Polinom osztás – kiegészítő

A párhuzam kedvéért az egész számok körében a maradékos osztást a következőképp definiáljuk. Ha az f természetes számot elosztjuk egy g természetes számmal, akkor egy olyan q természetes számot kapunk maradékként, mely kisebb, mint f, illetve ha van, kapunk egy m maradékot, mely kisebb, mint g, és igaz rájuk, hogy $f = g \cdot q + m$. Az f osztható g-vel, ha a maradék 0.

Pl:

$$\begin{array}{l} 1534 : 6 = 255 \\ \quad 4 \end{array} \quad \text{hiszen } 1534 = 6 \cdot 255 + 4$$

Szintén a párhuzam kedvéért nézzük meg, hogy hogyan is végzünk el egy írásbeli osztást:

$$\begin{array}{l} \ \ 15'34 \ : 6 = 2\ldots \\ \underline{-(12)} \\ \quad 3 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \ \ 15'3'4 \quad : 6 = 25.. \\ \underline{-(12)} \\ \quad 33 \\ \ \underline{-(30)} \\ \quad\ 3 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \ \ 15'3'4' \quad : 6 = 255 \\ \underline{-(12)} \\ \quad 33 \\ \ \underline{-(30)} \\ \quad\ 34 \\ \ \ \underline{-(30)} \\ \quad\ \ 4 \end{array}$$

A polinomok körében – a természetes számokhoz hasonlóan – tudunk definiálni maradékos osztást. Ha az f polinomot elosztjuk a g polinommal, akkor egy olyan q polinomot kapunk eredményként, melynek fokszáma kisebb, mint az eredeti f polinomé, illetve (ha van) kapunk egy m maradék polinomot, melynek fokszáma kisebb, mint a g polinom fokszáma, és igaz rájuk, hogy $f = g \cdot q + m$. Azt mondjuk, hogy az f polinom osztható g-vel, ha a maradék 0.

Például $\begin{array}{c} (x^3 + x^2 - 5x + 4) : (x+3) = x^2 - 2x + 1 \\ 1 \end{array}$, hiszen $x^3 + x^2 - 5x + 4 = (x+3) \cdot (x^2 - 2x + 1) + 1$

Ugyanazzal a módszerrel, amivel a természetes számok körében az írásbeli osztást elvégezzük, a polinomok körében is el tudjuk végezni az osztást.

A feni osztás részletesen:

$$\overbrace{(x^3 + x^2 - 5x + 3)}^{osztandó} : \overbrace{(x+3)}^{osztó} = \overbrace{\ldots}^{hányados}$$

Először a hányados első tagját határozzuk meg az alapján, hogy az osztót, mivel kell megszorozni, hogy az osztandó első tagjával megfelelő fokszámú és együtthatójú polinomot kapjunk. Jelen pillanatban tehát az a kérdés, hogy milyen taggal kell megszoroznunk $(x+3)$-at, hogy a főegyütthatója x^3 legyen. Ez természetesen az x^2.

$$(x^3 + x^2 - 5x + 4) : (x+3) = x^2 + \cdots$$

Ez után „szorozzuk vissza", hogy lássuk, milyen maradékkal kell tovább számolnunk. (csak úgy, mint a „sima" írásbeli osztásnál a természetes számok körében.)

$$\begin{array}{l} (x^3 + x^2 - 5x + 4) : (x+3) = x^2 + \cdots \\ x^3 + 3x^2 \end{array}$$

A visszaszorzott elemet kell kivonnunk az eredeti polinom megfelelő elemeiből. Így kapjuk meg hogy az első lépésben mi a maradék.

$$\begin{array}{l} (x^3+x^2-5x+4) \quad : (x+3) = x^2+\cdots \\ \underline{-(x^3+3x^2)} \\ \quad -2\,x^2 \end{array}$$

Ezzel tehát el is jutottunk az első lépés végére. Az első lépés után a maradék tehát $-2x^2$. Ez után „hozzuk le”a következő tagot.

$$\begin{array}{l} (x^3+x^2-5x+4) \quad : (x+3) = x^2+\cdots \\ \underline{-(x^3+3x^2)} \downarrow \\ \quad -2x^2-5x \end{array}$$

Tehát a $-2x^2-5x$ –et kell osztanunk az $(x+3)$ -mal. Újfent figyeljünk csak a legnagyobb kitevőjű tagra. Tehát azt kell kitalálnunk, hogy mivel kell megszoroznunk az $(x+3)$ -at, ahhoz, hogy a főtag $-2x^2$ legyen. Ez természetesen a $-2x$.

$$\begin{array}{l} (x^3+x^2-5x+4) \quad : (x+3) = x^2-2x+\cdots \\ \underline{-(x^3+3x^2)} \\ \quad -2x^2-5x \end{array}$$

Újfent „szorozzuk vissza”ezt az $(x+3)$ –mal.

$$\begin{array}{l} (x^3+x^2-5x+4) \quad : (x+3) = x^2-2x+\cdots \\ \underline{-(x^3+3x^2)} \\ \quad -2x^2-5x \\ \quad -2x^2-6x \end{array}$$

Ezt kell kivonnunk az eredeti polinomból.

$$\begin{array}{l} (x^3+x^2-5x+4) \quad : (x+3) = x^2-2x+\cdots \\ \underline{-(x^3+3x^2)} \\ \quad -2x^2-5x \\ \quad \underline{-(-2x^2-6x)} \\ \qquad\qquad x \end{array}$$

Újfent „hozzuk le” a következő tagot.

$$\begin{array}{l} (x^3+x^2-5x+4) \quad : (x+3) = x^2-2x+\cdots \\ \underline{-(x^3+3x^2)} \\ \quad -2x^2-5x \\ \quad \underline{-(-2x^2-6x)} \downarrow \\ \qquad\qquad x+4 \end{array}$$

Megint az a feladat, hogy kitaláljuk, hogy az $(x+3)$ –at mivel kell megszoroznunk, hogy olyan polinomot kapjunk, melynek főtagja x legyen. Nyílván valóan ez az 1. Szorozzuk is gyorsan vissza, majd vonjuk is ki.

$$\begin{array}{l} (x^3+x^2-5x+4) \quad : (x+3) = x^2-2x+1 \\ \underline{-(x^3+3x^2)} \\ \quad -2x^2-5x \\ \quad \underline{-(-2x^2-6x)} \\ \qquad\qquad x+4 \\ \qquad\qquad \underline{x+3} \\ \qquad\qquad\quad 1 \end{array}$$

Tehát a hányadosunk x^2-2x+1 a maradék pedig 1.

Néhány példa, már nem ennyire részletesen kidolgozva:

$$
\begin{array}{l}
(2x^3+36x^2+214x+420)\ :(x+7)=2x^2+22x+60 \\
\underline{-(2x^3+14x^2)} \\
\qquad 22x^2+214x \\
\quad \underline{-(22x^2+154x)} \\
\qquad\qquad 60x+420 \\
\qquad\quad \underline{-(60x+420)} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$(2x^5-50x^2-30x^3-200x+200):(x+5)=?$ Figyeljünk mindig, hogy a polinomok a kitevők szerint csökkenő sorrendben legyenek, és ha valamelyik tag „hiányzik", akkor az osztásnál vegyük 0 együtthatóval.

$$
\begin{array}{l}
(2x^5+\ 0x^4-\ 30x^3+\ 50x^2\ -200x+200):(x+5)=2x^4-10x^3+20x^2-50x+50 \\
\underline{-(2x^5+10x^4)} \\
\qquad -10x^4-\ 30x^3 \\
\quad \underline{-(-10x^4-50x^3)} \\
\qquad\qquad 20x^3+\ 50x^2 \\
\qquad\quad \underline{-(20x^3+100x^2)} \\
\qquad\qquad\qquad -50x^2\ -200x \\
\qquad\qquad\quad \underline{-(-50x^2\ -250x)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 50x+200 \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{-(50x+250)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad -50
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
(2x^5+0x^4+3x^3-2x^2\ -x\ +1)\ :(x^2+x+2)=2x^3-2x^2+x+1 \\
\underline{-(2x^5+2x^4+4x^3)} \\
\qquad -2x^4-\ x^3-\ 2x^2 \\
\quad \underline{-(-2x^4-2x^3-4x^2)} \\
\qquad\qquad x^3\ +\ 2x^2-x \\
\qquad\quad \underline{-(x^3+x^2+2x)} \\
\qquad\qquad\qquad x^2-3x+1 \\
\qquad\qquad\quad \underline{-(x^2+\ x+2)} \\
\qquad\qquad\qquad\quad -4x-1
\end{array}
$$