúra. Ha a sokaság csak 1-, 2-, vagy 3-dimenziós, akkor mindig van rajta sima struktúra, de létezik olyan 4-dimenziós sokaság, amin nincs.

Definíció 2.3 (Diffeomorf sokaságok). Az X és Y sima sokaságok *diffeomorfak*, ha létezik olyan $\varphi\colon X \to Y$ bijekció, hogy minden $a \in X$ és $\varphi(a)$ pont körüli valamilyen $\bar{x}$ és $\bar{y}$ térképekre az

$$\bar{y} \circ \varphi \circ \bar{x}^{-1}$$

leképezés egy diffeomorfizmus $\bar{x}(a)$ és $\bar{y}(\varphi(a))$ valamilyen környezetei között.

Diffeomorf sima sokaságok persze homeomorfak is. Egy adott sokaságon két sima struktúrát nem különböztetünk meg ha azok diffeomorfak, illetve két diffeomorf sokaságot is ekvivalensnek tekintünk. Meglepő módon léteznek olyan legalább 4-dimenziós sokaságok, amiken több egymással nem diffeomorf sima struktúra is van. Például $\mathbb{R}^4$-en létezik kontinuum sok egymással nem diffeomorf sima struktúra, de ha $n \neq 4$, akkor $\mathbb{R}^n$-en csak egy darab sima struktúra van. Vagy például S^7-en összesen 15 sima struktúra létezik, tehát 15 darab olyan sima sokaság van, ami homeomorf, de nem diffeomorf S^7-el.

Definíció 2.4 (Differenciálható leképezés). Legyenek $(X, \mathcal{D}_X)$ és $(Y, \mathcal{D}_Y)$ sima sokaságok. Egy $f\colon X \to Y$ leképezés *differenciálható* az $a \in X$ pontban ha valamilyen a és $f(a)$ körüli $\bar{x} \in \mathcal{D}_X$ és $\bar{y} \in \mathcal{D}_Y$ térképekkel az

$$\bar{y} \circ f \circ \bar{x}^{-1}$$

leképezés differenciálható az $\bar{x}(a)$ pontban.

Azért van értelme egyáltalán sokaságok közötti leképezések differenciálhatóságáról beszélni, mert az, hogy $\bar{y} \circ f \circ \bar{x}^{-1}$ differenciálható-e $\bar{x}(a)$-ban, nem függ az $\bar{x}$ és $\bar{y}$ térképek választásától, ha a sima struktúrák rögzítettek. Tehát amiatt tudunk a valós analízishez hasonlóan az X és Y sokaságok közötti leképezésekkel dolgozni (például deriválni őket, differenciálegyenleteket felírni, stb.), mert az $\bar{x}' \circ \bar{x}^{-1}$ és $\bar{y}' \circ \bar{y}^{-1}$ kompozíciók diffeomorfizmusok tetszőleges $\bar{x}', \bar{x} \in \mathcal{D}_X$-re és $\bar{y}', \bar{y} \in \mathcal{D}_Y$-ra, tehát hogy léteznek sima struktúrák a sokaságokon. Ez azt is jelenti, hogy ugyanazon a sokaságon két különböző sima struktúrával teljesen máshogy viselkedhetnek a függvények, differenciálegyenletek, stb. Pontosan ezt kihasználva lehet olyasmit bizonyítani, hogy két adott sima struktúra nem ekvivalens.

Lemma 2.5. *Egy sima sokaságra minden $\bar{x}\colon U \to \mathbb{R}^n$ leképezés diffeomorfizmus.*

Bizonyítás. Az $\bar{x}$ és az identitás térképeken keresztül könnyen láthatóan teljesül a feltétel. □

Persze az, hogy mi egy differenciálható leképezés deriváltja (amit a valós azalízisben Jacobi mátrixnak neveztünk) egy pontban, függ a térképektől. De például a derivált rangja jóldefiniált, mert másik térképen keresztül nézve a deriválás láncszabálya alapján a deriváltat akkor egy nemnulla determinánsú mátrixszal kell szorozni.

Definíció 2.6 (Immerzió és szubmerzió). Legyen $f\colon X^n \to Y^m$ két sima sokaság közötti differenciálható leképezés. Ha f' rangja minden $x \in X$ pontban megegyezik n-el, akkor f egy *immerzió.* Ha pedig m-el, akkor f egy *szubmerzió.*

Tehát ha $f\colon X^n \to Y^m$ egy immerzió, akkor $n \leq m$ és ha $f\colon X^n \to Y^m$ egy szubmerzió, akkor $n \geq m$.

Ha $f\colon X^n \to Y^m$ egy immerzió, akkor minden $a \in X$-re léteznek olyan $\bar{x}$ és $\bar{y}$ térképek a és $f(a)$ körül, hogy $\bar{x}(a) = 0$, $\bar{y}(f(a)) = 0$ és az $\bar{y} \circ f \circ \bar{x}^{-1}$ leképezés $\bar{x}(a)$ egy környezetében

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots x_n, 0, \dots, 0)$$

alakú.

Ha $f\colon X^n \to Y^m$ egy immerzió és $n = m$, akkor ezek szerint f egy diffeomorfizmus minden $a \in X$ egy környezetében, tehát ha f injektív, akkor f egy homeomorfizmus X és $f(X)$ között, ahol $f(X)$-et az altér topológiával tekintjük. Az $n < m$ esetben könnyű példát mutatni olyan injektív $f\colon X^n \to Y^m$ immerzióra, ami nem homeomorfizmus X és az $f(X)$ altér között.

Definíció 2.7 (Beágyazás). Ha $f\colon X^n \to Y^m$ egy immerzió és f egy homeomorfizmus X és $f(X)$ között (ahol $f(X)$-et az altér topológiával tekintjük), akkor f egy *beágyazás.*

Definíció 2.8 (Részsokaság). Legyen $(X^n, \mathcal{D})$ egy sima sokaság, $Y \subset X$ és $m \geq 0$ rögzített egész. Ha minden $a \in Y$-hoz létezik olyan $\bar{x}\colon U \to \mathbb{R}^n$ $\mathcal{D}$-beli térkép, amire $\bar{x}(a) = 0$ és

$$\bar{x}(Y \cap U) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_{m+1} = \dots = x_n = 0\},$$

akkor az Y egy *m-dimenziós részsokaság.*

Jelölje $\mathrm{proj}_m\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ az $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_m)$ projekciót.

Állítás 2.9. *A 2.8 definícióbeli Y részhalmaz az altér topológiával egy m-dimenziós sima sokaság, ahol a sima struktúrát a*

$$\mathrm{proj}_m \circ \bar{x}|_{Y \cap U}\colon U \cap Y \to \mathbb{R}^m$$

térképek határozzák meg. Az $i\colon Y \to X$, $i(a) = a$ leképezés egy beágyazás.

Bizonyítás. Az Y egy m-dimenziós sokaság, mert egy M_2 és T_2 tér altere és a $\mathrm{proj}_m \circ \bar{x}|_{Y \cap U}$ leképezések homeomorfizmusok: az $\mathbb{R}^m$-be képeznek bijektíven, folytonosak és az inverzük is folytonos. Ugyanakkor a $\mathrm{proj}_m \circ \bar{x}|_{Y \cap U}$ térképek egy sima struktúrát határoznak meg, mert ha $\bar{x}\colon U \to \mathbb{R}^n$ és $\bar{y}\colon V \to \mathbb{R}^n$ két olyan $\mathcal{D}$-beli térkép, amire $U \cap V \cap Y \neq \emptyset$, akkor mivel

$$\bar{x} \circ \bar{y}^{-1}\colon \bar{y}(U \cap V) \to \mathbb{R}^n$$

differenciálható, az $\mathbb{R}^m$ altérre való megszorítása is az. Az $i\colon Y \to X$ leképezés valamilyen $\bar{x}\colon U \to \mathbb{R}^n$ térkép segítségével az

$$\bar{x} \circ i \circ \bar{x}|_{Y\cap U}^{-1} = \bar{x} \circ \bar{x}|_{Y\cap U}^{-1}$$

alakban írható, ami megegyezik az $\mathbb{R}^m$ tér $\mathbb{R}^n$-be való beágyazásával, így i differenciálható és deriváltjának rangja m, tehát egy immerzió. Ebből az is látható, hogy az $i\colon Y \to i(Y)$ inverze folytonos. □

Állítás 2.10. *Legyen $f\colon Y^m \to X^n$ egy beágyazás. Ekkor $f(Y)$ egy részsokaság és $f\colon Y \to f(Y)$ egy diffeomorfizmus.*

Bizonyítás. Az f egy immerzió, ezért minden $a \in Y$ pont egy környezetében megfelelő $\bar{y}\colon U \to \mathbb{R}^m$, $\bar{x}\colon V \to \mathbb{R}^n$, $\bar{y}(a) = 0$, $\bar{x}(f(a)) = 0$, térképeken keresztül f megegyezik az

$$\alpha\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$

$$\alpha\colon (x_1, \ldots, x_m) \mapsto (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$$

injektív lineáris leképezéssel. Az f homeomorfizmus Y és az $f(Y)$ altér között, ezért az $f(a)$-nak valamilyen X-beli W környezetére f egy homeomorfizmus $f^{-1}(f(Y)\cap W)$ és $f(Y)\cap W$ között. Az $\bar{y}$ és $\bar{x}$ térképeken keresztül ez az

$$f\colon f^{-1}(f(Y)\cap W) \to f(Y)\cap W$$

homeomorfizmus pont az α-val egyezik. Mindebből az következik, hogy $f(Y)\cap W$ megfelel az $\mathbb{R}^m$ altérnek $\mathbb{R}^n$-ben, tehát $f(Y)$ egy részsokaság és f egy diffeomorfizmus. □

Definíció 2.11 (Szinguláris és reguláris pont). Legyen $f\colon X^n \to Y^m$ két sima sokaság közötti differenciálható leképezés. Ha f' rangja egy $a \in X$-ben kisebb, mint m, akkor az a egy *szinguláris pontja* f-nek és $f(a)$ egy *kritikus értéke* f-nek. Ha az f' rangja egy $a \in X$-ben megegyezik m-el, akkor az a egy *reguláris pontja* f-nek. Ha az f-nek valamilyen $b \in Y$-ra minden $a \in f^{-1}(b)$ pont reguláris pontja, akkor b az f-nek egy *reguláris értéke.*

Tétel 2.12. *Egy $f\colon X^n \to Y^m$ differenciálható leképezés minden reguláris értékének őse egy $(n-m)$-dimenziós részsokaság.*

Bizonyítás. Ha $q \in f(X)$ egy reguláris érték, akkor biztosan $n \geq m$. Tegyük fel, hogy $p \in X$ és $f(p) = q$. Legyenek $\bar{x}\colon U \to \mathbb{R}^n$ és $\bar{y}\colon V \to \mathbb{R}^m$ térképek p és q körül. Ekkor az $\bar{y}\circ f\circ\bar{x}^{-1}$ leképezésnek a rangja m, ezért létezik olyan $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\varphi(0) = 0$ diffeomorfizmus, hogy az

$$\tilde{f} = \bar{y} \circ f \circ \bar{x}^{-1} \circ \varphi\colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^m$$

$$(x, y) \mapsto z$$

leképezésnek az x szerinti deriváltja a 0-ban maximális rangú, tehát

$$\det \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(0) \neq 0.$$

Emiatt a

$$\Phi(x, y) = (\tilde{f}(x, y), y)$$

leképezés Jacobi mátrixa a 0-ban szintén maximális rangú, így a

$$\Phi \colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$$

egy diffeomorfizmus a 0 valamilyen környezetében. Ha $g \colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^m$ jelöli az első változóra való vetítést, akkor

$$g \circ \Phi = \tilde{f},$$

ezért

$$g = \tilde{f} \circ \Phi^{-1}$$

a 0 egy környezetében, tehát g egy másik felírása valamilyen térképeken keresztül f-nek a p egy környezetében. De

$$g^{-1}(0) = \{0\} \times \mathbb{R}^{n-m},$$

amiből az következik, hogy minden $p \in f^{-1}(q)$-nak létezik olyan $\tilde{U}$ környezete, hogy $\tilde{U} \cap f^{-1}(q)$ egy $\mathbb{R}^{n-m}$-el diffeomorf részsokaság X-ben. □

Példák 2.13.

(1) Legyen $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_i x_i^2$, ahol $a_i > 0$, egy $\mathbb{R}^n$-ből $\mathbb{R}$-be képező differenciálható függvény, aminek minden $x \neq 0$-ban 1 a rangja. Tehát minden $x \neq 0$-ra $f(x)$ reguláris értéke f-nek. Minden $y > 0$-ra az $f^{-1}(y)$ halmaz homeomorf az S^{n-1} gömbbel.

(2) Egy $\mathbb{R}^{2n}$-ből $\mathbb{R}^{2m}$-be képező leképezést sokszor egyszerűbb $\mathbb{C}^n$-ből $\mathbb{C}^m$-be képező leképezésként értelmezni. Például az

$$f(u, v) = u^a + v^b,$$

ahol $u, v \in \mathbb{C}$ és $a, b \geq 2$ relatív prím egész számok egy $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ függvény, és mint $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ leképezésnek 2 a rangja minden $0 \neq (u, v)$-ben. Ha elég kicsi $\varepsilon > 0$-ra az $f^{-1}(\varepsilon)$ 2-dimenziós részsokaságot elmetszük egy kis $\delta > 0$ sugarú $S^3 = \{(u, v) \in \mathbb{C}^2 : |u|^2 + |v|^2 = \delta^2\}$ 3-dimenziós gömbbel, akkor egy 1-dimenziós részsokaságot kapunk S^3-ban, ami egy nemtriviális módon S^3-ba beágyazott S^1.

(3) Hasonlóan kaphatunk $(2n-3)$-dimenziós részsokaságokat S^{2n-1}-ben egy

$$(u_1, \ldots, u_n) \mapsto \sum_{i=1}^n u_i^{a_i},$$

$\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ leképezéssel. Például az

$$f(u_1, \ldots, u_5) = u_1^5 + u_2^3 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2$$

leképezéssel az

$$f^{-1}(\varepsilon) \cap S^9$$

egy 7-dimenziós sokaság, ami homeomorf, de nem diffeomorf S^7-el.

(4) Az

$$f(x,y,z) = (\sqrt{x^2+y^2}-2)^2 + z^2 - 1$$

függvény gradiense

$$(2x\frac{\sqrt{x^2+y^2}-2}{\sqrt{x^2+y^2}}, 2y\frac{\sqrt{x^2+y^2}-2}{\sqrt{x^2+y^2}}, 2z),$$

ami könnyen láthatóan nem 0, ha $f(x,y,z) = 0$. Ezért $f^{-1}(0)$ egy 2-dimenziós sima részsokaság $\mathbb{R}^3$-ban, mégpedig egy tórusz.

Definíció 2.14. Egy X^n sima sokaság $A \subset X$ részhalmaza 0*-mértékű*, ha bármely $\bar{x}\colon U \to \mathbb{R}^n$ térképre az $\bar{x}(U \cap A)$ halmaz 0-mértékű $\mathbb{R}^n$-ben.

Nyilván megszámlálható sok 0-mértékű halmaz uniója is 0-mértékű.

Ha $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ egy differenciálható leképezés és $K \subset \mathbb{R}^n$ egy kompakt, $A \subset K$ pedig egy 0-mértékű halmaz, akkor $f(A)$ is 0-mértékű, mert

$$|f(x) - f(y)| \le c|x-y|$$

valamilyen $c \in \mathbb{R}$ konstansra minden $x, y \in K$ esetén és így A-nak valamilyen $\varepsilon > 0$ összmértékű fedése adja $f(A)$-nak is valamilyen konstansszor $\varepsilon > 0$ összmértékű fedését. Egészen pontosan ha $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$, ahol C_i valamilyen d_i élhosszúságú kockák, akkor $x, y \in C_i \cap K$-ból

$$|f(x) - f(y)| \le c|x-y| \le cd_i\sqrt{n}$$

következik, tehát $f(C_i \cap K)$ benne van egy például $2cd_i\sqrt{n}$ élhosszúságú D_i kockában. Ezért

$$f(A) \subset f(K \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i) = f(\bigcup_{i=1}^{\infty} K \cap C_i) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i,$$

és ha $\varepsilon > \sum_{i=1}^{\infty} d_i^n$, akkor $\bigcup_{i=1}^{\infty} D_i$ mértéke kisebb, mint

$$\sum_{i=1}^{\infty} 2^n c^n d_i^n \sqrt{n}^n < 2^n c^n \sqrt{n}^n \varepsilon.$$

Ráadásul mivel $\mathbb{R}^n$ előáll megszámlálható sok kompakt halmaz uniójaként és megszámlálható sok 0-mértékű halmaz uniója is 0-mértékű, azt kapjuk, hogy ha $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ egy differenciálható leképezés és $A \subset \mathbb{R}^n$ tetszőleges 0-mértékű halmaz, akkor $f(A)$ is 0-mértékű.

Következmény 2.15. Legyen X^n egy sima sokaság, $A \subset X$ és $\mathcal{D}'$ térképeknek olyan halmaza, amire a 2.2 definícióbeli (1)-es és (2)-es teljesül. Az A halmaz akkor és csak akkor 0-mértékű, ha minden $\mathcal{D}'$-beli $\bar{x}\colon U \to \mathbb{R}^n$ térképre az $\bar{x}(A \cap U)$ halmaz 0-mértékű.

Állítás 2.16. *Legyen $f\colon X \to Y$ egy differenciálható leképezés két n-dimenziós sima sokaság között és $A \subset X$ egy 0-mértékű halmaz. Ekkor $f(A)$ is 0-mértékű Y-ban.*

Bizonyítás. Legyen $\bar{y}\colon U \to \mathbb{R}^n$ egy térkép Y-ban, azt kell belátni, hogy $\bar{y}(f(A) \cap U)$ egy 0-mértékű halmaz. Az $f(A) \cap U = f(A \cap f^{-1}(U))$ egyenlőség miatt ha megmutatnánk, hogy egy alkalmas $\bar{x}\colon V \to \mathbb{R}^n$, $A \cap f^{-1}(U) \subset V$ térképre $\bar{x}(A \cap f^{-1}(U))$ egy 0-mértékű halmaz, akkor az előzőeket az

$$\bar{y} \circ f \circ \bar{x}^{-1}\colon \bar{x}(A \cap f^{-1}(U)) \to \bar{y}(f(A) \cap U)$$

leképezésre alkalmazva az következne, hogy $\bar{y}(f(A) \cap U)$ is 0-mértékű. Az nem biztos, hogy $A \cap f^{-1}(U)$ része valamilyen $\bar{x}$ térkép értelmezési tartományának, de mivel minden sokaság M_2 tér, létezik legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sok olyan $\bar{x}_i\colon V_i \to \mathbb{R}^n$ térkép, amire $\bigcup_{i=1}^{\infty} V_i \supset A \cap f^{-1}(U)$ és így elég azt megmutatni, hogy minden $\bar{x}_i(V_i \cap A \cap f^{-1}(U))$ halmaz 0-mértékű, hiszen megszámlálhatóan végtelen sok 0-mértékű halmaz uniója is 0-mértékű. De ha az $\bar{x}_i(V_i \cap A)$ halmaz 0-mértékű, akkor nyilván $\bar{x}_i(V_i \cap A \cap f^{-1}(U))$ is az. $\square$

Tétel 2.17. *Egy $f\colon X^n \to Y^m$ differenciálható leképezés kritikus értékeinek halmaza 0-mértékű és reguláris értékeinek halmaza sűrű Y-ban.*

Bizonyítás. Először azt látjuk be, hogy a kritikus értékek halmaza 0-mértékű és ebből egyszerűen fog következni, hogy a reguláris értékek halmaza sűrű.

Tegyük fel először, hogy $1 \leq n < m$, ekkor azt kell belátni, hogy az $f(X)$ halmaz 0-mértékű Y-ban. Az $X \times \mathbb{R}^{m-n}$ térben $X \times \{0\}$ egy 0-mértékű halmaz és az $f \circ p\colon X \times \mathbb{R}^{m-n} \to Y$ leképezésre, ahol $p\colon X \times \mathbb{R}^{m-n} \to X$ a projekció,

$$f \circ p(X \times \{0\}) = f(X)$$

teljesül. Az $f \circ p$ két m-dimenziós sokaság közti leképezés és így $f(X)$ egy 0-mértékű halmaz.

Abban az esetben, ha $n \geq m \geq 1$, akkor a bizonyítás n-szerinti teljes indukcióval történik. Jelölje Σ az f szinguláris pontjainak halmazát. Először azt mutatjuk meg, hogy két 1-dimenziós sokaság közti differenciálható leképezés kritikus értékeinek halmaza 0-mértékű. Tegyük fel először, hogy $X = Y = \mathbb{R}$. Osszuk fel X-et végtelen sok azonos hosszúságú kompakt intervallumra. Tekintsük az f leképezés elsőrendű Taylor polinomját és az ahhoz tartozó maradéktagot. Ekkor minden $y \in \Sigma$-hoz létezik olyan I, a felosztásban szereplő és y-t tartalmazó intervallum, hogy ha $x \in I$, akkor

$$|f(x) - f(y)| \leq K(x - y)^2$$

valamilyen $K > 0$-ra, mert $f'(y) = 0$ és így a Taylor polinom megegyezik a konstans $f(y)$-al. Az is igaz, hogy minden $x \in I$-re és $y \in I \cap \Sigma$-ra

$$|f(x) - f(y)| \leq K(x - y)^2.$$

Jelölje λ az I hosszát. Az I felosztható s darab λ/s hosszú intervallumra, jelölje $I_1, \ldots, I_k$ azokat, amik metszik Σ-át. Mindegyik I_i hossza λ/s, ezért ha $x \in I_i$ és $y \in I_i \cap \Sigma$, akkor

$$|f(x) - f(y)| \leq K\frac{\lambda^2}{s^2},$$

tehát $f(I_i)$ benne van egy $K\frac{\lambda^2}{s^2}$ hosszú intervallumban. Ebből az következik, hogy $f(I \cap \Sigma)$ mértéke legfeljebb
$$sK\frac{\lambda^2}{s^2} = K\lambda^2/s,$$
ami 0-hoz tart, ha $s \to \infty$. Tehát az $f(I \cap \Sigma)$ halmaz 0-mértékű. De a Σ-át fedi legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sok ilyen I, ezért $f(\Sigma)$ is 0-mértékű.

Ha X és Y tetszőleges 1-dimenziós sokaságok, akkor legyenek $U_1, U_2, \ldots \subset Y$ térképeknek olyan értelmezési tartományai, hogy $\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i = Y$. Minden $f^{-1}(U_i)$ egy nyílt részhalmaza X-nek és $f^{-1}(U_i) = \bigcup_{j=1}^{\infty} V_j$, ahol a V_j nyílt halmazok valamilyen X-beli térképek értelmezési tartományai. Ekkor az előzőek alapján mindegyik $f|_{V_j} \colon V_j \to U_i$-re igaz, hogy az $f(V_j \cap \Sigma)$ halmaz 0-mértékű. De ekkor $f(\bigcup_{j=1}^{\infty} V_j \cap \Sigma)$ is 0-mértékű, emiatt az f kritikus értékeinek halmaza 0-mértékű.

Ha $n \geq m \geq 2$, akkor tegyük fel, hogy n-nél kisebb dimenziós X sokaságra igaz az állítás és az $n = m = 1$ esethez hasonlóan először tegyük fel, hogy $X = \mathbb{R}^n$ és $Y = \mathbb{R}^m$. Egy $p \in X$ szinguláris pontra a következők valamelyike teljesül.

(1) Az $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p)$ parciális derivált nem egyenlő 0-val valamilyen $1 \leq i \leq m$-re és $1 \leq j \leq n$-re.
(2) Valamilyen $s \geq 1$-re minden $1 \leq i \leq m$-re és $1 \leq r \leq s$-re az $\frac{\partial^r f_i}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_r}}(p)$ r-edrendű parciális deriváltak 0-val egyenlőek minden $1 \leq j_1, \ldots, j_r \leq n$ esetén, de $\frac{\partial^{s+1} f_i}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_{s+1}}}(p) \neq 0$ valamilyen $1 \leq i \leq m$-re és $1 \leq j_1, \ldots, j_{s+1} \leq n$-re.
(3) Minden $s \geq 1$-re minden s-edrendű parciális derivált 0-val egyenlő p-ben.

Az olyan szinguláris pontok halmazát, amikre az (1)-es teljesül Σ_1-el, amikre a (2)-es teljesül Σ_2-vel és amikre a (3)-as teljesül Σ_3-al jelöljük. Nyilván az f szinguláris pontjainak halmaza egyenlő
$$\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3 \text{ -al.}$$
Az (1)-es esetben persze $m \geq 2$, mert különben p nem szinguláris. Ekkor legyenek i, j olyanok, hogy $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p) \neq 0$. Az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy $j = m$. Ekkor valamilyen ψ és φ diffeomorfizmusokra a $\psi \circ f \circ \varphi$ leképezés a $\varphi^{-1}(p)$ pont egy
$$U \times (a, b) \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$$
környezetében
$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (g(x_1, \ldots, x_{n-1}), x_n)$$
alakban írható, ahol g egy $\mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^{m-1}$ típusú differenciálható leképezés. Egy $\varphi(x) \in \varphi(U \times (a, b))$-ben az f' rangja pontosan akkor maximális, ha $(\psi \circ f \circ \varphi)'$ rangja maximális $x \in U \times (a, b)$-ben, ami pedig azzal ekvivalens, hogy g' rangja maximális $\pi(x) \in U$-ban, ahol
$$\pi \colon (x_1, \ldots, x_n) \to (x_1, \ldots, x_{n-1})$$
a projekció az első $n-1$ koordinátára. Ebből az következik, hogy $\psi \circ f \circ \varphi$ szinguláris pontjai $U \times (a, b)$-ben megegyeznek $\pi^{-1}(S)$-el, ahol az S halmaz a g szinguláris

pontjai U-ban. Tehát $\psi \circ f \circ \varphi$ szinguláris pontjainak halmaza $U \times (a, b)$-ben

$$S \times (a, b).$$

A $g|_U$ egy $\mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^{m-1}$ típusú leképezés ahol nyilván $n - 1 < n$, ezért teljes indukcióval azt kapjuk, hogy $g(S)$ egy 0-mértékű halmaz és így

$$\psi \circ f \circ \varphi(S \times (a, b)) = g(S) \times (a, b)$$

is 0-mértékű. Mindezt figyelembe véve azt kapjuk, hogy Σ_1 minden p pontjának van olyan $V_p = \varphi(U \times (a, b))$ környezete, hogy f szinguláris pontjainak halmaza V_p-ben megegyezik $\varphi(S \times (a, b))$-vel, ahol $\psi \circ f \circ \varphi(S \times (a, b))$ egy 0-mértékű halmaz. De akkor $f \circ \varphi(S \times (a, b))$ is 0-mértékű halmaz, ezért Σ_1 minden p pontjának van olyan V_p környezete, hogy $f|_{V_p}$ kritikus értékeinek halmaza 0-mértékű. Mivel $\Sigma_1 \subset X$, ezért Σ_1 is Lindelöf tér, így

$$\Sigma_1 \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} V_{p_i}$$

valamilyen megszámlálhatóan sok $p_i \in \Sigma_1$-re. Ekkor $f|_{\bigcup_{i=1}^{\infty} V_{p_i}}$ kritikus értékeinek halmaza 0-mértékű, ezért $f(\Sigma_1)$ is 0-mértékű.

A (2)-es esetben tegyük fel, hogy $p \in X$ olyan, hogy $p \in \Sigma_2$, tehát

$$\frac{\partial^{s+1} f_i}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_{s+1}}}(p) \neq 0$$

valamilyen p-től függő $s \geq 1$-re, $1 \leq i \leq m$-re és $1 \leq j_1, \ldots, j_{s+1} \leq n$-re, de mindegyik $\frac{\partial^r f_k}{\partial x_{l_1} \cdots \partial x_{l_r}}(p) = 0$ ha $1 \leq r \leq s$. Osszuk fel Σ_2-őt aszerint, hogy egy $p \in \Sigma_2$-höz melyik $s \geq 1$-et, $1 \leq i \leq m$-et és $1 \leq j_1, \ldots, j_{s+1} \leq n$-eket választjuk, ezeket a részhalmazokat jelölje $\Sigma_2^{i,s,j_1,\ldots,j_s}$. Ekkor nyilván

$$\Sigma_2 = \bigcup_{i,s,j_1,\ldots,j_s} \Sigma_2^{i,s,j_1,\ldots,j_s}$$

a szóba jöhető $i, s, j_1, \ldots, j_s$-ekre, ami legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sok halmaz uniója.

Jelölje $g_{i,s,j_1,\ldots,j_s}$ a

$$\frac{\partial^s f_i}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_s}}$$

függvényt. Ekkor minden $p \in \Sigma_2^{i,s,j_1,\ldots,j_s}$-nek valamilyen $U_p \subset \mathbb{R}^n$ környezetére a $g_{i,s,j_1,\ldots,j_s}|_{U_p}$ függvénynek a 0 reguláris értéke és p benne van $(g_{i,s,j_1,\ldots,j_s}|_{U_p})^{-1}(0)$-ban, ami egy U_p-beli $(n-1)$-dimenziós részsokaság. A

$$\Sigma_2^{i,s,j_1,\ldots,j_s} \cap (g_{i,s,j_1,\ldots,j_s}|_{U_p})^{-1}(0)$$

pontjai az

$$f|_{(g_{i,s,j_1,\ldots,j_s}|_{U_p})^{-1}(0)}$$

megszorításnak is szinguláris pontjai, ezért a teljes indukció alapján, vagy mert $n-1<m$, az $f(\Sigma_2^{i,s,j_1,\ldots,j_s} \cap (g_{i,s,j_1,\ldots,j_s}|_{U_p})^{-1}(0))$ halmaz 0-mértékű. Persze

$$(g_{i,s,j_1,\ldots,j_s}|_{U_p})^{-1}(0) = U_p \cap (g_{i,s,j_1,\ldots,j_s})^{-1}(0)$$

és

$$\Sigma_2^{i,s,j_1,\ldots,j_s} \subset (g_{i,s,j_1,\ldots,j_s})^{-1}(0)$$

úgyhogy azt kaptuk, hogy az

$$f(\Sigma_2^{i,s,j_1,\ldots,j_s} \cap U_p)$$

halmaz 0-mértékű. Az is igaz, hogy rögzített $i, s, j_1, \ldots, j_s$-re a $\Sigma_2^{i,s,j_1,\ldots,j_s}$ halmazt fedi legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sok $U_{p_1}, U_{p_2}, \ldots$ környezet, ahol $p_k \in \Sigma_2^{i,s,j_1,\ldots,j_s}$, mert $X = \mathbb{R}^n$. Az előzőek alapján mindegyik

$$f(\Sigma_2^{i,s,j_1,\ldots,j_s} \cap U_{p_k})$$

halmaz 0-mértékű. Ebből következik, hogy az

$$f(\Sigma_2^{i,s,j_1,\ldots,j_s} \cap \bigcup_{k\in\mathbb{N}} U_{p_k}) = f(\Sigma_2^{i,s,j_1,\ldots,j_s})$$

halmaz is 0-mértékű, emiatt az

$$f(\bigcup_{i,s,j_1,\ldots,j_s} \Sigma_2^{i,s,j_1,\ldots,j_s}) = f(\Sigma_2)$$

halmaz is 0-mértékű.

A (3)-as esetben tekintsük először az f leképezés n-edrendű Taylor polinomját és az ahhoz tartozó maradéktagot. Ekkor minden $x_0 \in \Sigma_3$-nak létezik olyan U környezete, hogy ha $x \in U$, akkor

$$|f(x) - f(x_0)| \leq K|x - x_0|^{n+1}$$

valamilyen $K > 0$-ra, mert a Taylor polinom megegyezik a konstans $f(x_0)$-al. Feltehetjük, hogy az U halmaz egy n-dimenziós kocka és az is igaz, hogy minden $x \in U$-ra és $y \in U \cap \Sigma_3$-ra

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|^{n+1}.$$

Jelölje λ az U élének hosszát. Az U felosztható s^n darab λ/s élhosszúságú kockává, jelölje $U_1, \ldots, U_k$ azokat a kockákat, amik metszik Σ_3-at. Mindegyik U_i átmérője $\frac{\lambda}{s}\sqrt{n}$, ezért ha $x \in U_i$ és $y \in U_i \cap \Sigma_3$, akkor

$$|f(x) - f(y)| \leq K\frac{\lambda^{n+1}}{s^{n+1}}\sqrt{n}^{n+1},$$

tehát $f(U_i)$ benne van egy

$$2K\frac{\lambda^{n+1}}{s^{n+1}}\sqrt{n}^{n+1}$$

élhosszúságú m-dimenziós kockában. Ebből az következik, hogy $f(U \cap \Sigma_3)$ mértéke legfeljebb

$$s^n(2K\frac{\lambda^{n+1}}{s^{n+1}}\sqrt{n}^{n+1})^m = \frac{1}{s^{n(m-1)+m}}(2K\lambda^{n+1}\sqrt{n}^{n+1})^m,$$

ami 0-hoz tart, ha $s \to \infty$. Tehát az $f(U \cap \Sigma_3)$ halmaz 0-mértékű. De a Σ_3-at fedi legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sok ilyen U, ezért $f(\Sigma_3)$ is 0-mértékű.

Végül azt kapjuk, hogy ha $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ egy differenciálható leképezés, akkor az f kritikus értékeinek halmaza 0-mértékű. Ha pedig X és Y tetszőleges sokaságok, akkor az $n = m = 1$ esethez hasonlóan kapjuk, hogy az f kritikus értékeinek halmaza 0-mértékű. □

Ebből látszik, hogy a sima sokaságok és topológiai vizsgálatuk miért olyan fontosak. Ha $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tetszőleges differenciálható függvény, akkor az

$$f(x) = 0$$

egyenlet megoldásainak halmaza egy $(n-1)$-dimenziós sima sokaság, feltéve, hogy a 0 reguláris értéke az f-nek. Ha nem az, akkor meg mivel a reguláris értékek halmaza sűrű, van olyan tetszőlegesen kicsi $\varepsilon > 0$, hogy az

$$f(x) = \varepsilon$$

egyenlet megoldásainak halmaza egy $(n-1)$-dimenziós sima sokaság. Ha nem tudjuk megoldani az $f(x) = 0$ egyenletet, tehát ha konkrétan nem ismerjük a megoldások halmazát, akkor még mindig vizsgálhatjuk az $f^{-1}(0)$ (vagy a "megperturbált" egyenlettel meghatározott $f^{-1}(\varepsilon)$) sokaság topológiáját.

3. Sokaság érintőtere

Ha $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ egy differenciálható leképezés, akkor az $f'\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ derivált minden $t \in \mathbb{R}$-ben azt adja meg, hogy mi az f-el paraméterezett görbe $f(t)$-beli érintő vektora. Az $f(\mathbb{R})$ görbe különböző paraméterezéseivel így az $f(\mathbb{R})$ érintővektorait kapjuk. Ezt tetszőleges sima sokaság $f\colon X^n \to \mathbb{R}^m$ beágyazásaira szeretnénk általánosítani. Például az $S^{m-1} \subset \mathbb{R}^m$ valamilyen sugarú és 0 középpontú gömb érintőtere olyan vektorokból kell álljon, amik merőlegesek a gömb pontjait meghatározó vektorokra, ezért az

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m : x \in S^{m-1}, y \in \mathbb{R}^m, x \perp y\}\text{-al}$$

definiált $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$-beli halmaz az S^{m-1} érintőtere, ami egyébként egy $(2m-2)$-dimenziós részsokaság is. De ha X nem a gömb, akkor ez a definíció nem általánosítható egyszerűen.

Legyen $X \subset \mathbb{R}^m$ egy részsokaság. Ha $a \in X$, $\varepsilon > 0$ és $u\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^m$ egy olyan differenciálható leképezése a $(-\varepsilon, \varepsilon)$ intervallumnak $\mathbb{R}^m$-be, hogy $u((-\varepsilon,\varepsilon)) \subset X$ és $u(0) = a$, akkor az $u'(0)$ vektort nevezzük az X sokaság egy a-beli érintő vektorának. Így X-nek a-ban annyi különböző érintő vektora van, ahány különböző deriváltja lehet az a-n keresztülmenő X-beli görbéknek. A követező definíció ezt arra az esetre általánosítja, amikor X nem egy beágyazott részsokasága $\mathbb{R}^m$-nek.

Definíció 3.1 (Érintő vektor és érintőtér). Legyen $(X, \mathcal{D})$ egy sima sokaság és $a \in X$ egy rögzített pont. Tekintsük az olyan $u\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to X$ differenciálható leképezéseket, ahol $\varepsilon > 0$ és $u(0) = a$. Két ilyen X-beli görbe legyen ekvivalens, ha valamilyen a körüli térképben az a-beli deriváltjaik egyenlőek. Tehát ha

$$u\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to X$$

és

$$v\colon (-\tilde{\varepsilon}, \tilde{\varepsilon}) \to X$$

differenciálhatóak és $u(0) = v(0) = a$, akkor legyen

$$u \sim v,$$

ha valamilyen a körüli $\bar{x} \in \mathcal{D}$ térképre

$$(\bar{x} \circ u)'(0) = (\bar{x} \circ v)'(0)$$

(és ilyenkor nyilván minden a körüli térképre ugyanez teljesül). Ez egy ekvivalencia reláció az ilyen típusú görbék halmazán. Egy u görbe ekvivalencia osztályát $[u]$-val vagy $\mathbf{u}$-val jelöljük, egy v görbe ekvivalencia osztályát $[v]$-vel vagy $\mathbf{v}$-vel, stb. Az ekvivalencia osztályokat a-beli *érintő vektoroknak*, az érintő vektorok halmazát pedig a-beli *érintőtérnek* nevezzük.

Az X sima sokaság a-beli érintőterét T_aX-el jelöljük. Ha a körül $\bar{x}$ egy adott térkép, akkor a

$$T_aX \longleftrightarrow \mathbb{R}^n,$$

$$\mathbf{u} \longleftrightarrow (\bar{x} \circ u)'(0) \tag{3.1}$$

megfeleltetéssel a T_aX nem más, mint az $\bar{x}(a)$-n átmenő differenciálható görbék derivált vektorai $\bar{x}(a)$-nál, tehát egyszerűen csak $\bar{x}(a)$-ból kiinduló vektorok $\mathbb{R}^n$-ben ha X n-dimenziós.

Állítás 3.2. *Legyen X egy n-dimenziós sokaság. Minden $a \in X$-re a T_aX érintőtér egy n-dimenziós vektortér.*

Az érintő vektorok ilyen térképektől független definíciója lehetőséget ad egy differenciálható leképezés térképektől független deriváltjának értelmezésére.

Definíció 3.3 (Leképezés deriváltja). Legyen X és Y két sima sokaság és $f\colon X \to Y$ egy differenciálható leképezés. Ha $a \in X$ és $f(a) = b$, akkor azt a

$$\partial f_a\colon T_aX \to T_bY$$

homomorfizmust, ami egy $\mathbf{u} \in T_aX$ érintő vektorhoz az $[f \circ u] \in T_bY$ érintővektort rendeli, az f leképezés a-beli *deriváltjának* nevezzük.

Definíció 3.4 (Sokaság érintőtere). Egy X sima sokaság *érintőtere* az

$$\bigcup_{a \in X} T_aX$$

halmaz, amit TX-el jelölünk. Ekkor egy $f\colon X \to Y$ differenciálható leképezés *deriváltja* a $\partial f\colon TX \to TY$ leképezés, ami minden $a \in X$-re a $\partial f_a\colon T_aX \to T_{f(a)}Y$ homomorfizmussal van definiálva.

Az $\mathbb{R}^n$ sokaság minden $a \in \mathbb{R}^n$-beli $T_a\mathbb{R}^n$ érintőterét azonosítani szoktuk magával az $\mathbb{R}^n$ sokasággal. Ez azt jelenti, hogy ilyenkor az $\bar{x}\colon U \to \mathbb{R}^n$, $a \in U \subset \mathbb{R}^n$ térképet az

$$\bar{x}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

identitás leképezésnek választjuk, és ekkor egy $[u] \in T_a\mathbb{R}^n$ érintővektor nem más, mint $(\bar{x} \circ u)'(0) = u'(0)$, ami egy a-ból kiinduló vektor $\mathbb{R}^n$-ben. Tehát $T_a\mathbb{R}^n$ megegyezik az a-ból kiinduló vektorokkal.

Ha X egy sima sokaság és $\bar{y}\colon U \to \mathbb{R}^n$ egy $a \in X$ körüli térkép, akkor $\bar{y}$ nyilván differenciálható. A

$$\partial\bar{y}\colon T_aU \to T_{\bar{y}(a)}\mathbb{R}^n$$

derivált egy

$$\partial\bar{y}\colon T_aX \to T_{\bar{y}(a)}\mathbb{R}^n$$

leképezésként is felfogható, hiszen $a \in U \subset X$. Ekkor $\partial\bar{y}$ az $\mathbf{u} \in T_aX$ érintővektort definíció szerint az $[\bar{y}\circ u]$ érintővektorba képezi, ami az előző $T_{\bar{y}(a)}\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$ azonosítással nem más, mint az $\bar{y}(a)$-ból kiinduló $(\bar{y} \circ u)'(0)$ vektor. Emiatt a (3.1)-beli

$$\mathbf{u} \longleftrightarrow (\bar{y} \circ u)'(0)$$

megfeleltetés megegyezik a

$$\partial\bar{y}\colon T_aX \to \mathbb{R}^n$$

lineáris izomorfizmussal.

Lemma 3.5. *Az $\bar{y}\colon U \to \mathbb{R}^n$ leképezés egy diffeomorfizmus és $\partial\bar{y}\colon T_aX \to \mathbb{R}^n$ egy vektortér izomorfizmus.*

Állítás 3.6. *Legyen X egy n-dimenziós sokaság, Y egy m-dimenziós sokaság, Z egy k-dimenziós sokaság. Legyenek $f\colon X \to Y$ és $g\colon Y \to Z$ sima leképezések. Ekkor a deriváltakra*

$$\partial(g \circ f)_a = \partial g_{f(a)} \circ \partial f_a$$

minden $a \in X$-re.

Bizonyítás. Térképeken keresztül. □

Állítás 3.7. *Legyen X^n és Y^m két sima sokaság és $f\colon X \to Y$ egy differenciálható leképezés. Legyen $a \in X$, $b \in Y$ és tegyük fel, hogy $\bar{x}$ egy térkép a körül és $\bar{y}$ egy térkép $b = f(a)$ körül. Ekkor a*

$$\partial f_a\colon T_aX \to T_bY,$$

$$\partial f_a\colon [u] \mapsto [f \circ u]$$

homomorfizmus a $\partial\bar{x}$ és $\partial\bar{y}$ izomorfizmusokon keresztül megfelel az

$$\partial\bar{y} \circ \partial f_a \circ (\partial\bar{x})^{-1}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,$$

$$(\bar{x} \circ u)'(0) \mapsto (\bar{y} \circ f \circ u)'(0)$$

homomorfizmusnak, ahol

$$(\bar{y} \circ f \circ u)'(0) = (\bar{y} \circ f \circ \bar{x}^{-1})'(\bar{x}(a)) \cdot (\bar{x} \circ u)'(0),$$

ami nem más, mint az

$$\bar{y} \circ f \circ \bar{x}^{-1}$$

Jacobi mátrixa az $\bar{x}(a)$ helyen szorozva az $(\bar{x} \circ u)'(0)$ vektorral.

Bizonyítás. $(\bar{y} \circ f \circ u)'(0) = (\bar{y} \circ f \circ \bar{x}^{-1} \circ \bar{x} \circ u)'(0) = (\bar{y} \circ f \circ \bar{x}^{-1})'(\bar{x} \circ u(0)) \cdot (\bar{x} \circ u)'(0) = (\bar{y} \circ f \circ \bar{x}^{-1})'(\bar{x}(a)) \cdot (\bar{x} \circ u)'(0)$. □

Például ha $f\colon X^n \to X^n$ az identitás leképezés és $a \in X$, akkor két a körüli $\bar{x}\colon U \to \mathbb{R}^n$ és $\bar{y}\colon V \to \mathbb{R}^n$ térképen keresztül az f deriváltja az

$$(\bar{y} \circ \bar{x}^{-1})'(\bar{x}(a)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}\bar{y}_1 \circ \bar{x}^{-1} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n}\bar{y}_1 \circ \bar{x}^{-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1}\bar{y}_n \circ \bar{x}^{-1} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n}\bar{y}_n \circ \bar{x}^{-1} \end{bmatrix}_{\bar{x}(a)}$$

Jacobi mátrixszal egyenlő, ami az $[u]$-nak megfelelő $(\bar{x} \circ u)'(0)$ vektort az $[u]$-nak megfelelő

$$(\bar{y} \circ u)'(0) = (\bar{y} \circ \bar{x}^{-1})'(\bar{x}(a)) \cdot (\bar{x} \circ u)'(0)$$

vektorba képezi. Például legyen $\bar{x}\colon U \to \mathbb{R}^n$ egy térkép és $\mathbf{e}_i \in T_aX$ legyen az az érintő vektor, amire ha $\mathbf{e}_i = [e_i]$, akkor $(\bar{x} \circ e_i)'(0)$ az i-edik egységvektor. Hasonlóan legyen $\bar{y}\colon V \to \mathbb{R}^n$ egy másik térkép és $\mathbf{f}_j \in T_aX$ az az érintő vektor, amire ha $\mathbf{f}_j = [f_j]$, akkor $(\bar{x} \circ f_j)'(0)$ a j-edik egységvektor. Ekkor minden $a \in U \cap V$-re az $(\bar{y} \circ \bar{x}^{-1})'(\bar{x}(a))$ mátrix szorozva az i-dik egységvektorral megegyezik az $\mathbf{e}_i$ érintő vektornak az $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n$ bázisban felírt koordináta vektorával. Tehát

$$\mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\bar{y}_j \circ \bar{x}^{-1} \right) \circ \bar{x}(a)\mathbf{f}_j.$$

Állítás 3.8. *Legyen $i\colon X \to \mathbb{R}^m$ az X sima sokaság egy beágyazása. Ekkor minden $a \in X$-re a*

$$\partial i_a\colon T_aX \to T_{i(a)}\mathbb{R}^m$$

homomorfizmus injektív és minden $\mathbf{u} \in T_aX$-re $\partial i_a(\mathbf{u})$ az $i \circ u$ görbe $i(a)$-ból induló derivált vektora.

Bizonyítás. $\partial i_a([u]) = [i \circ u] = (\bar{x} \circ i \circ u)'(0)$, ahol $\bar{x}$ az a térkép $i(a)$ körül, amire $\bar{x}(v) = v$ minden $v \in \mathbb{R}^m$-re. □

Mivel az $\bar{x}$ térképek $\mathbb{R}^n$-be képeznek és így az $\bar{x}_i$ koordináta függvények meg $\mathbb{R}$-be képeznek, sokszor hasznosak lesznek az

$$f\colon X \to \mathbb{R}$$

alakú függvények, ahol a $T\mathbb{R}$ érintőteret a lehető legegyszerűbb módon kezeljük, tehát azonosítjuk $\mathbb{R}$-el.

Legyen X egy sima sokaság, $a \in X$, és $f\colon X \to \mathbb{R}$ egy differenciálható függvény. Ha $\mathbf{u} \in T_aX$ és $\mathbf{u} = [u] = [\tilde{u}]$, akkor $(f \circ u)'(0) = (f \circ \tilde{u})'(0)$.

Definíció 3.9 (Iránymenti derivált). Legyen X egy sima sokaság, $a \in X$, és $f\colon X \to \mathbb{R}$ egy differenciálható függvény. Ha $\mathbf{u} \in T_aX$, akkor az f *iránymenti deriváltja* az a pontban az $\mathbf{u}$ irányban

$$(f \circ u)'(0),$$

amit $\partial_{\mathbf{u}} f_a$-al jelölünk (ha nem okoz félreértést mert nyilvánvaló, hogy $\mathbf{u}$ egy a-beli érintő vektor, akkor csak $\partial_{\mathbf{u}} f$-el).

Ha $i\colon X \to \mathbb{R}^m$ egy beágyazás, akkor a 3.8-os állítás alapján egy $\mathbf{u} \in T_aX$ megfelel $\mathbb{R}^m$-ben az $i \circ u$ görbe $i(a)$-ból induló derivált vektorának. Az

$$f\colon X \to \mathbb{R}$$

differenciálható függvények megfelelnek az $i(X)$-en értelmezett $f \circ i^{-1}$ differenciálható függvényeknek. Ha $f \circ i^{-1}$-et tetszőlegesen kiterjesztjük $i(a)$ egy $\mathbb{R}^m$-beli U környezetére és $p\colon U \to U \cap i(X)$ egy olyan differenciálható leképezés, hogy $p|_{U \cap i(X)} = \mathrm{id}_{U \cap i(X)}$, akkor

$$\partial_{\mathbf{u}} f_a = (f \circ u)'(0) = (f \circ i^{-1} \circ p \circ i \circ u)'(0) = (f \circ i^{-1} \circ p)'(i(a)) \cdot (i \circ u)'(0).$$

A következőkben az iránymenti derivált olyan tulajdonságait nézzük meg, amiket általában a számolások során használunk.

Állítás 3.10. *Ha* $f\colon X \to \mathbb{R}$ *egy differenciálható függvény,* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_aX$ *és* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *akkor*

$$\partial_{\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v}} f = \alpha \partial_{\mathbf{u}} f + \beta \partial_{\mathbf{v}} f.$$

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{u} = [u]$, $\mathbf{v} = [v]$ és $\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} = [w]$. Azt kell belátni, hogy

$$(f \circ w)'(0) = \alpha(f \circ u)'(0) + \beta(f \circ v)'(0).$$

Ha $\bar{x}$ egy a körüli térkép, akkor

$$(f \circ w)'(0) = (f \circ \bar{x}^{-1} \circ \bar{x} \circ w)'(0) = (f \circ \bar{x}^{-1})'(\bar{x}(a))(\bar{x} \circ w)'(0) =$$
$$(f \circ \bar{x}^{-1})'(\bar{x}(a))(\alpha(\bar{x} \circ u)'(0) + \beta(\bar{x} \circ v)'(0))$$

a T_aX-en lévő vektortér struktúra definíciója miatt. De ez utóbbi könnyen láthatóan egyenlő $\alpha(f \circ u)'(0) + \beta(f \circ v)'(0)$-val. □

Állítás 3.11. *Ha* $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ *differenciálható függvények,* $\mathbf{u} \in T_aX$ *és* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *akkor*

$$\partial_{\mathbf{u}}(\alpha f + \beta g) = \alpha \partial_{\mathbf{u}} f + \beta \partial_{\mathbf{u}} g$$

és

$$\partial_{\mathbf{u}}(fg) = g(a)\partial_{\mathbf{u}} f + f(a)\partial_{\mathbf{u}} g.$$

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{u} = [u]$ és $\bar{x}$ egy a körüli térkép. Ekkor

$$\partial_{\mathbf{u}}(\alpha f + \beta g) = ((\alpha f + \beta g) \circ \bar{x}^{-1})'(\bar{x}(a))(\bar{x} \circ u)'(0) =$$
$$((\alpha f \circ \bar{x}^{-1}) + (\beta g \circ \bar{x}^{-1}))'(\bar{x}(a))(\bar{x} \circ u)'(0) =$$
$$(\alpha f \circ \bar{x}^{-1})'(\bar{x}(a))(\bar{x} \circ u)'(0) + (\beta g \circ \bar{x}^{-1})'(\bar{x}(a))(\bar{x} \circ u)'(0) = \alpha \partial_{\mathbf{u}} f + \beta \partial_{\mathbf{u}} g.$$

Hasonlóan

$$\partial_{\mathbf{u}}(fg) = ((fg) \circ \bar{x}^{-1})'(\bar{x}(a))(\bar{x} \circ u)'(0) = ((f \circ \bar{x}^{-1})(g \circ \bar{x}^{-1}))'(\bar{x}(a))(\bar{x} \circ u)'(0) =$$
$$((f \circ \bar{x}^{-1})' g(a) + f(a)(g \circ \bar{x}^{-1})')(\bar{x}(a))(\bar{x} \circ u)'(0) = g(a)\partial_{\mathbf{u}} f + f(a)\partial_{\mathbf{u}} g.$$

□

Egy másik fajta jelölés az érintő vektorokra és iránymenti deriváltra az, hogy ha $f\colon X \to \mathbb{R}$ egy differenciálható függvény és $\mathbf{u} \in T_aX$, akkor

$$\mathbf{u}f = \partial_{\mathbf{u}} f.$$

Legyen $\mathcal{C}^\infty(a)$ az a környezetein értelmezett differenciálható függvények halmaza. Ekkor az előbbiek szerint egy $\mathbf{u} \in T_aX$ érintővektor egy olyan leképezés $\mathcal{C}^\infty(a)$-ból $\mathbb{R}$-be, hogy ha $f, g\colon U \to \mathbb{R}$ differenciálható függvények, ahol U az a egy környezete, akkor

$$\mathbf{u}f = \mathbf{u}(f|_{\tilde{U}})$$

minden $\tilde{U} \subset U$ környezetére a-nak,

$$\mathbf{u}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathbf{u} f + \beta \mathbf{u} g$$

minden $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$-re és

$$\mathbf{u}(fg) = g(a)\mathbf{u}f + f(a)\mathbf{u}g.$$

Ha még $\mathbf{v} \in T_aX$ is, akkor hasonlóan

$$(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}) f = \alpha \mathbf{u} f + \beta \mathbf{v} f$$

minden $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$-re.

Láttuk, hogy ha X^n egy sima sokaság, $a \in X$, $\bar{x}\colon U \to \mathbb{R}^n$ egy a körüli térkép, $u\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to X$ egy X-beli görbe és $u(0) = a$, akkor a $(\bar{x} \circ u)'(0)$ vektornak az $[u] \in T_aX$ érintő vektor felel meg. Legyen $\mathbf{e}_i \in T_aX$ az az érintő vektor, amire ha $\mathbf{e}_i = [e_i]$, akkor $(\bar{x} \circ e_i)'(0)$ az i-edik egységvektor. Ekkor az

$$\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n \in T_aX,$$

amik persze függnek az $\bar{x}$ térképtől, egy bázisa az a-beli érintőtérnek. Ha $f\colon X \to \mathbb{R}$ differenciálható, akkor $f \circ \bar{x}^{-1}$ is az és

$$\partial_{\mathbf{e}_i} f = (f \circ \bar{x}^{-1} \circ \bar{x} \circ e_i)'(0) = (f \circ \bar{x}^{-1})'(\bar{x}(a)) \cdot (\bar{x} \circ e_i)'(0) = \frac{\partial}{\partial x_i} f \circ \bar{x}^{-1}(\bar{x}(a)).$$

Legyenek az $\bar{x}$ leképezésnek $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n \colon U \to \mathbb{R}$ a koordináta függvényei. Ha $\mathbf{v} \in T_aX$ és

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{e}_i$$

a T_aX érintőtérben, akkor persze

$$(\bar{x} \circ v)'(0) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

és

$$\partial_{\mathbf{v}}(\bar{x}_j) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \partial_{\mathbf{e}_i}(\bar{x}_j) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{x}_j \circ \bar{x}^{-1}(\bar{x}(a)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial}{\partial x_i} x_j(\bar{x}(a)) = \lambda_j.$$

Tehát

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \partial_{\mathbf{v}}(\bar{x}_i) \mathbf{e}_i.$$

Ebből az is következik, hogy $\partial_{\mathbf{e}_i}(\bar{x}_j) = \delta_{i,j}$, ahol $\delta_{i,j}$ a Kronecker delta.

4. Vektormezők és tenzormezők

4.1. Vektormezők.

Legyen $(X^n, \mathcal{D})$ egy sima sokaság, $a \in X$ és

$$\bar{x} \colon U \to \mathbb{R}^n$$

egy a körüli rögzített térkép. Minden $1 \leq i \leq n$-re legyen $\mathbf{e}^{\bar{x}}_{a,i} \in T_aX$ az az a-beli érintő vektor, amire ha $\mathbf{e}^{\bar{x}}_{a,i} = [e]$ valamilyen $e \colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to X$, $e(0) = a$ görbével, akkor $(\bar{x} \circ e)'(0)$ az i-edik egységvektor. Ekkor minden $a \in U$-ra az

$$\mathbf{e}^{\bar{x}}_{a,1}, \dots, \mathbf{e}^{\bar{x}}_{a,n} \in T_aX$$

egy bázisa az a-beli érintőtérnek, ami persze függ a rögzített $\bar{x}$ térképtől is.

Definíció 4.1 (Vektormező). Ha $(X^n, \mathcal{D})$ egy sima sokaság és $\mathbf{v} \colon X \to TX$ egy olyan leképezés, hogy

(1) minden $a \in X$-re $\mathbf{v}_a \in T_aX$ és
(2) minden $\bar{x} \in \mathcal{D}$ térképre a

$$\mathbf{v}_a = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{a,i} \mathbf{e}^{\bar{x}}_{a,i} \qquad (a \in D_{\bar{x}})$$

által meghatározott

$$\lambda_i \colon D_{\bar{x}} \to \mathbb{R},$$
$$\lambda_i(a) = \lambda_{a,i}$$

függvények differenciálhatóak,

akkor a $\mathbf{v}\colon X \to TX$ leképezés egy (differenciálható) *vektormező* X-en.

Nyilván a λ_i függvények is függenek az $\bar{x}$ térképtől.

Jelölje $\mathcal{V}(X)$ az X-en értelmezett vektormezők halmazát és $\mathcal{F}(X)$ az X-en értelmezett differenciálható függvények gyűrűjét.

Állítás 4.2. *$\mathcal{V}(X)$ egy vektortér $\mathbb{R}$ felett és modulus $\mathcal{F}(X)$ felett.*

4.2. Tenzormezők.

Legyen minden $a \in U$-ra

$$\mathbf{E}^{\bar{x}}_{a,1}, \dots, \mathbf{E}^{\bar{x}}_{a,n} \in T_aX^*$$

az $\mathbf{e}^{\bar{x}}_{a,1}, \dots, \mathbf{e}^{\bar{x}}_{a,n} \in T_aX$ duális bázisa a T_aX^* duális vektortérben, tehát

$$\mathbf{E}^{\bar{x}}_{a,i}(\mathbf{e}^{\bar{x}}_{a,j}) = \delta_{i,j},$$

ahol $1 \le i, j \le n$. Tehát például ha $\mathbf{V}_a = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{a,i}\mathbf{E}^{\bar{x}}_{a,i}$, akkor

$$\mathbf{V}_a(\mathbf{e}^{\bar{x}}_{a,j}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{a,i}\mathbf{E}^{\bar{x}}_{a,i}(\mathbf{e}^{\bar{x}}_{a,j}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{a,i}\delta_{i,j} = \lambda_{a,j},$$

ezért

$$\mathbf{V}_a = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{V}_a(\mathbf{e}^{\bar{x}}_{a,i})\mathbf{E}^{\bar{x}}_{a,i}.$$

Jelölje TX^* az

$$\bigcup_{a \in X} T_aX^*$$

halmazt.

Definíció 4.3 (1-tenzormező). Ha $(X^n, \mathcal{D})$ egy sima sokaság és $\mathbf{V}\colon X \to TX^*$ egy olyan leképezés, hogy

(1) minden $a \in X$-re $\mathbf{V}_a \in T_aX^*$ és
(2) minden $\bar{x} \in \mathcal{D}$ térképre a

$$\mathbf{V}_a = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{a,i}\mathbf{E}^{\bar{x}}_{a,i} \qquad (a \in D_{\bar{x}})$$

által meghatározott

$$\lambda_i\colon D_{\bar{x}} \to \mathbb{R},$$
$$\lambda_i(a) = \lambda_{a,i}$$

függvények differenciálhatóak,

akkor a $\mathbf{V}\colon X \to TX^*$ leképezés egy (differenciálható) 1-*típusú tenzormező* (vagy 1-*tenzormező*) X-en.

A λ_i függvények persze pontosan akkor differenciálhatóak, ha a $D_{\bar{x}}$-en értelmezett $a \mapsto \mathbf{V}_a(\mathbf{e}^{\bar{x}}_{a,i})$ függvények differenciálhatóak.

Definíció 4.4 (Leképezés differenciálja). Ha $f\colon X \to \mathbb{R}$ egy differenciálható leképezés, akkor azt a df-el jelölt 1-tenzormezőt, amire

$$df_a(\mathbf{v}) = \partial_{\mathbf{v}} f$$

minden $\mathbf{v} \in T_aX$-re, az f függvény *differenciáljának* nevezzük.

A $df\colon X^n \to TX^*$ tényleg egy differenciálható 1-tenzormező a következők miatt. Nyilván minden $\bar{x}\colon U \to \mathbb{R}^n$ térképre és $a \in U$-ra

$$df_a = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{a,i} \mathbf{E}^{\bar{x}}_{a,i}$$

valamilyen $\lambda_{a,i} \in \mathbb{R}$ együtthatókkal. Ekkor

$$df_a(\mathbf{e}^{\bar{x}}_{a,i}) = \lambda_{a,i},$$

$$df_a(\mathbf{e}^{\bar{x}}_{a,i}) = \partial_{\mathbf{e}^{\bar{x}}_{a,i}} f$$

és

$$\partial_{\mathbf{e}^{\bar{x}}_{a,i}} f = \frac{\partial}{\partial x_i} f \circ \bar{x}^{-1}(\bar{x}(a))$$

miatt az

$$a \mapsto \lambda_{a,i}$$

függvény nem más, mint

$$a \mapsto \frac{\partial}{\partial x_i} f \circ \bar{x}^{-1}(\bar{x}(a)),$$

ezért differenciálható.

Megjegyezzük, hogy minden $1 \leq i, j \leq n$-re

$$\mathbf{E}^{\bar{x}}_{a,i}(\mathbf{e}^{\bar{x}}_{a,j}) = \delta_{i,j} = \partial_{\mathbf{e}^{\bar{x}}_{a,j}}(\bar{x}_i),$$

ezért

$$d(\bar{x}_i)_a = \mathbf{E}^{\bar{x}}_{a,i}$$

és így

$$df_a = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} f \circ \bar{x}^{-1}|_{\bar{x}(a)} \cdot d(\bar{x}_i)_a$$

is írható. Például ha $f = \bar{y}_j$, ahol $\bar{y}\colon V \to \mathbb{R}^n$ egy térkép, akkor

$$d(\bar{y}_j) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \bar{y}_j \circ \bar{x}^{-1} \right) \circ \bar{x} \cdot d(\bar{x}_i)$$

az $U \cap V$ halmazon.

Az 1-tenzormezőket általánosítjuk a következőkben.

Legyen $m \in \mathbb{N}$. Ha X egy sima sokaság és $a \in X$, akkor jelölje $\mathcal{L}_a^m$ a

$$T_aX \oplus \cdots \oplus T_aX \to \mathbb{R}$$

típusú, m darab T_aX direkt összegén értelmezett multilineáris leképezések vektorterét. Jelölje $\mathcal{L}^m$ az

$$\bigcup_{a \in X} \mathcal{L}_a^m$$

halmazt. Nyilván $\mathcal{L}^1 = TX^*$.

Definíció 4.5 (Tenzormező). Ha $(X^n, \mathcal{D})$ egy sima sokaság és $\mathbf{V}\colon X \to \mathcal{L}^m$ egy olyan leképezés, hogy

(1) minden $a \in X$-re $\mathbf{V}_a \in \mathcal{L}_a^m$ és
(2) minden $\bar{x} \in \mathcal{D}$ térképre és minden $1 \le i_1, \ldots, i_m \le n$-re a $D_{\bar{x}}$-en értelmezett

$$a \mapsto \mathbf{V}_a(\mathbf{e}_{a,i_1}^{\bar{x}}, \ldots, \mathbf{e}_{a,i_m}^{\bar{x}})$$

függvények differenciálhatóak,

akkor a $\mathbf{V}\colon X \to \mathcal{L}^m$ leképezés egy (differenciálható) *m-típusú tenzormező* (vagy *m-tenzormező*) X-en.

Jelölje $\mathcal{V}^m(X)$ az X-en értelmezett m-tenzormezők halmazát.

Állítás 4.6. *$\mathcal{V}^m(X)$ egy vektortér $\mathbb{R}$ felett és modulus $\mathcal{F}(X)$ felett.*

Ha $\bar{x}\colon D_{\bar{x}} \to \mathbb{R}^n$ egy térkép az X^n sima sokaságon, akkor minden $a \in D_{\bar{x}}$-re és minden $1 \le i_1, \ldots, i_m \le n$-re jelölje

$$\mathbf{E}_{a,i_1,\ldots,i_m}^{\bar{x}}\colon \bigoplus_{j=1}^{m} T_aX \to \mathbb{R}$$

azt a multilineáris leképezést, amire minden $1 \le j_1, \ldots, j_m \le n$-re

$$\mathbf{E}_{a,i_1,\ldots,i_m}^{\bar{x}}(\mathbf{e}_{a,j_1}^{\bar{x}}, \ldots, \mathbf{e}_{a,j_m}^{\bar{x}}) = \delta_{i_1,j_1} \cdots \delta_{i_m,j_m}.$$

Ekkor az $\mathbf{E}_{a,i_1,\ldots,i_m}^{\bar{x}}$ leképezések egy bázisát alkotják $\mathcal{L}_a^m$-nek.

Állítás 4.7. *Ha $(X^n, \mathcal{D})$ egy sima sokaság és $\mathbf{V}\colon X \to \mathcal{L}^m$ egy olyan leképezés, hogy minden $a \in X$-re $\mathbf{V}_a \in \mathcal{L}_a^m$, akkor a következők ekvivalensek.*

(1) *Minden $\bar{x} \in \mathcal{D}$ térképre a*

$$\mathbf{V}_a = \sum_{1 \le i_1, \ldots, i_m \le n} \lambda_{a,i_1,\ldots,i_m} \mathbf{E}_{a,i_1,\ldots,i_m}^{\bar{x}} \qquad (a \in D_{\bar{x}})$$

által meghatározott

$$\lambda_{i_1,\ldots,i_m}\colon D_{\bar{x}} \to \mathbb{R},$$
$$\lambda_{i_1,\ldots,i_m}(a) = \lambda_{a,i_1,\ldots,i_m}$$

függvények differenciálhatóak,

(2) *minden $\bar{x} \in \mathcal{D}$ térképre és minden $1 \le i_1, \dots, i_m \le n$-re a $D_{\bar{x}}$-en értelmezett*

$$a \mapsto \mathbf{V}_a(\mathbf{e}^{\bar{x}}_{a,i_1}, \dots, \mathbf{e}^{\bar{x}}_{a,i_m})$$

függvények differenciálhatóak,

(3) *minden $U \subset X$ nyílt halmazra és minden $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m \colon U \to TX$ vektormezőre az U-n értelmezett*

$$a \mapsto \mathbf{V}_a(\mathbf{v}_1(a), \dots, \mathbf{v}_m(a))$$

függvények differenciálhatóak.

Bizonyítás. Legyen $\bar{x} \in \mathcal{D}$ egy térkép. Ha $\mathbf{V}_a = \sum_{1 \le i_1, \dots, i_m \le n} \lambda_{a,i_1,\dots,i_m} \mathbf{E}^{\bar{x}}_{a,i_1,\dots,i_m}$, akkor

$$\mathbf{V}_a(\mathbf{e}^{\bar{x}}_{a,j_1}, \dots, \mathbf{e}^{\bar{x}}_{a,j_m}) = \sum_{1 \le i_1, \dots, i_m \le n} \lambda_{a,i_1,\dots,i_m} \mathbf{E}^{\bar{x}}_{a,i_1,\dots,i_m}(\mathbf{e}^{\bar{x}}_{a,j_1}, \dots, \mathbf{e}^{\bar{x}}_{a,j_m}) = \lambda_{a,j_1,\dots,j_m},$$

tehát mindegyik $a \mapsto \mathbf{V}_a(\mathbf{e}^{\bar{x}}_{a,i_1}, \dots, \mathbf{e}^{\bar{x}}_{a,i_m})$ differenciálható pontosan akkor, ha mindegyik $a \mapsto \lambda_{a,j_1,\dots,j_m}$ is az. Emiatt az (1) és a (2) ekvivalensek. A (3)-ashoz ha minden $1 \le i \le m$-re $\mathbf{v}_i \colon U \to TX$ vektormezők és

$$\mathbf{v}_i(a) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{a,i,j} \mathbf{e}^{\bar{x}}_{a,j} \qquad (a \in U)$$

valamilyen differenciálható $a \mapsto \lambda_{a,i,j}$-kel, akkor az $a \in U$-hoz a

$$\mathbf{V}_a(\mathbf{v}_1(a), \dots, \mathbf{v}_m(a)) = \mathbf{V}_a\Big(\sum_{j=1}^{n} \lambda_{a,1,j} \mathbf{e}^{\bar{x}}_{a,j}, \dots, \sum_{j=1}^{n} \lambda_{a,m,j} \mathbf{e}^{\bar{x}}_{a,j}\Big) =$$
$$\sum_{j_1=1}^{n} \lambda_{a,1,j_1} \cdots \sum_{j_m=1}^{n} \lambda_{a,m,j_m} \mathbf{V}_a(\mathbf{e}^{\bar{x}}_{a,j_1}, \dots, \mathbf{e}^{\bar{x}}_{a,j_m})$$

értéket rendelő függvény differenciálható ha a (2)-es feltétel igaz. A (3)-asból a (2)-es nyilvánvalóan következik. □

Állítás 4.8. *Egy $\mathbf{V} \colon X \to \mathcal{L}^m$ m-tenzormező meghatároz egy*

$$\bigoplus_{i=1}^{m} \mathcal{V}(X) \to \mathcal{F}(X)$$

típusú, minden $a \in X$-re és $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m \in \mathcal{V}(X)$-re az

$$a \mapsto \mathbf{V}_a(\mathbf{v}_1(a), \dots, \mathbf{v}_m(a))$$

formulával definiált, minden változójában $\mathcal{F}(X)$-lineáris leképezést. Fordítva, ha

$$\mathbf{V} \colon \bigoplus_{i=1}^{m} \mathcal{V}(X) \to \mathcal{F}(X)$$

egy $\mathcal{F}(X)$-multilineáris leképezés, akkor $\mathbf{V}$ egy m-tenzormező.

Bizonyítás. Az állítás első része triviális, ezért csak azt kell belátni, hogy ha

$$\mathbf{V}\colon \bigoplus_{i=1}^{m} \mathcal{V}(X) \to \mathcal{F}(X)$$

egy $\mathcal{F}(X)$-multilineáris leképezés, akkor $\mathbf{V}$ meghatároz egy m-tenzormezőt. De minden $a \in X$-ben a

$$(\mathbf{v}_1(a), \dots, \mathbf{v}_m(a)) \mapsto \mathbf{V}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)(a)$$

leképezés $\mathcal{L}^m$-beli, ahol $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\colon X \to TX$ vektormezők, sőt, az

$$a \mapsto \mathbf{V}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)(a)$$

függvény differenciálható is, hiszen $\mathcal{F}(X)$-beli. □

Az egyik legfontosabb példa tenzormezőkre a 2-tenzormezők, azaz a bilineáris formák sokaságokon.

Definíció 4.9 (Riemann sokaság és Lorentz sokaság). Legyen X^n egy sima sokaság és legyen $\varphi \in \mathcal{L}^2$ egy 2-tenzormező. Ha minden $a \in X$-re φ_a szimmetrikus és pozitív definit, akkor X egy *Riemann sokaság* a φ *Riemann metrikával.* Ha minden $a \in X$-re φ_a szimmetrikus, nemelfajuló és $(1, n-1)$ szignatúrájú, akkor X egy *Lorentz sokaság* a φ *Lorentz metrikával.*

Ha X egy Riemann sokaság a φ Riemann metrikával, akkor értelmezhetjük egy $f\colon X \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény gradiensét.

Definíció 4.10 (Leképezés gradiense). Az f függvény *gradiense* az a

$$\operatorname{grad} f\colon X \to TX$$

vektormező, amire

$$\varphi(\mathbf{v}, \operatorname{grad} f) = df(\mathbf{v})$$

minden $\mathbf{v}\colon X \to TX$ vektormezőre.

Tehát a gradienssel és a Riemann metrikával egy f függvény iránymenti deriváltjait lehet kiszámolni.

Minden $a \in X$ pontban a $\operatorname{grad} f$ vektormezőt már definiálja az, hogy minden $\mathbf{v}_a \in T_aX$ vektorra

$$\varphi_a(\mathbf{v}_a, \operatorname{grad} f_a) = df_a(\mathbf{v}_a)$$

a φ_a bilinearitása és pozitív definitsége miatt. Ha $\bar{x}\colon D_{\bar{x}} \to \mathbb{R}^n$ egy térkép az X-en és $a \mapsto \mathbf{e}^{\bar{x}}_{a,j}$ a bázis vektormezők $D_{\bar{x}}$-en $j = 1, \dots, n$-re, akkor minden $a \in D_{\bar{x}}$-re igaz, hogy

$$\varphi_a(\mathbf{e}^{\bar{x}}_{a,j}, \operatorname{grad} f_a) = df_a(\mathbf{e}^{\bar{x}}_{a,j}) = \frac{\partial}{\partial x_j} f \circ \bar{x}^{-1}(\bar{x}(a)).$$

Ha

$$\operatorname{grad} f_a = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{a,i} \mathbf{e}^{\bar{x}}_{a,i},$$

akkor

$$\varphi_a(\mathbf{e}^{\bar{x}}_{a,j}, \mathrm{grad} f_a) = \varphi_a(\mathbf{e}^{\bar{x}}_{a,j}, \sum_{i=1}^{n} \lambda_{a,i}\mathbf{e}^{\bar{x}}_{a,i}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{a,i}\varphi_a(\mathbf{e}^{\bar{x}}_{a,j}, \mathbf{e}^{\bar{x}}_{a,i}).$$

Ha a következő fejezetet felhasználva (de az alábbiakat a 2-tenzorok bázisának a $\mathbf{E}^{\bar{x}}_{k,l}$-el jelölt 2-tenzorokat választva $\mathbf{E}^{\bar{x}}_k \otimes \mathbf{E}^{\bar{x}}_l$-ek helyett is) $D_{\bar{x}}$-en φ-t a

$$\sum_{1\leq k,l\leq n} \mu_{k,l}\mathbf{E}^{\bar{x}}_k \otimes \mathbf{E}^{\bar{x}}_l$$

alakba írjuk, akkor

$$\varphi_a(\mathbf{e}^{\bar{x}}_{a,j}, \mathbf{e}^{\bar{x}}_{a,i}) = \sum_{1\leq k,l\leq n} \mu_{a,k,l}\mathbf{E}^{\bar{x}}_{a,k}(\mathbf{e}^{\bar{x}}_{a,j}) \otimes \mathbf{E}^{\bar{x}}_{a,l}(\mathbf{e}^{\bar{x}}_{a,i}) = \mu_{a,j,i}.$$

Ezért

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_{a,i}\varphi_a(\mathbf{e}^{\bar{x}}_{a,j}, \mathbf{e}^{\bar{x}}_{a,i}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{a,i}\mu_{a,j,i}$$

és így a

$$\varphi_a(\mathbf{e}^{\bar{x}}_{a,j}, \mathrm{grad} f_a) = df_a(\mathbf{e}^{\bar{x}}_{a,j})$$

egyenlőség a

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_{a,j,i}\lambda_{a,i} = \frac{\partial}{\partial x_j} f \circ \bar{x}^{-1}(\bar{x}(a))$$

alakba írható. A

$$\begin{bmatrix} \mu_{1,1} & \cdots & \mu_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \mu_{n,1} & \cdots & \mu_{n,n} \end{bmatrix}$$

mátrix szimmetrikus pozitív definit, ezért invertálható. Jelölje az inverz mátrixot $[\tilde{\mu}_{i,j}]$. Ekkor

$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{\mu}_{k,j} \sum_{i=1}^{n} \mu_{j,i}\lambda_i = \lambda_k,$$

emiatt

$$\lambda_{a,k} = \sum_{j=1}^{n} \tilde{\mu}_{k,j} \frac{\partial}{\partial x_j} f \circ \bar{x}^{-1}(\bar{x}(a)),$$

amiből következik, hogy az $a \mapsto \lambda_{a,i}$ függvények differenciálhatóak. Tehát a $\mathrm{grad} f$ vektormező tényleg differenciálható.

Állítás 4.11. *Ha $\bar{x}$ olyan térkép, amire $D_{\bar{x}}$-en*

$$\varphi = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}^{\bar{x}}_k \otimes \mathbf{E}^{\bar{x}}_k,$$

akkor $D_{\bar{x}}$-en

$$\mathrm{grad} f_a = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} f \circ \bar{x}^{-1}(\bar{x}(a))\mathbf{e}^{\bar{x}}_{a,i}.$$

□

Bizonyítás. Ha az $\bar{x}\colon D_{\bar{x}} \to \mathbb{R}^n$ térkép választható úgy, hogy

$$\mu_{a,j,i} = \delta_{i,j},$$

azt kapjuk, hogy

$$\lambda_{a,j} = \frac{\partial}{\partial x_j} f \circ \bar{x}^{-1}(\bar{x}(a)).$$

Tehát ezzel az $\bar{x}$ térképpel minden $a \in D_{\bar{x}}$-re

$$\mathrm{grad} f_a = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} f \circ \bar{x}^{-1}(\bar{x}(a)) \mathbf{e}_{a,i}^{\bar{x}}.$$

$\square$

4.3. Tenzormezők szorzata és differenciál formák.

Definíció 4.12 (Tenzormezők szorzata). Legyen $\mathbf{V}_1\colon X \to \mathcal{L}^r$ egy r-tenzormező és $\mathbf{V}_2\colon X \to \mathcal{L}^s$ egy s-tenzormező. A $\mathbf{V}_1$ és $\mathbf{V}_2$ *szorzata* az a

$$\mathbf{V}_1 \otimes \mathbf{V}_2\colon X \to \mathcal{L}^{r+s}$$

$(r+s)$-tenzormező, amire minden $a \in X$-re és minden $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{r+s} \in T_a X$-re

$$(\mathbf{V}_1 \otimes \mathbf{V}_2)_a(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r, \mathbf{v}_{r+1}, \ldots, \mathbf{v}_{r+s}) = \mathbf{V}_{1,a}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r)\mathbf{V}_{2,a}(\mathbf{v}_{r+1}, \ldots, \mathbf{v}_{r+s}).$$

Fontos megjegyezni, hogy a szorzást úgy értelmezzük, hogy különböző $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2$-re $\mathbf{V}_1 \otimes \mathbf{V}_2 \neq \mathbf{V}_2 \otimes \mathbf{V}_1$ nem feltétlenül teljesül, még akkor sem, ha $r = s$.

Állítás 4.13.

(1) *A*

$$\otimes\colon \mathcal{V}^r(X) \times \mathcal{V}^s(X) \to \mathcal{V}^{r+s}(X)$$

leképezés bilineáris.

(2) *Ha* $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2$ *és* $\mathbf{V}_3$ *tenzormezők, akkor*

$$(\mathbf{V}_1 \otimes \mathbf{V}_2) \otimes \mathbf{V}_3 = \mathbf{V}_1 \otimes (\mathbf{V}_2 \otimes \mathbf{V}_3).$$

(3) *Ha* $\mathbf{V}_1, \ldots, \mathbf{V}_n \in \mathcal{V}^1(X)$ *egy bázisa* $\mathcal{V}^1(X)$*-nek, akkor a*

$$\mathbf{V}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{V}_{i_r}$$

r-tenzormezők, ahol $1 \leq i_1, \ldots, i_r \leq n$*, egy bázisa* $\mathcal{V}^r(X)$*-nek.*

Persze nem minden X-re léteznek olyan $\mathbf{V}_1, \ldots, \mathbf{V}_n$ 1-tenzormezők, amik egy bázisát alkotják $\mathcal{V}^1(X)$-nek. De például ha $X = \mathbb{R}^n$, vagy $X = S^1 \times \cdots \times S^1$, akkor igen. Sőt, ha $X = S^3$ vagy S^7, akkor is. Általában fontos kérdés, hogy milyen sima X sokaságokra van $\mathcal{V}^1(X)$-nek 1-tenzormezőkből álló bázisa, ezeket a sokaságokat nevezzük paralellizálható sokaságoknak.

Például ha $\mathbf{V}$ egy X^n-beli m-tenzormező és $\bar{x}\colon D_{\bar{x}} \to \mathbb{R}^n$ egy térkép X-en, akkor minden $a \in D_{\bar{x}}$-re

$$\mathbf{V}_a = \sum_{1 \le i_1,\dots,i_m \le n} \lambda_{a,i_1,\dots,i_m} \mathbf{E}^{\bar{x}}_{a,i_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{E}^{\bar{x}}_{a,i_m},$$

mert $\mathbf{E}^{\bar{x}}_{i_1,\dots,i_m} = \mathbf{E}^{\bar{x}}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{E}^{\bar{x}}_{i_m}$. Tehát $D_{\bar{x}}$-en

$$\mathbf{V} = \sum_{1 \le i_1,\dots,i_m \le n} \lambda_{i_1,\dots,i_m} d\bar{x}_{i_1} \otimes \cdots \otimes d\bar{x}_{i_m}.$$

Különösen fontosak lesznek azok az m-tenzormezők, amelyek -1-szeresükre változnak, ha két változójukat felcseréljük.

Definíció 4.14 (m-forma). Egy $\mathbf{V}\colon X \to \mathcal{L}^m$ m-tenzormező *alternáló*, ha minden $a \in X$-re, $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m \in T_a X$-re és $1 \le i, j \le m$-re

$$\mathbf{V}_a(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_{j-1}, \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_{j+1}, \dots, \mathbf{v}_m) = \\ -\mathbf{V}_a(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_{j-1}, \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{j+1}, \dots, \mathbf{v}_m).$$

Egy alternáló m-tenzormezőt *m-edrendű differenciál formának* (vagy *m-formának*) nevezünk.

A számolások megkönnyítésének érdekében szeretnénk valamilyen báziselemek tenzorszorzataként előállítani az m-formákat, lehetőleg 1-formáknak olyan szorzataként, ami az alternáló tulajdonsággal is rendelkezik. Ehhez egy másik szorzást definiálunk a differenciál formák halmazán, ami abban különbözik a $\otimes$ szorzástól, hogy két alternáló tenzormező szorzata is biztosan alternáló lesz és egy fajta kommutativitási szabály is teljesülni fog.

Definíció 4.15 (Ékszorzat). Legyen $\mathbf{V}_1\colon X \to \mathcal{L}^r$ egy r-forma és $\mathbf{V}_2\colon X \to \mathcal{L}^s$ egy s-forma. A $\mathbf{V}_1$ és $\mathbf{V}_2$ *ékszorzata* az a

$$\mathbf{V}_1 \wedge \mathbf{V}_2\colon X \to \mathcal{L}^{r+s}$$

$(r+s)$-forma, amire minden $a \in X$-re és minden $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{r+s} \in T_a X$-re

$$(\mathbf{V}_1 \wedge \mathbf{V}_2)_a(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{r+s}) = \frac{1}{r!s!} \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) \mathbf{V}_{1,a} \otimes \mathbf{V}_{2,a}(\mathbf{v}_{\sigma(1)}, \dots, \mathbf{v}_{\sigma(r+s)}),$$

ahol σ végigmegy az összes permutációján az $\{1, \dots, r+s\}$ halmaznak és $\operatorname{sgn}(\sigma)$ jelöli a σ permutáció előjelét.

Megjegyzés 4.16. Legyen $X = \mathbb{R}^n$. Ha $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2 \in \bigwedge^1(X)$ és $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathcal{V}(X)$, akkor

$$(\mathbf{V}_1 \wedge \mathbf{V}_2)_a(\mathbf{v}_1(a), \mathbf{v}_2(a)) = \det \begin{bmatrix} V_{1,a}(\mathbf{v}_1(a)) & V_{1,a}(\mathbf{v}_2(a)) \\ V_{2,a}(\mathbf{v}_1(a)) & V_{2,a}(\mathbf{v}_2(a)) \end{bmatrix}$$

minden $a \in X$-re.

Jelölje $\bigwedge^m(X)$ az X-en értelmezett m-formák halmazát.

Állítás 4.17. *$\bigwedge^m(X)$ egy vektortér $\mathbb{R}$ felett és modulus $\mathcal{F}(X)$ felett.*

Állítás 4.18.

(1) *A $\wedge\colon \bigwedge^r(X) \times \bigwedge^s(X) \to \mathcal{L}^{r+s}(X)$ leképezés bilineáris és $\bigwedge^{r+s}(X)$-be képez.*
(2) *Ha $\mathbf{V}_1 \in \bigwedge^r(X), \mathbf{V}_2 \in \bigwedge^s(X)$ és $\mathbf{V}_3 \in \bigwedge^q(X)$, akkor*

$$\mathbf{V}_1 \wedge \mathbf{V}_2 = (-1)^{rs}\mathbf{V}_2 \wedge \mathbf{V}_1$$

és

$$(\mathbf{V}_1 \wedge \mathbf{V}_2) \wedge \mathbf{V}_3 = \mathbf{V}_1 \wedge (\mathbf{V}_2 \wedge \mathbf{V}_3).$$

(3) *Ha $f\colon X \to \mathbb{R}$ egy differenciálható függvény, akkor*

$$(f\mathbf{V}_1) \wedge \mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_1 \wedge (f\mathbf{V}_2) = f(\mathbf{V}_1 \wedge \mathbf{V}_2).$$

(4) *Ha $\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_n \in \bigwedge^1(X)$ egy bázisa $\bigwedge^1(X)$-nek, akkor a*

$$\mathbf{V}_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{V}_{i_r}$$

alternáló r-tenzormezők, ahol $1 \le i_1 < \dots < i_r \le n$, egy bázisa $\bigwedge^r(X)$-nek.

Például $\mathbb{R}^3$-ban $dx \wedge dy$, $dy \wedge dz$, $dz \wedge dx$ egy bázisa a 2-formák terének.

Állítás 4.19. *Egy $\mathbf{V} \in \bigwedge^m(X)$ m-forma meghatároz egy*

$$\bigoplus_{i=1}^{m} \mathcal{V}(X) \to \mathcal{F}(X)$$

típusú, minden $a \in X$-re és $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m \in \mathcal{V}(X)$-re az

$$a \mapsto \mathbf{V}_a(\mathbf{v}_1(a), \dots, \mathbf{v}_m(a))$$

formulával definiált, minden változójában $\mathcal{F}(X)$-lineáris alternáló leképezést. Fordítva, ha

$$\mathbf{V}\colon \bigoplus_{i=1}^{m} \mathcal{V}(X) \to \mathcal{F}(X)$$

egy $\mathcal{F}(X)$-multilineáris alternáló leképezés, akkor $\mathbf{V}$ egy m-forma.

Állítás 4.20. *Legyen $X = \mathbb{R}^n$.*

(1) *Ha $\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_l \in \bigwedge^1(X)$ és $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l \in \mathcal{V}(X)$, akkor*

$$(\mathbf{V}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{V}_l)_a(\mathbf{v}_1(a), \dots, \mathbf{v}_l(a)) = \det[\mathbf{V}_{i,a}(\mathbf{v}_j(a))]_{i,j=1,\dots,l}$$

minden $a \in X$-re.
(2) *A $\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_l \in \bigwedge^1(X)$ akkor és csak akkor lineárisan összefüggőek, ha*

$$\mathbf{V}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{V}_l = 0.$$

Ha X^n egy sima sokaság, akkor legyen $\bigwedge^0(X) = \mathcal{F}(X)$ és $\bigwedge(X) = \bigoplus_{m=0}^{\infty} \bigwedge^m(X)$. Persze ha $m > n$, akkor $\bigwedge^m(X) = 0$. Az ékszorzást kiterjesztjük az egész $\bigwedge(X)$-re a

$$\varphi \wedge \psi = \left(f_1 + \sum_{m=1}^{\infty} \mathbf{V}_{1,m}\right) \wedge \left(f_2 + \sum_{m=1}^{\infty} \mathbf{V}_{2,m}\right) = \\ f_1 f_2 + \sum_{m=1}^{\infty} f_2 \mathbf{V}_{1,m} + \sum_{m=1}^{\infty} f_1 \mathbf{V}_{2,m} + \sum_{m_1,m_2=1}^{\infty} \mathbf{V}_{1,m_1} \wedge \mathbf{V}_{2,m_2}$$

formulával, ahol $f_1, f_2 \in \mathcal{F}(X)$ és $\mathbf{V}_{1,m}, \mathbf{V}_{2,m} \in \bigwedge^m(X)$.

5. Integrálás sokaságokon

5.1. Függvények integrálja.

Definíció 5.1. Ha X egy sokaság, akkor egy $A \subset X$ részhalmaz *mérhető*, ha A előáll egy X-beli Borel halmaznak és egy 0-mértékű halmaznak az uniójaként.

A mérhető halmazok rendszerét $\mathcal{A}$-val jelöljük.

Állítás 5.2. *Egy $A \subset X$ részhalmaz Borel halmaz akkor és csak akkor, ha minden $\bar{x}\colon U \to \mathbb{R}^n$ térképre $\bar{x}(A \cap U)$ egy $\mathbb{R}^n$-beli Borel halmaz.*

Bizonyítás. Ha $A \subset X$ egy Borel halmaz, akkor $A \cap U$ egy relatív Borel halmaz U-ban, de akkor $\bar{x}(A \cap U)$ is, mert $\bar{x}$ egy homeomorfizmus. A fordított irányhoz először megmutatjuk, hogy az $\bar{x}(U)$-beli Borel halmazok $\bar{x}^{-1}$ általi képei X-beli Borel halmazok, nem csak U-beli relatív Borel halmazok. Jelölje ehhez $\mathcal{B}$ az $\bar{x}(U)$-beli Borel halmazokat. Az U-beli nyíltak által generált $\mathcal{S}$ σ-gyűrű része az X-beli Boreleknek, mert az U-beli nyíltak X-beli Borelek. Ugyanakkor az $\mathcal{S}$ σ-gyűrű minden eleme U-beli halmaz (például U hatványhalmaza is az U-beli nyíltakat tartalmazó σ-gyűrű, ezért tartalmazza $\mathcal{S}$-et). Az $\bar{x}(\mathcal{S})$ egy $\bar{x}(U)$-beli σ-gyűrű, és $\mathcal{B} \subset \bar{x}(\mathcal{S})$, mert $\bar{x}(\mathcal{S})$ tartalmazza az $\bar{x}(U)$-beli nyíltakat. Emiatt $\bar{x}^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{S}$. Tehát $\bar{x}^{-1}(\mathcal{B})$ része az X-beli Boreleknek. Ha most $A \subset X$ olyan, hogy minden $\bar{x}\colon U \to \mathbb{R}^n$ térképre $\bar{x}(A \cap U)$ egy Borel halmaz, akkor $A \cap U$ egy X-beli Borel halmaz, és így $A = A \cap \cup_{i=1}^{\infty} U_i$ is az, ha U_i megszámlálható sok térkép, ami fedi X-et. □

Lemma 5.3. *Legyen X^n egy sokaság és $\bar{x}\colon U \to \mathbb{R}^n$ egy térkép. Ha $B \subset \mathbb{R}^n$ egy Borel halmaz, akkor $\bar{x}^{-1}(B)$ egy X-beli Borel halmaz. Ha X egy sima sokaság és $A \subset \mathbb{R}^n$ egy 0-mértékű halmaz, akkor $\bar{x}^{-1}(A)$ egy X-beli 0-mértékű halmaz.*

Bizonyítás. Legyen $C = \bar{x}^{-1}(B)$, ekkor $C = C \cap U$ egy Borel halmaz. Ha $\bar{y}\colon V \to \mathbb{R}^n$ egy másik térkép, akkor

$$\bar{y}(C \cap V) = \bar{y}(\bar{x}^{-1}(B \cap \bar{x}(V \cap U)))$$

egy Borel halmaz $\mathbb{R}^n$-ben, mert $\bar{x}(V \cap U)$ és B azok, $\bar{y} \circ \bar{x}^{-1}$ pedig homeomorfizmus. Emiatt teljesül az előző állítás feltétele és C egy X-beli Borel halmaz. Ha X egy sima sokaság és $A \subset \mathbb{R}^n$ egy 0-mértékű halmaz, akkor a 0-mértékű halmaz definíciója után bizonyítottak alapján $\bar{x}^{-1}(A)$ egy X-beli 0-mértékű halmaz. □

Állítás 5.4. *Ha X^n egy sima sokaság, akkor egy $A \subset X^n$ halmaz pontosan akkor mérhető, ha minden $\bar{x}\colon U \to \mathbb{R}^n$ térképre az $\bar{x}(U \cap A)$ halmaz Lebesgue mérhető. Az $\mathcal{A}$ egy σ-algebra. Egy $g\colon X \to \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor mérhető, ha minden $\bar{x}\colon U \to \mathbb{R}^n$ térképre a $g \circ \bar{x}^{-1}$ függvény mérhető.*

Bizonyítás. Ha $A \subset X$ mérhető, akkor $A = A' \cup A''$, ahol A' Borel és A'' 0-mértékű. Ekkor minden $\bar{x}\colon U \to \mathbb{R}^n$ térképre $\bar{x}(A' \cap U)$ Borel és $\bar{x}(A'' \cap U)$ 0-mértékű, tehát $\bar{x}(A \cap U)$ Lebesgue mérhető. Fordítva, ha $A \subset X$ és minden $\bar{x}\colon U \to \mathbb{R}^n$ térképre $\bar{x}(A \cap U) = B' \cup B''$, ahol B' Borel és B'' 0-mértékű, akkor $\bar{x}^{-1}(B' \cup B'') = A \cap U$ és

$$A = A \cap \cup_{i=1}^{\infty} U_i = \cup_{i=1}^{\infty} A \cap U_i = \cup_{i=1}^{\infty} (\bar{x}^{-1}(B_i') \cup \bar{x}^{-1}(B_i''))$$

megszámlálható sok Borel és 0-mértékű uniója az előző lemma alapján, ezért egy Borel és egy 0-mértékű uniója, tehát mérhető. Az $\mathcal{A}$ egy σ-algebra a következők miatt. Az $\mathcal{A}$ tartalmazza X-et, mert X megszámlálható sok nyílt U_i uniója. Ha $A, B \in \mathcal{A}$, akkor

$$A - B = (A - B) \cap \cup_{i=1}^{\infty} U_i = \cup_{i=1}^{\infty} (A - B) \cap U_i$$

és

$$\bar{x}_i((A - B) \cap U_i) = \bar{x}_i(A \cap U_i - B \cap U_i) = \bar{x}_i(A \cap U_i) - \bar{x}_i(B \cap U_i),$$

ami mérhető, ezért mindegyik $(A - B) \cap U_i$ is és így $A - B$ is mérhető. Hasonlóan ha $A_j \in \mathcal{A}$, akkor pedig

$$\cup_{j=1}^{\infty} A_j = (\cup_{j=1}^{\infty} A_j) \cap \cup_{i=1}^{\infty} U_i = \cup_{i=1}^{\infty} (\cup_{j=1}^{\infty} A_j) \cap U_i,$$

$$\bar{x}_i((\cup_{j=1}^{\infty} A_j) \cap U_i) = \bar{x}_i(\cup_{j=1}^{\infty} (A_j \cap U_i)) = \cup_{j=1}^{\infty} \bar{x}_i(A_j \cap U_i),$$

ami mérhető, ezért $\cup_{j=1}^{\infty} A_j$ is az. Tehát $\mathcal{A}$ egy σ-algebra. Végül ha $g\colon X \to \mathbb{R}$ mérhető függvény és $A \subset \mathbb{R}$ mérhető, akkor

$$(g \circ \bar{x}^{-1})^{-1}(A) = \bar{x}(g^{-1}(A) \cap U),$$

ami mérhető, mert $g^{-1}(A) \cap U$ is az. Ha pedig minden $\bar{x}\colon U \to \mathbb{R}^n$ térképre és $A \subset \mathbb{R}$ mérhető halmazra $\bar{x}(g^{-1}(A) \cap U)$ mérhető, akkor $g^{-1}(A)$ mérhető. □

Definíció 5.5. Ha X egy Riemann sokaság és $\bar{x}\colon U \to \mathbb{R}^n$ egy térkép, akkor a

$$\gamma^{\bar{x}}\colon U \to \mathbb{R}$$

$$\gamma^{\bar{x}}(a) = \det \begin{bmatrix} \langle \mathbf{e}^{\bar{x}}_{a,1}, \mathbf{e}^{\bar{x}}_{a,1} \rangle & \cdots & \langle \mathbf{e}^{\bar{x}}_{a,1}, \mathbf{e}^{\bar{x}}_{a,n} \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \mathbf{e}^{\bar{x}}_{a,n}, \mathbf{e}^{\bar{x}}_{a,1} \rangle & \cdots & \langle \mathbf{e}^{\bar{x}}_{a,n}, \mathbf{e}^{\bar{x}}_{a,n} \rangle \end{bmatrix}$$

differenciálható függvényt az $\bar{x}$ térképhez tartozó Gram determinánsnak nevezzük.

Ha $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ ortonormált érintő vektormezők, akkor $\mathbf{e}^{\bar{x}}_i = \sum_{k=1}^n \lambda_{i,k}\mathbf{v}_k$ miatt

$$\langle \mathbf{e}^{\bar{x}}_i, \mathbf{e}^{\bar{x}}_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{i,k}\lambda_{j,k},$$

és így $\gamma^{\bar{x}} = \det(A^T A)$ az

$$A = A^{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \lambda_{1,1} & \cdots & \lambda_{1,n} \\ \cdots & \lambda_{i,k} & \\ \lambda_{n,1} & \cdots & \lambda_{n,n} \end{bmatrix}$$

mátrixra. Ebből az következik, hogy $\gamma^{\bar{x}} \geq 0$.

A klasszikus analízisből ismert, hogy ha $A, B \subset \mathbb{R}^n$ nyílt részhalmazok, $g\colon B \to \mathbb{R}$ egy tetszőleges függvény és $f\colon A \to B$ egy diffeomorfizmus, akkor $g \in L_1(B)$ pontosan akkor ha $g \circ f \in L_1(A)$ és ilyenkor

$$\int_B g = \int_A g \circ f \, |\det f'|$$

teljesül a Lebesgue integrálokra. Ezért ha $\bar{x}\colon U \to \mathbb{R}^n$ és $\bar{y}\colon V \to \mathbb{R}^n$ két olyan térkép az X Riemann sokaságon, hogy egy $A \in \mathcal{A}$ nyílt halmaz benne van $U \cap V$-ben, és a megszorított

$$\sqrt{\gamma^{\bar{x}} \circ \bar{x}^{-1}}|_{\bar{x}(A)}$$

függvény $L_1(\bar{x}(A))$-beli, akkor

$$\int_{\bar{x}(A)} \sqrt{\gamma^{\bar{x}} \circ \bar{x}^{-1}} d(x_1, \ldots, x_n) =$$
$$\int_{\bar{y}(A)} \sqrt{\gamma^{\bar{x}} \circ \bar{x}^{-1} \circ \bar{x} \circ \bar{y}^{-1}} \left|\det(\bar{x} \circ \bar{y}^{-1})'\right| d(y_1, \ldots, y_n).$$

A $\sqrt{\gamma^{\bar{x}} \circ \bar{y}^{-1}} \, |\det(\bar{x} \circ \bar{y}^{-1})'|$ függvény kiszámításához már láttuk, hogy

$$(\bar{x} \circ \bar{y}^{-1})'(\bar{y}(a)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y_1}\bar{x}_1 \circ \bar{y}^{-1} & \cdots & \frac{\partial}{\partial y_n}\bar{x}_1 \circ \bar{y}^{-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial y_1}\bar{x}_n \circ \bar{y}^{-1} & \cdots & \frac{\partial}{\partial y_n}\bar{x}_n \circ \bar{y}^{-1} \end{bmatrix}_{\bar{y}(a)}$$

és

$$\mathbf{e}^{\bar{y}}_i = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial y_i} \bar{x}_j \circ \bar{y}^{-1} \right) \circ \bar{y} \mathbf{e}^{\bar{x}}_j.$$

Ekkor

$$\begin{bmatrix} \langle \mathbf{e}_1^{\bar{x}}, \mathbf{e}_1^{\bar{x}} \rangle \circ \bar{y}^{-1} & \cdots & \langle \mathbf{e}_1^{\bar{x}}, \mathbf{e}_n^{\bar{x}} \rangle \circ \bar{y}^{-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \mathbf{e}_n^{\bar{x}}, \mathbf{e}_1^{\bar{x}} \rangle \circ \bar{y}^{-1} & \cdots & \langle \mathbf{e}_n^{\bar{x}}, \mathbf{e}_n^{\bar{x}} \rangle \circ \bar{y}^{-1} \end{bmatrix} \cdot (\bar{x} \circ \bar{y}^{-1})' =$$

$$\begin{bmatrix} \langle \mathbf{e}_1^{\bar{x}}, \mathbf{e}_1^{\bar{x}} \rangle \circ \bar{y}^{-1} & \cdots & \langle \mathbf{e}_1^{\bar{x}}, \mathbf{e}_n^{\bar{x}} \rangle \circ \bar{y}^{-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \mathbf{e}_n^{\bar{x}}, \mathbf{e}_1^{\bar{x}} \rangle \circ \bar{y}^{-1} & \cdots & \langle \mathbf{e}_n^{\bar{x}}, \mathbf{e}_n^{\bar{x}} \rangle \circ \bar{y}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y_1} \bar{x}_1 \circ \bar{y}^{-1} & \cdots & \frac{\partial}{\partial y_n} \bar{x}_1 \circ \bar{y}^{-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial y_1} \bar{x}_n \circ \bar{y}^{-1} & \cdots & \frac{\partial}{\partial y_n} \bar{x}_n \circ \bar{y}^{-1} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \langle \mathbf{e}_1^{\bar{x}}, \mathbf{e}_1^{\bar{y}} \rangle \circ \bar{y}^{-1} & \cdots & \langle \mathbf{e}_1^{\bar{x}}, \mathbf{e}_n^{\bar{y}} \rangle \circ \bar{y}^{-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \mathbf{e}_n^{\bar{x}}, \mathbf{e}_1^{\bar{y}} \rangle \circ \bar{y}^{-1} & \cdots & \langle \mathbf{e}_n^{\bar{x}}, \mathbf{e}_n^{\bar{y}} \rangle \circ \bar{y}^{-1} \end{bmatrix}$$

és hasonlóan

$$(\bar{x} \circ \bar{y}^{-1})'^T \cdot \begin{bmatrix} \langle \mathbf{e}_1^{\bar{x}}, \mathbf{e}_1^{\bar{y}} \rangle \circ \bar{y}^{-1} & \cdots & \langle \mathbf{e}_1^{\bar{x}}, \mathbf{e}_n^{\bar{y}} \rangle \circ \bar{y}^{-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \mathbf{e}_n^{\bar{x}}, \mathbf{e}_1^{\bar{y}} \rangle \circ \bar{y}^{-1} & \cdots & \langle \mathbf{e}_n^{\bar{x}}, \mathbf{e}_n^{\bar{y}} \rangle \circ \bar{y}^{-1} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \langle \mathbf{e}_1^{\bar{y}}, \mathbf{e}_1^{\bar{y}} \rangle \circ \bar{y}^{-1} & \cdots & \langle \mathbf{e}_1^{\bar{y}}, \mathbf{e}_n^{\bar{y}} \rangle \circ \bar{y}^{-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \mathbf{e}_n^{\bar{y}}, \mathbf{e}_1^{\bar{y}} \rangle \circ \bar{y}^{-1} & \cdots & \langle \mathbf{e}_n^{\bar{y}}, \mathbf{e}_n^{\bar{y}} \rangle \circ \bar{y}^{-1} \end{bmatrix},$$

emiatt

$$\sqrt{\gamma^{\bar{x}} \circ \bar{y}^{-1}} \left| \det(\bar{x} \circ \bar{y}^{-1})' \right| = \sqrt{\gamma^{\bar{x}} \circ \bar{y}^{-1} \det\left((\bar{x} \circ \bar{y}^{-1})'\right)^2} =$$
$$\sqrt{\det(\bar{x} \circ \bar{y}^{-1})'^T \gamma^{\bar{x}} \circ \bar{y}^{-1} \det(\bar{x} \circ \bar{y}^{-1})'} = \sqrt{\gamma^{\bar{y}} \circ \bar{y}^{-1}}.$$

Tehát

$$\int_{\bar{y}(A)} \sqrt{\gamma^{\bar{x}} \circ \bar{y}^{-1}} \left| \det(\bar{x} \circ \bar{y}^{-1})' \right| d(y_1, \ldots, y_n) = \int_{\bar{y}(A)} \sqrt{\gamma^{\bar{y}} \circ \bar{y}^{-1}} d(y_1, \ldots, y_n)$$

és így

$$\int_{\bar{x}(A)} \sqrt{\gamma^{\bar{x}} \circ \bar{x}^{-1}} d(x_1, \ldots, x_n) = \int_{\bar{y}(A)} \sqrt{\gamma^{\bar{y}} \circ \bar{y}^{-1}} d(y_1, \ldots, y_n).$$

Állítás 5.6. *Ha X^n egy Riemann sokaság, akkor az $\mathcal{A}$ σ-algebrán egyértelműen létezik olyan μ mérték, amire teljesül, hogy ha $A \in \mathcal{A}$ és egy $\bar{x}\colon U \to \mathbb{R}^n$ térképre $A \subset U$, akkor*

$$\mu(A) = \int_{\bar{x}(A)} \sqrt{\gamma^{\bar{x}} \circ \bar{x}^{-1}} d(x_1, \ldots, x_n).$$

Tehát ha a $\sqrt{\gamma^{\bar{x}} \circ \bar{x}^{-1}}|_{\bar{x}(A)}$ függvény $L_1(\bar{x}(A))$-beli, akkor $\mu(A)$ véges, különben pedig $\mu(A) = \infty$.

Bizonyítás. □

Definíció 5.7. Ha $g\colon X \to \mathbb{R}$ egy mérhető függvény az X sima sokaságon, akkor

$$\int_X g$$

jelöli a g függvény integrálját, ha az véges, tehát ha $g \in L_1(X)$.

Például ha $i\colon \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}^4$ a projektív síknak egy beágyazása, akkor az $\mathbb{R}^4$-beli skalárszorzat indukál egy Riemann metrikát az $i(\mathbb{R}P^2)$ részsokaságon és i segítségével $\mathbb{R}P^2$-n is. Ezt a metrikát használva az $\mathbb{R}P^2$ felszíne megegyezik az azonosan 1 függvény integráljával, tehát

$$\mu(\mathbb{R}P^2) = \int_{\mathbb{R}P^2} 1.$$

Állítás 5.8. *Legyen X^n egy Riemann sokaság. Legyen $g\colon X \to \mathbb{R}$ egy $L_1(X)$-beli függvény. Legyen a*

$$\{h_i\colon X \to [0,1] : i \in \mathbb{N}\}$$

egy X-et fedő

$$\{\bar{x}_j\colon U_j \to \mathbb{R}^n : j \in \mathbb{N}\}$$

ortonormált térkép rendszernek alárendelt lokálisan véges egységosztás. Ekkor

$$\int_X g = \sum_{i\geq 1} \int_{\bar{x}_i(U_i)} (h_i g) \circ \bar{x}_i^{-1} \sqrt{\gamma^{\bar{x}_i} \circ \bar{x}_i^{-1}} d(x_1, \ldots, x_n),$$

és ezek az integrálok végesek.

Bizonyítás. □

Következmény 5.9. Ha $A \subset \mathbb{R}^m$ egy m-dimenziós részsokaság, $f\colon A \to \mathbb{R}^n$ egy beágyazás és $g\colon f(A) \to \mathbb{R}$ egy $L_1(f(A))$-beli függvény, akkor a g függvény integrálját az $f(A)$ paraméterezett részsokaság mentén az

$$\int_A g(f(x)) \sqrt{\det(f'^T(x) f'(x))} dx$$

formula adja meg, ahol f' az f leképezés $n \times m$-es Jacobi mátrixa. □

Ha $m = 1$, akkor

$$\sqrt{\det(f'^T(x) f'(x))} = |f'(x)|,$$

ha pedig $m = 2$, akkor

$$\sqrt{\det(f'^T(x) f'(x))} = \sqrt{\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\right|^2 \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}(x)\right|^2 - \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \right\rangle} = \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \times \frac{\partial f}{\partial x_2}(x)\right|.$$

Ezért például egy $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}^n$ görbe ívhossza

$$\int_a^b |f'(t)|\,dt,$$

ha $F\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ egy vektormező, akkor az $\gamma\colon [a,b]\to\mathbb{R}^n$ út mentén végzett munka az

$$\int_a^b \langle F(f(t)), \frac{f'(t)}{|f'(t)|}\rangle\, |f'(t)|\,dt = \int_a^b \langle F(f(t)), f'(t)\rangle dt$$

vonalintegrál, és egy $F\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ vektormezőnek az $f\colon A^2\to\mathbb{R}^n$ felület mentén a fluxusa pedig

$$\int_A \langle F(f(x)), \frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\times\frac{\partial f}{\partial x_2}(x)}{\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\times\frac{\partial f}{\partial x_2}(x)\right|}\rangle \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\times\frac{\partial f}{\partial x_2}(x)\right| dx =$$

$$\int_A \langle F(f(x)), \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\times\frac{\partial f}{\partial x_2}(x)\rangle dx,$$

mert

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\times\frac{\partial f}{\partial x_2}(x)$$

az $f(A)$ felületre merőleges vektormező.

5.2. n-formák integrálja.

A Stokes tételnek is létezik sokaságokra való általánosítása. Ehhez bevezetünk egy kicsit másfajta integrált, amit csak ú.n. irányítható sokaságokon tudunk értelmezni. Ez az $\int_a^b f = -\int_b^a f$ formulának fog megfelelni, ahol f egy $[a,b]$ intervallumon értelmezett függvény.

Definíció 5.10. Az X sima sokaság *irányítható*, ha létezik olyan $\Omega\colon X\to\mathcal{L}^n$ n-forma, ami semelyik $a\in X$-ben sem a $0\in\mathcal{L}^n$ leképezés. Ekkor Ω egy *irányítása* X-nek.

Állítás 5.11. *Ha az X^n egy irányítható Riemann sokaság az Ω irányítással, akkor egyértelműen létezik olyan ω n-forma, hogy minden $a\in X$-ben*

$$\omega_a(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n)=1$$

ha $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n\in T_aX$ olyanok, hogy $\Omega_a(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n)>0$ és $\varphi(\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_j)=\delta_{i,j}$, ahol φ a Riemann metrika.

Bizonyítás. Egy e_i ONB bázishoz T_pX-ben rögzítünk egy tetszőleges $\psi\colon T_pX\to\mathbb{R}^n$ irányítástartó izomorfizmust ami izometria is a standard Euklideszi metrikával. Definiáljuk $p\in X$-ben az ω formát:

$$\omega_p(v_1,\dots,v_n)=\det[\psi(v_1),\dots,\psi(v_n)].$$

Ekkor minden ONB-re T_pX-ben $\omega_p = 1$. Ebből az is következik, hogy ω sima: Legyen e_i egy koordinátarendszernek megfelelő bázis T_pX-ben, ami nem feltétlenül ONB, legyen

$$[g_{i,j}(p)]_{i,j} = [\varphi_p(e_i, e_j)]_{i,j} = A^T A,$$

ahol a mátrix A az $e_i = \sum_{k=1}^n \alpha_{i,k} f_k$ együtthatókat tartalmazza és f_k egy ONB. Ekkor

$$\omega_p(e_1, \dots, e_n) = \det(A)\omega_p(f_1, \dots, f_n)$$

az n-linearitás miatt. Mivel $\det A > 0$ ha e_i irányítása ugyanaz, mint az f_k ONB bázisé,

$$\omega_p(e_1, \dots, e_n) = \sqrt{\det(A)^2} = \sqrt{\det A^T A} = \sqrt{\det[g_{i,j}(p)]_{i,j}},$$

ami simán függ p-től. □

Ezt az ω n-formát térfogati formának nevezzük.

Állítás 5.12. *Ha X^n egy irányítható Riemann sokaság az ω térfogati formával, akkor minden $L_1(X)$-beli n-forma valamilyen $L_1(X)$-beli $f\colon X \to \mathbb{R}$ függvényszerese ω-nak.*

Bizonyítás. □

Ha $\bar{x}\colon U \to \mathbb{R}^n$ egy térkép, akkor

$$d\bar{x}_1 \wedge \dots \wedge d\bar{x}_n = f\omega$$

valamilyen $f\colon X \to \mathbb{R}$ sima függvényre. Ekkor az $(\mathbf{e}_1^{\bar{x}}, \dots, \mathbf{e}_n^{\bar{x}})$ vektor n-esen

$$1 = d\bar{x}_1 \wedge \dots \wedge d\bar{x}_n(\mathbf{e}_1^{\bar{x}}, \dots, \mathbf{e}_n^{\bar{x}}) = f\omega(\mathbf{e}_1^{\bar{x}}, \dots, \mathbf{e}_n^{\bar{x}}) = f\sqrt{\det[g_{i,j}]_{i,j}}$$

ezért

$$f = 1/\sqrt{\det[g_{i,j}]_{i,j}}.$$

Tehát az U halmazon a térfogati formára

$$\omega|_U = \sqrt{\det[g_{i,j}]_{i,j}} d\bar{x}_1 \wedge \dots \wedge d\bar{x}_n.$$

Persze

$$\sqrt{\det[g_{i,j}]_{i,j}} = \sqrt{\gamma^{\bar{x}}}.$$

Definíció 5.13. Ha az X^n egy irányítható Riemann sokaság az ω térfogati formával, $g\colon X \to \mathbb{R}$ egy $L_1(X)$-beli függvény és $\alpha = g\omega$, akkor az α egy *L_1-beli n-forma.* Az α *integrálja* az $\int_X g$ integrál, amit

$$\int_X \alpha \text{ -val}$$

jelölünk.

Ha $\bar{x}\colon U \to \mathbb{R}^n$ egy térkép, és α egy $L_1(U)$-beli n-forma az U halmazon, akkor

$$\alpha = \lambda\, d\bar{x}_1 \wedge \cdots \wedge d\bar{x}_n = \frac{\lambda\sqrt{\gamma^{\bar{x}}}}{\sqrt{\gamma^{\bar{x}}}}\, d\bar{x}_1 \wedge \cdots \wedge d\bar{x}_n$$

valamilyen $L_1(U)$-beli $\lambda\colon U \to \mathbb{R}$ függvénnyel. Ekkor

$$\int_U \alpha = \int_U \lambda/\sqrt{\gamma^{\bar{x}}} = \int_{\bar{x}(U)} \frac{\lambda \circ \bar{x}^{-1}}{\sqrt{\gamma^{\bar{x}} \circ \bar{x}^{-1}}} \sqrt{\gamma^{\bar{x}} \circ \bar{x}^{-1}} d(x_1, \ldots, x_n) =$$

$$\int_{\bar{x}(U)} \lambda \circ \bar{x}^{-1} d(x_1, \ldots, x_n)$$

Például ha az M egy 1-dimenziós sokaság $\mathbb{R}^n$-be ágyazva, $\gamma\colon (a,b) \to M$ egy paraméterezése M-nek és α egy 1-forma $\mathbb{R}^n$-en, akkor

$$\int_M \alpha = \int_a^b \langle f(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt,$$

ahol $\alpha = \sum_{k=1}^n f_k dx_k$ az f_k differenciálható függvényekkel és $f = (f_1, \ldots, f_n)$ a következők miatt.

Ha $v \in \mathbb{R}^n$ egy $a \in \mathbb{R}^n$-beli érintővektor és $v = \sum_{k=1}^n v_k e_k$, ahol e_k az egységvektorok, akkor

$$\alpha_a(v) = \sum_{k=1}^n f_k(a) v_k$$

miatt a $\gamma(t)$-beli egység hosszú $\gamma'(t)/|\gamma'(t)|$ érintővektorára M-nek

$$\alpha_{\gamma(t)}(\gamma'(t)/|\gamma'(t)|) = \sum_{k=1}^n f_k(\gamma(t))\gamma_k'(t)/|\gamma'(t)|.$$

Hogy megoldjuk M-en az

$$\alpha = g\omega$$

egyenletet, csak azt kell észrevenni, hogy

$$\frac{\alpha_{\gamma(t)}(\gamma'(t)/|\gamma'(t)|)}{\sum_{k=1}^n f_k(\gamma(t))\gamma_k'(t)/|\gamma'(t)|} = 1 = \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t)/|\gamma'(t)|)$$

ha $\gamma'(t)$ megfelelő irányú (ellenkező esetben tekintsük $-\omega$-t). Tehát

$$g(\gamma(t)) = \sum_{k=1}^n f_k(\gamma(t))\gamma_k'(t)/|\gamma'(t)|$$

és így a $\gamma\colon (a,b) \to M$ paraméterezés miatt

$$\int_M g = \int_a^b \langle f(\gamma(t)), \gamma'(t)/|\gamma'(t)|\rangle |\gamma'(t)| dt = \int_a^b \langle f(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt.$$

Egy másik példa az, amikor M egy 2-dimenziós sokaság $\mathbb{R}^3$-ban, $\gamma\colon A \to M$ ennek egy paraméterezése az $A \subset \mathbb{R}^2$ nyílt halmaz szerint és α egy 2-forma $\mathbb{R}^3$-on. Ekkor

$$\int_M \alpha = \int_A \langle f(\gamma(s,t)), \partial_s\gamma_1(s,t) \times \partial_t\gamma(s,t)\rangle d(s,t),$$

ahol

$$\alpha = f_1\, dy \wedge dz + f_2\, dz \wedge dx + f_3\, dx \wedge dy.$$

A formulában $f = (f_1, f_2, f_3)$, az f_k függvények differenciálhatóak és $dy \wedge dz$, $dz \wedge dx$ és $dx \wedge dy$ olyan 2-formák, amik egy bázisát alkotják az összes lehetséges 2-formák modulusának. Tehát ha $v, w \in \mathbb{R}^3$ valamilyen $a \in \mathbb{R}^3$-beli érintővektorok és $v = \sum_{k=1}^3 v_k e_k$, $w = \sum_{k=1}^3 w_k e_k$, akkor

$$\begin{aligned}\alpha_a(v,w) = f_1(a)\, dy \wedge dz(v,w) + f_2(a)\, dz \wedge dx(v,w) + f_3(a)\, dx \wedge dy(v,w) =\\ f_1(a)(v_2w_3 - v_3w_2) + f_2(a)(v_3w_1 - v_1w_3) + f_3(a)(v_1w_2 - v_2w_1) =\\ \langle (f_1(a), f_2(a), f_3(a)), v \times w\rangle.\end{aligned}$$

Megint az M-en

$$\alpha = g\omega$$

valamilyen $g\colon M \to \mathbb{R}$-re. Ha találunk M-hez megfelelően irányított ortonormált érintő vektorokat és kiszámoljuk rajtuk α értékét, akkor megkapjuk a g függvényt, mert az ω akkor 1 kell legyen. A

$$v_{\gamma(s,t)} = \frac{\partial_s\gamma(s,t)}{|\partial_s\gamma(s,t)|}$$

és

$$w_{\gamma(s,t)} = \frac{\partial_t\gamma(s,t) - (\frac{\partial_s\gamma(s,t)}{|\partial_s\gamma(s,t)|}\cos\varphi)|\partial_t\gamma(s,t)|}{|\partial_t\gamma(s,t)\sin\varphi|}$$

ortogonális és egység hosszú érintő vektorok, ahol φ a két vektor által bezárt szög. Ekkor

$$v_{\gamma(s,t)} \times w_{\gamma(s,t)} = \frac{\partial_s\gamma(s,t)}{|\partial_s\gamma(s,t)|} \times \frac{\partial_t\gamma(s,t)}{|\partial_t\gamma(s,t)\sin\varphi|} = \frac{\partial_s\gamma(s,t) \times \partial_t\gamma(s,t)}{|\partial_s\gamma(s,t) \times \partial_t\gamma(s,t)|},$$

ezért

$$\alpha_{\gamma(s,t)}(v_{\gamma(s,t)}, w_{\gamma(s,t)}) = \langle f(\gamma(s,t)), \frac{\partial_s\gamma(s,t) \times \partial_t\gamma(s,t)}{|\partial_s\gamma(s,t) \times \partial_t\gamma(s,t)|}\rangle,$$

ahol feltettük, hogy ω olyan térfogati forma M-en, hogy $\omega_{\gamma(s,t)}(v_{\gamma(s,t)}, w_{\gamma(s,t)}) = 1$. Tehát

$$\begin{aligned}\int_M g = \int_A \langle f(\gamma(s,t)), \frac{\partial_s\gamma(s,t) \times \partial_t\gamma(s,t)}{|\partial_s\gamma(s,t) \times \partial_t\gamma(s,t)|}\rangle\, |\partial_s\gamma(s,t) \times \partial_t\gamma(s,t)|\, d(s,t) =\\ \int_A \langle f(\gamma(s,t)), \partial_s\gamma(s,t) \times \partial_t\gamma(s,t)\rangle d(s,t).\end{aligned}$$

6. Differenciál formák deriválása

A következőkben egy X^n sokaságon egy olyan $\mathbb{R}$-lineáris

$$d_X\colon \bigwedge(X) \to \bigwedge(X)$$

leképezést is definiálunk, amire $d_X \circ d_X = 0$ teljesül. Ha $f \in \bigwedge^0(X)$, akkor legyen

$$d_X(f) = df$$

az f differenciálja. Ha $m \geq 1$, $\mathbf{V} \in \bigwedge^m(X)$ egy m-forma és $\bar{x}$ egy térkép, akkor minden $a \in D_{\bar{x}}$-re

$$\mathbf{V}_a = \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_m\leq n} \lambda_{a,i_1,\ldots,i_m} d(\bar{x}_{i_1})_a \wedge \cdots \wedge d(\bar{x}_{i_m})_a$$

valamilyen $\lambda_{i_1,\ldots,i_m}\colon D_{\bar{x}} \to \mathbb{R}$ differenciálható függvényekkel. Legyen $D_{\bar{x}}$-en a $d_X(\mathbf{V})$ úgy definiálva, hogy minden $a \in D_{\bar{x}}$-re

$$d_X(\mathbf{V})_a = \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_m\leq n} d(\lambda_{a,i_1,\ldots,i_m})_a \wedge d(\bar{x}_{i_1})_a \wedge \cdots \wedge d(\bar{x}_{i_m})_a,$$

ahol $d(\lambda_{a,i_1,\ldots,i_m})$ a $\lambda_{a,i_1,\ldots,i_m}$ differenciálja, tehát

$$d(\lambda_{a,i_1,\ldots,i_m})_a = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \lambda_{a,i_1,\ldots,i_m} \circ \bar{x}^{-1}(\bar{x}(a)) d(\bar{x}_j)_a.$$

Nyilván $d_X(\mathbf{V}) \in \bigwedge^{m+1}(X)$.

Állítás 6.1. *A következők teljesülnek.*

(1) *A* $d_X\colon \bigwedge(X) \to \bigwedge(X)$ *leképezés* $\mathbb{R}$*-lineáris.*
(2) *Ha* $\mathbf{V}_1 \in \bigwedge^r(X)$ *és* $\mathbf{V}_2 \in \bigwedge^s(X)$, *akkor*

$$d_X(\mathbf{V}_1 \wedge \mathbf{V}_2) = d_X(\mathbf{V}_1) \wedge \mathbf{V}_2 + (-1)^r \mathbf{V}_1 \wedge d_X(\mathbf{V}_2).$$

(3) $d_X \circ d_X = 0$.

Ha $\mathbf{v}\colon X \to TX$ egy vektormező, akkor $m \geq 1$-re legyen $i_{\mathbf{v}}\colon \bigwedge^m(X) \to \bigwedge^{m-1}(X)$ az a leképezés, amire minden $a \in X$ esetén minden $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{m-1} \in \mathcal{V}(X)$-re

$$i_{\mathbf{v}}(\mathbf{V})_a(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{m-1}) = \mathbf{V}_a(\mathbf{v}(a), \mathbf{v}_1(a), \ldots, \mathbf{v}_{m-1}(a))$$

és $i_{\mathbf{v}}(f) = 0$ ha $m = 0$. Ezt a szokásos módon az egész $\bigwedge(X)$-re kiterjesztve kapunk egy $i_{\mathbf{v}}\colon \bigwedge(X) \to \bigwedge(X)$ leképezést.

Állítás 6.2. *A következők teljesülnek.*

(1) *Rögzített* $\mathbf{v}$ *vektormezőre az* $i_{\mathbf{v}}\colon \bigwedge(X) \to \bigwedge(X)$ *leképezés* $\mathcal{F}(X)$*-lineáris.*

(2) *Rögzített* $\mathbf{V} \in \bigwedge^m(X)$ *esetén a*

$$\mathcal{V}(X) \to \bigwedge(X)$$
$$\mathbf{v} \mapsto i_{\mathbf{v}}(\mathbf{V})$$

leképezés $\mathcal{F}(X)$*-lineáris.*

(3) *Ha* $\mathbf{V}_1 \in \bigwedge^r(X)$ *és* $\mathbf{V}_2 \in \bigwedge^s(X)$*, akkor*

$$i_{\mathbf{v}}(\mathbf{V}_1 \wedge \mathbf{V}_2) = i_{\mathbf{v}}(\mathbf{V}_1) \wedge \mathbf{V}_2 + (-1)^r \mathbf{V}_1 \wedge i_{\mathbf{v}}(\mathbf{V}_2).$$

(4) $i_{\mathbf{v}} \circ i_{\mathbf{v}} = 0$.

Egy rögzített $\mathbf{v} \colon X \to TX$ vektormezőre legyen $L_{\mathbf{v}} \colon \bigwedge^m(X) \to \bigwedge^m(X)$ az a leképezés, amire minden $a \in X$ esetén

$$L_{\mathbf{v}}(\mathbf{V})_a = i_{\mathbf{v}}(d_X \mathbf{V})_a + d_X(i_{\mathbf{v}}(\mathbf{V}))_a$$

ha $m \geq 1$ és $\mathbf{V} \in \bigwedge^m(X)$, és $L_{\mathbf{v}}(f) = \partial_{\mathbf{v}}(f)$ ha $f \in \bigwedge^0(X)$.

Állítás 6.3.

(1) *Az* $L_{\mathbf{v}} \colon \bigwedge(X) \to \bigwedge(X)$ *leképezés* $\mathbb{R}$*-lineáris.*

(2) *Ha* $\mathbf{V}_1 \in \bigwedge^r(X)$ *és* $\mathbf{V}_2 \in \bigwedge^s(X)$*, akkor*

$$L_{\mathbf{v}}(\mathbf{V}_1 \wedge \mathbf{V}_2) = L_{\mathbf{v}}(\mathbf{V}_1) \wedge \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_1 \wedge L_{\mathbf{v}}(\mathbf{V}_2).$$

(3) *Ha* $f \in \bigwedge^0(X)$ *és* $\mathbf{V} \in \bigwedge^m(X)$*, akkor*

$$L_{f\mathbf{v}}\mathbf{V} = df \wedge i_{\mathbf{v}}(\mathbf{V}) + f L_{\mathbf{v}}(\mathbf{V}).$$

(4) $L_{\mathbf{v}} \circ d = d \circ L_{\mathbf{v}}$.

7. Stokes tétel

A Stokes tétel a Newton-Leibniz formula általánosítása, ami a klasszikus analízisben $\mathbb{R}^n$-beli sokaságokra ismert. Ebben a fejezetben nem csak $\mathbb{R}^n$-be beágyazott, hanem általában sima sokaságokra bizonyítjuk be. Alkalmazásként az Euklideszi terekben jól ismert Green, Stokes és Gauss-Ostrogradsky tételeket is megkapjuk.

7.1. Peremes sokaságok.

Emlékeztetünk, hogy egy $(X, \mathcal{U})$ topologikus tér egy n-dimenziós peremes sokaság, ha az X tér T_2, M_2 és minden $x \in X$-nek létezik olyan környezete, ami homeomorf $\mathbb{R}^n$-el vagy az

$$\mathbb{R}^{n-1} \times [0, \infty) = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\}$$

zárt féltérrel. Ha egy $a \in X$-nek nincsen $\mathbb{R}^n$-el homeomorf környezete, akkor $a \in \partial X$.

Ha $U \subset \mathbb{R}^{n-1} \times [0,\infty)$ és $V \subset \mathbb{R}^{m-1} \times [0,\infty)$ relatív nyílt halmazok, akkor egy $\varphi\colon U \to V$ differenciálható leképezés egy olyan leképezés, amire minden $a \in U \cap \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$-ban valamilyen $\varphi'(a)$ mátrixra az $U-\{a\}$-n definiált $\frac{\varphi(x)-\varphi(a)-\varphi'(a)(x-a)}{|x-a|}$ tart 0-hoz ha x tart a-hoz. Ekkor léteznek az $\mathbb{R}^{n-1}\times\{0\}$-beli egyenesek mentén vett iránymenti deriváltjai φ-nek és az $\mathbb{R}^{n-1}\times[0,\infty)$-beli, peremmel nem párhuzamos, de perembe érkező félegyenesek mentén vett egyoldali iránymenti deriváltak is. Ilyenkor az a perempontban is van Jacobi mátrix, ami megegyezik $\varphi'(a)$-val.

Definíció 7.1 (Peremes sima sokaság). Legyen $n \geq 1$ és legyen X^n egy peremes sokaság. Tegyük fel, hogy $\partial X \neq \emptyset$. Ha $U \subset X$ egy $\mathbb{R}^n$-el vagy $\mathbb{R}^{n-1} \times [0,\infty)$-nel homeomorf nyílt halmaz és $a \in U$, akkor egy $\bar{x}\colon U \to \mathbb{R}^n$ homeomorfizmust egy a körüli térképnek nevezünk. Legyen $\mathcal{D}$ térképeknek egy halmaza. A $\mathcal{D}$ egy *sima* (vagy *differenciálható*) *struktúra* X-en, ha

(1) a $\mathcal{D}$-beli térképek értelmezési tartományai fedik X-et,
(2) minden $\bar{x},\bar{y} \in \mathcal{D}$ térképekre $\bar{y}\circ\bar{x}^{-1}$ egy diffeomorfizmus $\bar{x}(D_{\bar{x}}\cap D_{\bar{y}})$ és $\bar{y}(D_{\bar{x}}\cap D_{\bar{y}})$ között, és
(3) ha $\bar{x}$ egy olyan térkép, amire $\bar{y}\circ\bar{x}^{-1}$ diffeomorfizmus minden $\bar{y} \in \mathcal{D}$ esetén, akkor $\bar{x}$ is benne van $\mathcal{D}$-ben.

Ekkor az X egy *peremes sima* (vagy *differenciálható*) *sokaság* a $\mathcal{D}$ sima struktúrával.

Egy $a \in \partial X^n$ pontban is ugyanúgy létezik az n-dimenziós T_aX érintőtér, mint az X belső pontjaiban. Ezért a vektormezők és tenzormezők is ugyanúgy általánosíthatók. Ekkor ∂X egy $(n-1)$-dimenziós sima sokaság és a T_aX vektortérnek altere az a-beli $T_a\partial X$ érintőtér. Ha $\mathbf{v} \in \mathcal{V}(\partial X)$ egy vektormező és $i\colon \partial X \to X$ jelöli az identitás beágyazást, akkor $i_*\mathbf{v}$-vel jelöljük a $\mathcal{V}(X)$-beli

$$i_*\mathbf{v}_a = \partial i_a(\mathbf{v}_a)$$

vektormezőt. Ha pedig $\mathbf{V} \in \mathcal{V}^k(X)$ egy m-tenzormező, akkor az

$$i^*\mathbf{V}_a(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k) = \mathbf{V}_a(i_*\mathbf{v}_1,\ldots,i_*\mathbf{v}_k)$$

formulával definiált $i^*\mathbf{V}\colon \partial X \to \mathcal{L}^k$ leképezés egy $\mathcal{V}^k(\partial X)$-beli k-tenzormező.

Ha Ω egy n-forma által meghatározott irányítás az X^n peremes sokaságon, akkor az

$$i_{\mathbf{v}}(\Omega)$$

$(n-1)$-forma a ∂X-en meghatároz egy irányítást, ahol $\mathbf{v}$ olyan vektormező ∂X-en, ami X-nek lokális koordináta rendszerein keresztül $\lambda_n > 0$-val valamilyen $\sum_{i=1}^n \lambda_i\mathbf{e}_i$-nek felel meg. Ezt az $i_{\mathbf{v}}(\Omega)$-t az Ω által *indukált irányításnak* nevezzük, a $\mathbf{v}$ vektormezőt pedig befelé mutató normálmezőnek. Ha ω a térfogati forma az X Riemann sokaságon és $\mathbf{v} \in \mathcal{V}(\partial X)$ egy befelé mutató 1 hosszúságú normálmező, akkor definíció szerint

$$(-1)^{n-1}i_{\mathbf{v}}(\omega)$$

a térfogati forma ∂X-en. Ha $\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}$ ortonormált, $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1} \in T\partial X$, és $\omega(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{v}) = 1$, akkor

$$(-1)^{n-1} i_{\mathbf{v}}(\omega)(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}) = (-1)^{n-1}\omega(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}) = \omega(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{v}) = 1.$$

Tétel 7.2. *Legyen X egy irányított peremes Riemann sokaság és α egy differenciálható $(n-1)$-forma X-en, ami ∂X-en $L_1(\partial X)$-beli. Tegyük fel, hogy $d\alpha$ $L_1(X)$-beli. Ekkor*

$$\int_X d\alpha = (-1)^n \int_{\partial X} \alpha.$$

Ha $\partial X = \emptyset$, akkor

$$\int_X d\alpha = 0.$$

Bizonyítás. Hasonlítsuk össze $\int_X d\alpha$-t és $\int_{\partial X} \alpha$-t olyan $\bar{x} \colon U \to \mathbb{R}^n$ ortonormált térképeken keresztül, amikre teljesül, hogy valamilyen $A \subset U$ halmazra $\bar{x}(A)$ megegyezik a $[-a, a]^n$ n-dimenziós kockával valamilyen $a > 0$-ra. Feltehető, hogy ha $A \cap \partial X \neq \emptyset$, akkor $\bar{x}(A \cap \partial X) = [-a, a]^{n-1} \times \{-a\}$. Ilyen térképekkel fedhető X, és még az is feltehető, hogy az ilyen A halmazok belsejei is fedik X-et. Ekkor létezik megszámlálható sok A_k is, amiknek belsejei fedik X-et. Legyen $\{h_i \colon X \to [0,1] : i \in \mathbb{N}\}$ az $\mathrm{int} A_k$-knak alárendelt lokálisan véges egységosztás. Ekkor

$$h_i \alpha|_U = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_{n-1} \le n} \lambda_{i_1, \ldots, i_{n-1}} \, d\bar{x}_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{x}_{i_{n-1}} \tag{7.1}$$

valamilyen $\lambda_{i_1, \ldots, i_{n-1}} \colon U \to \mathbb{R}$ differenciálható függvényekre. Ebből

$$dh_i \alpha|_U = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_{n-1} \le n} d\lambda_{i_1, \ldots, i_{n-1}} \wedge d\bar{x}_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{x}_{i_{n-1}} =$$

$$\sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_{n-1} \le n} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda_{i_1, \ldots, i_{n-1}} \circ \bar{x}^{-1} \right) \circ \bar{x} \, d\bar{x}_j \right) \wedge d\bar{x}_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{x}_{i_{n-1}} =$$

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda_j \circ \bar{x}^{-1} \right) \circ \bar{x} \, d\bar{x}_1 \wedge \cdots \wedge d\bar{x}_n,$$

ahol λ_j jelöli azt a $\lambda_{i_1, \ldots, i_{n-1}}$-et, amire j nincsen $i_1, \ldots, i_{n-1}$ között, és az előjelek attól függnek, hogy páros vagy páratlan sok cserével lett $d\bar{x}_j \wedge d\bar{x}_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{x}_{i_{n-1}}$-ből

$d\bar{x}_1 \wedge \cdots \wedge d\bar{x}_n$. Például $d\bar{x}_n \wedge d\bar{x}_1 \wedge \cdots \wedge d\bar{x}_{n-1} = (-1)^{n-1} d\bar{x}_1 \wedge \cdots \wedge d\bar{x}_n$. Emiatt

$$\int_{A_{k(i)}} dh_i\alpha = \int_{A_{k(i)}} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda_j \circ \bar{x}^{-1}\right) \circ \bar{x} =$$

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \int_{A_{k(i)}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda_j \circ \bar{x}^{-1}\right) \circ \bar{x} =$$

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \int_{[-a_{k(i)}, a_{k(i)}]^n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda_j \circ \bar{x}^{-1}\right) d(x_1, \ldots, x_n).$$

Ha a j-dik változó szerint integrálunk legelőször és alkalmazzuk a Newton-Leibniz formulát, akkor

$$\int_{[-a_{k(i)}, a_{k(i)}]^n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda_j \circ \bar{x}^{-1}\right) d(x_1, \ldots, x_n) =$$

$$\int_{-a}^{a} \cdots \int_{-a}^{a} \lambda_j(\bar{x}^{-1}(x_1, \ldots, x_{j-1}, a, x_{j+1}, \ldots, x_n)) -$$

$$\lambda_j(\bar{x}^{-1}(x_1, \ldots, x_{j-1}, -a, x_{j+1}, \ldots, x_n)) dx_1 \cdots dx_{j-1} dx_{j+1} \cdots dx_n.$$

Ha $A_{k(i)} \cap \partial X = \emptyset$, akkor minden j-re $\lambda_j = 0$ az $A_{k(i)}$ peremén, mert h_i ott 0. Emiatt ilyenkor az azonosan 0 függvényt integráljuk, ezért

$$\int_{A_{k(i)}} dh_i\alpha = 0.$$

Ha $A_{k(i)} \cap \partial X \neq \emptyset$, akkor mivel $\bar{x}(A_{k(i)} \cap \partial X) = [-a, a]^{n-1} \times \{-a\}$, ezért $\lambda_j = 0$ az $A_{k(i)}$ peremén ha $j \neq n$. Ugyanakkor $\lambda_n = 0$ az $\bar{x}^{-1}([-a, a]^{n-1} \times \{a\})$ halmazon, de az $\bar{x}^{-1}([-a, a]^{n-1} \times \{-a\})$-n nem ismerjük λ_n-et. Ilyenkor

$$\int_{A_{k(i)}} dh_i\alpha = (-1)^{n-1}(-1) \int_{-a}^{a} \cdots \int_{-a}^{a} \lambda_n(\bar{x}^{-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}, -a)) dx_1 \cdots dx_{n-1}.$$

Mivel

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_X dh_i\alpha = \int_X \sum_{i=1}^{\infty} dh_i\alpha = \int_X d \sum_{i=1}^{\infty} h_i\alpha = \int_X d\alpha,$$

a kiszámított integrálok meghatározzák $\int_X d\alpha$-t. Az $\int_{\partial X} \alpha$ integrál kiszámításához ha $A_{k(i)} \cap \partial X = \emptyset$, akkor $h_i = 0$ a ∂X halmazon, ezért

$$\int_{\partial X} h_i\alpha = 0.$$

Ha $A_{k(i)} \cap \partial X \neq \emptyset$, akkor nézzük az $\bar{x}\colon U \to \mathbb{R}^n$ térkép megszorítását $U \cap \partial X$-re. A $\varphi\colon \partial X \to X$ identikus beágyazás megad egy $\varphi^* h_i\alpha$ formát ∂X-en, és az

$$\int_{A_{k(i)} \cap \partial X} \varphi^* h_i\alpha$$

integrált szeretnénk kiszámítani. A φ^*-ot alkalmazva

$$\varphi^* h_i\alpha|_U = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_{n-1}\le n} \lambda_{i_1,\dots,i_{n-1}}\, \varphi^* d\bar{x}_{i_1}\wedge\cdots\wedge\varphi^* d\bar{x}_{i_{n-1}} =$$

$$\lambda_{1,\dots,n-1}\varphi^* d\bar{x}_1\wedge\cdots\wedge\varphi^* d\bar{x}_{n-1},$$

mert $\varphi^* d\bar{x}_n = 0$ a $T\partial X$ érintőtéren. A duális 1-formák az indukált térképen a ∂X sokaságban $\varphi^* d\bar{x}_1,\dots,\varphi^* d\bar{x}_{n-1}$ és ez a sorrend adja ∂X irányítását mert a térfogati forma $U\cap\partial X$-en $(-1)^{n-1} i_{\mathbf{e}_n^{\bar{x}}}(\omega)$, ahol ω a térfogati forma X-en. Így

$$\int_{A_{k(i)}\cap\partial X}\varphi^* h_i\alpha = \int_{-a}^{a}\cdots\int_{-a}^{a}\lambda_n(\bar{x}^{-1}(x_1,\dots,x_{n-1},-a))dx_1\cdots dx_{n-1}.$$

Megint

$$\sum_{i=1}^{\infty}\int_{\partial X}\varphi^* h_i\alpha = \int_{\partial X}\sum_{i=1}^{\infty}\varphi^* h_i\alpha = \int_{\partial X}\varphi^*(\sum_{i=1}^{\infty} h_i\alpha) = \int_{\partial X}\varphi^*\alpha.$$

Végül

$$\int_X dh_i\alpha = 0 \qquad \text{és} \qquad \int_{\partial X} h_i\alpha = 0,$$

illetve

$$\int_X dh_i\alpha = (-1)^n\int_{-a}^{a}\cdots\int_{-a}^{a}\lambda_n(\bar{x}^{-1}(x_1,\dots,x_{n-1},-a))dx_1\cdots dx_{n-1}$$

és

$$\int_{\partial X}\varphi^* h_i\alpha = \int_{-a}^{a}\cdots\int_{-a}^{a}\lambda_n(\bar{x}^{-1}(x_1,\dots,x_{n-1},-a))dx_1\cdots dx_{n-1}.$$

Ezért

$$\int_X d\alpha = (-1)^n\int_{\partial X}\alpha.$$

□

Például ha X egy 2-dimenziós sokaság $\mathbb{R}^3$-ban, $\gamma\colon A\to X$ ennek egy paraméterezése az $A\subset\mathbb{R}^2$ kompakt körlap szerint és

$$\alpha = f_1dx_1 + f_2dx_2 + f_3dx_3$$

egy 1-forma $\mathbb{R}^3$-on, akkor

$$d\alpha = df_1\wedge dx_1 + df_2\wedge dx_2 + df_3\wedge dx_3 =$$
$$(\partial_2 f_3 - \partial_3 f_2)dx_2\wedge dx_3 + (\partial_3 f_1 - \partial_1 f_3)dx_3\wedge dx_1 + (\partial_1 f_2 - \partial_2 f_1)dx_1\wedge dx_2.$$

Ezért

$$\int_X d\alpha = \int_A \langle \mathrm{rot} f(\gamma(s,t)), \partial_s\gamma_1(s,t)\times\partial_t\gamma(s,t)\rangle d(s,t),$$

ahol

$$\mathrm{rot} f = ((\partial_2 f_3 - \partial_3 f_2), (\partial_3 f_1 - \partial_1 f_3), (\partial_1 f_2 - \partial_2 f_1)),$$

és X-en $\partial_s\gamma(s,t)$, $\partial_t\gamma(s,t)$ adja az irányítást. Ugyanakkor ha $\varrho\colon [a,b]\to\partial X$ egy paraméterezése ∂X-nek és $\varrho'(t)$ az indukált irányítását adja ∂X-nek, akkor

$$\int_{\partial X}\alpha=\int_a^b\langle(f_1(\varrho(t)),f_2(\varrho(t)),f_3(\varrho(t))),\varrho'(t)\rangle dt.$$

Feltesszük, hogy $\varrho'(t)$ és a belső normális ugyanazt az irányítást adja, mint $\partial_s\gamma(s,t)$, $\partial_t\gamma(s,t)$. Ekkor a Stokes tétel szerint

$$\int_A\langle\mathrm{rot}f(\gamma(s,t)),\partial_s\gamma_1(s,t)\times\partial_t\gamma(s,t)\rangle d(s,t)=$$
$$\int_a^b\langle(f_1(\varrho(t)),f_2(\varrho(t)),f_3(\varrho(t))),\varrho'(t)\rangle dt.$$

Ha γ olyan beágyazás, aminek a 3-dik koordináta függvénye azonosan 0, akkor speciális esetként megkapjuk a Green tételt.

A Gauss-Ostrogradsky formula bizonyításához legyen $\gamma\colon X\to\mathbb{R}^3$ a 3-dimenziós kompakt összefüggő X peremes sokaságnak egy beágyazása. Ha

$$\alpha=f_1dy\wedge dz+f_2dz\wedge dx+f_3dx\wedge dy$$

egy 2-forma $\mathbb{R}^3$-on, akkor

$$d\alpha=df_1\wedge dy\wedge dz+df_2\wedge dz\wedge dx+df_3\wedge dx\wedge dy=$$

$$\partial_1f_1dx\wedge dy\wedge dz+\partial_2f_2dy\wedge dz\wedge dx+\partial_3f_3dz\wedge dx\wedge dy=\sum_{k=1}^3\partial_kf_kdx\wedge dy\wedge dz.$$

Ekkor

$$\int_X d\alpha=\int_X\sum_{k=1}^3\partial_kf_kd(x,y,z).$$

Mivel $\mathbb{R}^3$-ban $\omega=dx\wedge dy\wedge dz$ a térfogati forma és ∂X-en az indukált térfogati forma definíció szerint $n=3$-ra $(-1)^{n-1}i_{\mathbf{v}}(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)$, ahol $\mathbf{v}$ egy belső normálisa ∂X-nek, ezért a ∂X peremen az irányítást úgy kapjuk, hogy az $\mathbb{R}^3$-beli standard bázis első két vektora ∂X érintővektorainak felel meg, és a harmadik bázis vektor pedig ∂X belső normálisának. Ha $\mathbf{v}_1$ és $\mathbf{v}_2$ a két ortonormált érintővektora ∂X-nek és $\mathbf{v}$ a belső normális, akkor

$$\int_{\partial X}\alpha=\int_{\partial X}\langle f,\mathbf{v}_1\times\mathbf{v}_2\rangle=\int_{\partial X}\langle f,\mathbf{v}\rangle.$$

A Stokes tétel szerint

$$\int_X\sum_{k=1}^3\partial_kf_kd(x,y,z)=-\int_{\partial X}\langle f,\mathbf{v}\rangle,$$

amiben ha $\mathbf{v}$ helyett az $\mathbf{n}$ külső normálist írjuk, akkor

$$\int_X\sum_{k=1}^3\partial_kf_kd(x,y,z)=\int_{\partial X}\langle f,\mathbf{n}\rangle.$$

Tartalomjegyzék