

Matematika EP 1 - Feladatsor 3

Szeptember 25.

1. Legyenek $\underline{a}(4, 2, 5)$ és $\underline{b}(2, 0, -1)$. Mekkora $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok hossza? Mekkora szöget zárnak be? Adjuk meg $\underline{a}$ ellentettjét, illetve a vele megegyező irányú $1/2$ hosszú vektort! Adjunk meg egy $\underline{b}$ -re merőleges vektort!
2. Legyen $\underline{v}(3, -1, 2)$ és $\underline{a}(1, 1, -2)$. Adjuk meg a $\underline{v}$ vektor $\underline{a}$ irányába eső merőleges vetületét! Bontsuk fel $\underline{v}$ -t $\underline{a}$ -val párhuzamos és $\underline{a}$ -ra merőleges összetevőkre.
3. Legyenek $\underline{a}(1, -2, 5)$, $\underline{b}(4, 2, 3)$ és $\underline{c}(2, -4, 10)$. Végezzük el az alábbi műveleteket: $\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle$, $\langle \underline{a}, \underline{c} \rangle$, $\underline{a} \times \underline{b}$, $\underline{b} \times \underline{a}$, $\underline{a} \times \underline{c}$, $\langle \underline{c}, \underline{a} \times \underline{b} \rangle$.
4. Határozzuk meg az alábbi mátrixok determinánsát:

$$A = (5), \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}$$
$$E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 12 \end{pmatrix}.$$

5. Határozzuk meg az alábbi lineáris leképezések determinánsait:
 - a) Origó körüli 120° -os forgatás a síkon
 - b) A térben a z -tengely körüli 90° -os forgatás és az y -tengely irányában -2 -szeresre nagyítás
 - c) A térben az (x, y) -koordinátasíkra tükrözés, és az x - és z - tengelyek irányában 2 -szeresre, és 3 -szorosra nagyítás
 - d) A térben a z -tengely körüli 45° -os forgatás és az (y, z) -koordináta síkra vetítés.
6. Tekintsük az

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ p & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

mátrixot. A p paraméter mely értékére nem létezik A -nak inverze? Mennyi legyen p értéke, hogy az A determinánsa 1 legyen?

7. Írjuk fel a P ponton átmenő, $\underline{v}$ irányvektorú egyenes (paraméteres) egyenletrendszerét, ha a) $P(5, 0, 3)$, $\underline{v}(2, -1, 4)$ és b) $P(5, 3, 4)$, $\underline{v}(1, 2, 0)$.
8. Legyen $A(2, 5, 3)$ és $B(1, 0, 2)$ két pont, írjuk fel az A és B pontokon átmenő egyenes (paraméteres) egyenletrendszerét!
9. Legyen két egyenes:

$$e : \begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = 1 - 4t \\ z = 2t \end{cases}, \quad f : 3x + 6 = \frac{1}{2}y - 1 = -z$$

Adjuk meg e és f irányvektorait, illetve 1-1 pontjukat. Illeszkedik-e rájuk a $(-1, 2, -2)$ pont?

10. Milyen távol van az origótól a következő két egyenes metszéspontja?

$$e : \begin{cases} x = 3 - 5t \\ y = 2t - 1 \\ z = 3t - 2 \end{cases}, \quad f : \begin{cases} x = -t - 3 \\ y = 2 + t \\ z = -3 - 4t \end{cases}$$