

Matematika EP 1 - Feladatsor 6

Október 16.

1. Határozzuk meg az alábbi sorozatok határértékét!

$$a_n = \sqrt[n]{2n}, \quad b_n = \sqrt[2n]{n}, \quad c_n = \sqrt[n]{2n^3 + 3}, \quad d_n = \sqrt[n]{\frac{2n^2 + 3}{4n^2 + n}}, \quad e_n = \sqrt[n^2]{n}$$

2. Mivel egyenlőek a következő határértékek?

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{6n^2}\right)^{6n^2+2} &= ?, & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+5}{n-4}\right)^{n+3} &= ?, & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+2}{n^2+3}\right)^{n^2+7} &= ?, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{5n}\right)^{6n} &= ?, & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2-1}\right)^{\frac{n-1}{n+1}} &= ?, & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} &= ?, & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n+1}{7n+5}\right)^n &= ? \end{aligned}$$

3. Legyenek

$$f(x) = x + 2, \quad g(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}, \quad h(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}, & \text{ha } x \neq 1 \\ 4, & \text{ha } x = 1. \end{cases}$$

Határozzuk meg a határértékeiket az $x_0 = 1$ pontban! Hogyan tehetők folytonossá $g(x)$ az $x_0 = 1$ -ben?

4. Lássuk be definíció szerint a fenti $g(x)$ függvény határértékét $x_0 = 1$ -ben!
5. Határozzuk meg az alábbi határértékeket:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{8 - 2x^2}{x + 2}, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{6x + 1}{3 - 2x}, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 2x^3 - x^2 + 4x + 7, \quad \lim_{x \rightarrow \pm 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{(x^2 - 4)^2} \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt{3x^2 + 1} - 2x}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 3}) \end{aligned}$$

6. Határozzuk meg az alábbi határértékeket:

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \sin x, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sin x, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x^2}{\tan 3x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 9x^2}{x^2}$$

7. Hol és milyen szakadási vannak az alábbi függvényeknek?

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}, \quad g(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}, \quad h(x) = \frac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{x^2(x + 3)}$$

8. A p valós paraméter mely értékeire lesznek az alábbi függvények folytonosak?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x-\pi/2)}{2x-\pi}, & \text{ha } x > \pi/2 \\ \frac{p}{x-\pi}, & \text{ha } x \leq \pi/2 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{3x-3}, & \text{ha } x > 1 \\ px^2 - 1, & \text{ha } x \leq 1 \end{cases}$$