

Geometria 1

1 1. hét - 09.11

1. Legyen $ABCD$ paralelogramma és O egy tetszőleges pont. Bizonyítsuk be, hogy $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$!
2. Bizonyítsuk be, hogy ha egy tetraéder két szemközi élét elhagyjuk, akkor a maradék élek felezőpontjai paralelogrammát alkotnak!
3. Bizonyítsuk be, hogy egy négyszög középvonalainak a metszéspontja azonos az átlók felezőpontjait összekötő szakasz felezőpontjával!
4. Bizonyítsuk be, hogy egy paralelepipedon testátlóját harmadolja az a sík, amelyet a testátló egyik végpontjából kiinduló élek másik végpontjai határoznak meg!
5. Szerkesszünk a síkon ötszöget, ha adottak az oldalfelező pontjai!
6. Az ABC háromszög köré írt körének középpontja O . Mutassuk meg, hogy az $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ vektor az ABC háromszög magasságpontjába mutat!

2 2. hét - 09.18

1. Egy szabályos hatszög középpontja $K(4, 1, 4)$, két szomszédos csúcsa $A(3, 1, 5)$ és $B(3, 2, 4)$. Adjuk meg a többi négy csúcs koordinátáit!
2. Az adott $A(4, -1, 3)$ és $B(5, 4, 1)$ pontokhoz határozzuk meg $C(7, y, z)$ pont y és z koordinátáit úgy, hogy az A , B és C pontok egy egyenesen legyenek!
3.
 - i) Bizonyítsuk be, hogy az $A(7, 0, -1)$, $B(-2, 4, 0)$, $C(-5, 4, 2)$ és $D(4, 0, 1)$ pontok egy paralelogramma csúcsai!
 - ii) A $P(1, 3, -1)$ pontot tükrözzük az A -ra, majd a tükröképet a B -re, az így kapott pontot C -re, majd az így kapottat D -re. Mik a negyedik tükrökép koordinátái?
4. Adottak az $\underline{a}(2, -1, 1)$, $\underline{b}(-1, 3, 0)$ és $\underline{c}(1, 0, 7)$ vektorok. Bonstuk fel a $\underline{d}(9, -9, 10)$ vektort $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ irányú összetevőkre!

5. Lineárisan független-e az alábbi három vektor:

i) $\underline{a}(-2, 3); \underline{b}(4, 1)?$

ii) $\underline{a}(-4, 2, 1); \underline{b}(0, 4, 3); \underline{c}(-4, 6, 4)?$

6. Egy szabályos tetraéder egyik csúcsából induló egyik élvektor $\underline{a}$, ebből a csúcsból a szemközti lap súlypontjába mutató vektor $\underline{s}$. Számítsuk ki az $\underline{a} \cdot \underline{s}$ skaláris szorzat értékét, ha a tetraéder élhossza 1!

7. Az $ABCD$ téglalap csúcsait kössük össze egy tetszőleges P ponttal! Bizonyítsuk be, hogy $PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$!

8. Az ABC és az $A'B'C'$ háromszögek olyan helyzetűek, hogy az A, B, C csúcsokból rendre a $B'C', C'A', A'B'$ egyenesekre állított merőlegesek egy ponton mennek át. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az A', B', C' csúcsokból rendre a BC, CA, AB egyenesekre állított merőlegesek szintén egy ponton mennek át!

9. A z -tengely melyik pontjából látszik az $A(1, 0, 0), B(0, 1, 0)$ pontpár 30° -os szög alatt?

10. Egy rombusz $A(2, 0, 1)$ csúcsából induló egyik oldalvektor $\underline{b}(0, 3, 6)$. A $\underline{v}(8, -4, 8)$ vektor egyirányú az A -ból induló rombuszátlóval. Adjuk meg a rombusz csúcsainak koordinátáit!

3 3.hét - 09.25

1. Az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ vektorokra fennállnak az $\underline{a} \times \underline{b} = \underline{c} \times \underline{d}$ és $\underline{a} \times \underline{c} = \underline{b} \times \underline{d}$ azonosságok. Bizonyítsuk be, hogy $\underline{a} - \underline{d}$ és $\underline{b} - \underline{c}$ vektorok párhuzamosak!

2. Az $\underline{a}, \underline{b}$ és $\underline{c}$ egy sík három nem egy egyenesre eső pontjainak helyvektorai. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi vektor a sík egy normálvektora:

$$\underline{a} \times \underline{b} + \underline{b} \times \underline{c} + \underline{c} \times \underline{a}.$$

3. Egy egyenes B és C pontjainak helyvektorai $\underline{b}$ és $\underline{c}$, míg az egyenesen kívüli A ponté $\underline{a}$. Bizonyítsuk be, hogy az A pont távolsága a BC egyenestől:

$$\frac{|\underline{a} \times \underline{b} + \underline{b} \times \underline{c} + \underline{c} \times \underline{a}|}{|\underline{b} - \underline{c}|}.$$

4. Számítsuk ki az ABC háromszög területét, ha a csúcsok

a) $A(1, 0, 2), B(4, 3, 8), C(0, -4, 6),$

b) $A(4, -1, -3), B(3, 1, -2), C(1, 5, 0).$

5. Számítsuk ki az ABC háromszög B csúcshoz tartozó magasságának a hosszát, ha a csúcsok koordinátái: $A(1, -1, 2), B(5, -6, 2), C(1, 3, -1)$!

4 4.hét - 10.02

1. Számítsuk ki az $ABCD$ tetraéder térfogatát, ahol $A(2, -1, 1)$, $B(5, 5, 4)$, $C(3, 2, -1)$, $D(4, 1, 3)$.
2. Válasszuk meg z értékét úgy, hogy az $\underline{a}(4, -1, 2)$, $\underline{b}(1, 2, 3)$ és $\underline{c}(3, 3, z)$ vektorok egy síkba essenek.
3. Az $ABCD$ tetraéder csúcspontjai $A(-4, 1, 5)$, $B(2, 0, 2)$, $C(-1, 0, 3)$ és $D(x, 9, -2)$. A D csúcsához tartozó magassága $6\sqrt{3}$. Adjuk meg x értékét, ha az $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ élvektorok ebben a sorrendben balrendszert alkotnak!
4. Egy paralelepipedon egy csúcsából kiinduló lapátlói által feszített paralelepipedon térfogata hogyan aránylik az eredeti térfogatához?
5. (Lagrange azonosság) Mutassuk meg, hogy tetszőleges $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$ vektorokra

$$(\underline{a} \times \underline{b})(\underline{c} \times \underline{d}) = \begin{vmatrix} \underline{ac} & \underline{bc} \\ \underline{ad} & \underline{bd} \end{vmatrix}$$

6. (Jacobi azonosság) Mutassuk meg, hogy tetszőleges $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorokra

$$(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{c} + (\underline{b} \times \underline{c}) \times \underline{a} + (\underline{c} \times \underline{a}) \times \underline{b} = 0$$

7. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$ vektorokra

$$(\underline{a} \times \underline{b}) \times (\underline{c} \times \underline{d}) = (\underline{cda})\underline{b} - (\underline{cdb})\underline{a}$$

8. Mekkora az $A(2, 3, 1)$, $B(4, 1, -2)$, $C(6, 3, 7)$ és $D(-5, -4, 8)$ csúcsokkal rendelkező tetraéder D -hez tartozó magassága?
9. a) Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a $P(-2, 5, 6)$ és a $Q(7, -1, 3)$ pontokon!
b) Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely illeszkedik az $A(1, 1, 2)$, $B(-1, 4, 2)$ és a $C(2, -1, -3)$ pontokra!

5 5.hét - 10.09

1. Számítsuk ki az alábbi párhuzamos síkpár távolságát: $2x - 3y + 6z - 14 = 0$, és $4x - 6y + 12z + 21 = 0$.
2. Mekkora szöget zárnak be egymással az $ABCD$ tetraéder ABC és ACD lapjai, ha a csúcsok koordinátái: $A(2, 3, 1)$, $B(4, 1, -2)$, $C(6, 3, 7)$, $D(-5, -4, 8)$?

3. Határozzuk meg az $S : 3x + y - 5z = 12$ sík és az

$$e : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 4 + t \\ z = 2 \end{cases}$$

egyenes metszéspontját! Mennyi a sík és az egyenes hajlásszöge? Mi lesz annak az egyenesnek az egyenlete, ami az S síkban van, és merőleges e -re?

4. Határozzuk meg az $x + 3y - 2z + 2 = 0$ sík és a vele párhuzamos $\frac{x-1}{4} = \frac{y+3}{2} = \frac{-z-1}{5}$ egyenes távolságát!
5. Milyen távol van az origótól a következő két egyenes metszéspontja?

$$e : \begin{cases} x = 3 - 5t \\ y = 2t - 1 \\ z = 3t - 2 \end{cases}, \quad f : \begin{cases} x = -t - 3 \\ y = 2 + t \\ z = -3 - 4t \end{cases}$$

6. Adottak az $e : \frac{x+1}{3} = \frac{13-y}{12} = \frac{z+9}{11}$ és az $f : \frac{x-9}{6} = \frac{y-7}{3} = \frac{z}{-5}$ egyenesek. Határozzuk meg a normáltranszverzális egyenesüket, és a távolságukat. Továbbá határozzuk meg a $\underline{v}(1, -6, 2)$ iránnyal párhuzamos transzverzális egyenesüket! Milyen alakzat lesz a térben a két egyenes pontjait összekötő összes lehetséges szakaszok felezőpontjainak mértani helye?
7. Adjuk meg annak az egyenesnek az egyenletrendszerét, amely átmegy az $A(-1, 2, -3)$ ponton, merőleges a $\underline{d}(6, -2, -3)$ vektorra, és metszi az $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-5}$ egyenest!

6 6.hét - 10.16

- Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely egyenlő távolságra van a $P(5, -8, 7)$ ponttól és az $2x - 9y + 5z = 6$ síktól!
- Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely tartalmazza az $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-2}{2}$ egyenest és merőleges a $3x + 2y - z - 5 = 0$ síkra!
- Egy szabályos tetraéder egyik magasságegyenesének egyenletrendszere: $x = 4 + t$, $y = 4 + t$, $z = 4 + t$, egyik csúcsa pedig $A(-3, 12, 4)$. Határozzuk meg a tetraéder további csúcsainak koordinátáit!
- Az $ABCD$ rombusz benne van az $5x + 8y + 11z = 0$ síkban. Két (nem szomszédos) csúcsának koordinátái $A(8, -5, 0)$ és $C(-2, y, 6)$, továbbá a BD átló hossza $4\sqrt{6}$. Határozzuk meg B és D csúcsok koordinátáit!
- Az ABC gömbháromszög oldalai legyenek $a = \frac{\pi}{4}$, $b = \frac{\pi}{3}$, $c = \frac{\pi}{6}$. Jelölje az A csúccsal szemközti oldal felezőpontját A_1 , és hasonlóan B_1 , C_1 a másik két oldal felezőpontjait. Határozzuk meg az A_1B_1 , B_1C_1 , C_1A_1 gömbi középvonalak hosszait, valamint az AA_1 gömbi súlyvonalszakasz hosszát!

6. Határozzuk meg a gömbháromszög hiányzó adatait, ha tudjuk, hogy
 - a) $\alpha = 45^0$, $\beta = 120^0$, $\gamma = 45^0$.
 - b) $a = 75^0$, $b = 60^0$, $\gamma = 45^0$.
 - c) $\alpha = 120^0$, $\beta = 60^0$, $c = 135^0$.
7. Az egységgömb középpontjából kiinduló $\underline{a}(3, -1, 2)$, $\underline{b}(6, 4, 3)$ és $\underline{c}(1, 4, 2)$ vektorok kidöfik egy gömbháromszög csúcsait. Határozzuk meg a gömbháromszög adatait!

7 7.hét - 10.23 - Szünet

8 8.hét - 10.30

1. Számítsuk ki a gömbháromszög hiányzó oldalát és szögeit, ha $a = 150^0$, $b = 60^0$, $\alpha = 150^0$. Határozzuk meg a háromszög beírt és körülírt körének sugarát!
2. Az ABC gömbháromszög oldalai legyenek $a = \frac{\pi}{4}$, $b = \frac{\pi}{3}$, $c = \frac{\pi}{6}$. Jelölje M az A csúcs szemközti oldalra vett merőleges vetületét. Határozzuk meg az AM gömbi magasságszakasz hosszát!
3. Igaz marad-e gömbi geometriában, hogy a háromszög súlyvonalai egy ponton mennek át, és harmadolják egymást?
4. Igaz marad-e gömbi geometriában, hogy a háromszög magasságegyenesei egy ponton mennek át?
5. Az egységnyi területű szabályos gömbi négyszögnek mind a négy csúcsa köré kört rajzolunk, melyeknek sugara a gömbi négyszög oldalának a fele. Mekkora lesz a négyzet körökön kívül eső részének a területe?
6. Hány darab egybevágó gömbi négyszeggel lehet átfedés nélkül lefedni a gömb felszínét?
7. Legyen az ABC gömbháromszögben $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\beta = \frac{\pi}{3}$, $\gamma = \frac{\pi}{2}$. Keressük annak a körnek a sugarát, amelynek középpontja a BC íven van, és érinti AB illetve AC oldalakat.

9 9.hét - 11.06

1. Adottak két város koordinátái: K.h. 19^0 , É.sz. $47^030'$ (Budapest), illetve Ny.h. $73^030'$, É.sz. $40^015'$ (New York). Határozzuk meg a két város távolságát légvonalban, illetve az őket légvonalban összekötő útvonal legészakibb pontját! A Föld sugarát vegyük 6380 km-nek.

2. Adottak három város koordinátái: K.h. $37^{\circ}30'$, É.sz. $55^{\circ}45'$ (Moszkva), Ny.h. $43^{\circ}15'$, D.sz. 23° (Rio), K.h. $2^{\circ}30'$, É.sz. 49° (Párizs). Mekkora az általuk meghatározott gömbháromszög kerülete, területe? Melyik a gömbháromszög kerületének legészakibb és legdélibb pontja?
3. Mi az alábbi síkbeli alakzatok szimmetriacsoportja?
 - a) Szabályos háromszög
 - b) "A" betű
 - c) "H" betű
4. a) Mutassuk meg, hogy három párhuzamos tengelyre vett tengelyes tükrözés szorzata tengelyes tükrözés!
 b) Mutassuk meg, hogy három egy ponton átmenő tengelyre vett tengelyes tükrözés szorzata tengelyes tükrözés!
5. Mutassuk meg, hogy három általános helyzetű tengelyre vett tengelyes tükrözés szorzata csúsztatva tükrözés!
6. Mutassuk meg, hogy egy párhuzamos tengelypárra és egy őket metsző tengelyre vett tengelyes tükrözések szorzata csúsztatva tükrözés!
7. Mutassuk meg, hogy minden síkbeli egybevágóság az alábbiak valamelyike:
 - irányítás tartóak: identitás, eltolás, forgatás
 - irányítás váltóak: tengelyes tükrözés, csúsztatva tükrözés

10 10.hét - 11.13

1. Adottak a síkon O_1 és O_2 különböző pontok. Mi lesz az O_1O_2 egyenesre tükrözés, és az O_1 pontra tükrözések szorzata?
2. Milyen egybevágóság lesz két merőleges tengelyű csúsztatva tükrözés szorzata?
3. i) Mutassuk meg, hogy két különböző pont körüli α illetve β szögű forgatások szorzata egy $\alpha + \beta$ szögű forgatás (tegyük fel, hogy $\alpha + \beta \neq 0$, és $0 \leq \alpha, \beta \leq \pi$)!
 ii) Szerkesszük meg az O pont körüli 60° -os és az O' körüli -120° -os forgatások szorzatának a középpontját!
4. Tegyük fel, hogy O_1 , O_2 és O_3 a síkon egy generikus háromszöget határoznak meg. Tekintsük az O_1 körüli 30° -os, O_2 körüli -90° -os és az O_3 körüli -45° -os forgatásokat. Szerkesszük meg a forgatások egymásutánjaként keletkező transzformáció (forgatás) középpontját, illetve az $O_1O_2O_3$ háromszög transzformáció általi $O'_1O'_2O'_3$ képét. Mit mondhatunk az $O_1O'_1$, $O_2O'_2$, $O_3O'_3$ szakaszok felezőpontjai által meghatározott háromszögről?

5. Legyen ABC tetszőleges hegyesszögű háromszög. Legyen $\mathbf{T}$ az a transzformáció, amelyet az AC , AB majd BC egyenesekre való tükrözések ebben a sorrendben történő végrehajtása határoz meg. Jelöljük O -val ABC háromszög köréírt körének középpontját, valamint az oldalak felezéspontjait jelölje rendre A_1 , B_1 , és C_1 .
 - i) Igazoljuk, hogy $\mathbf{T}(O)\mathbf{T}(C_1)$ egyenes merőleges AB egyenesre!
 - ii) Igazoljuk, hogy $O\mathbf{T}^{2023}(O)$, $A\mathbf{T}^{2025}(A)$ és $B_1\mathbf{T}^{2027}(B_1)$ szakaszok felezőpontjai egy egyenesre illeszkednek!
 - iii) Mutassuk meg, hogy $O\mathbf{T}^{1000}(O)$ egyenes párhuzamos $A_1\mathbf{T}^{100}(A_1)$ egyenessel!
6. Határozzuk meg egy adott hegyesszögű háromszögbe írható legkisebb kerületű háromszöget (a háromszög mindegyik oldaláról választunk egy belső pontot)! Mit kapunk, ha a háromszög tompaszögű?
7. Szerkesszük meg egy háromszög izogonális (avagy Fermat-Toricelli) pontját, azaz a háromszög azon belső pontját, amelynek a háromszög csúseitől mért távolságösszege minimális!
8. Adott a síkon egy P pont és egy párhuzamos egyenespár(e és f), illetve egy d távolság. Szerkesszük meg azt az egyenest P -n keresztül, amelyre teljesül, hogy e -vel és f -el vett metszéspontjainak P -től vett távolságösszege d !
9. Adott egy AB szakasz és egy d távolság. Szerkesszünk az AB szakasz felezőpontján át egyenest úgy, hogy AB szakasz vetülete az egyenesre d hosszúságú legyen!
10. Szerkesszünk négyszöget, ha adott két átlójának hossza, az átlók által bezárt szög, és a négyszög két szemközti szöge!
11. Egy ABC háromszög BC és AC oldalaira kifelé rajzoljunk BEC és CDA egyenlő szárú derékszögű háromszögeket úgy, hogy E -nél és D -nél legyenek a derékszögek. Legyen F az AB oldal felezőpontja. Mutassuk meg, hogy EDF egyenlő szárú derékszögű háromszög!
12. ABC háromszög BC és CA oldalaira kifelé rajzoljunk $BRSC$ és $CPQA$ négyzeteket. Mutassuk meg, hogy AR és BQ szakaszok az ABC háromszög C -hez tartozó magasságegyenesén metszik egymást!

11 11.hét - 11.20

1. Bizonyítsuk be az Euler-féle konvex poliédertételt a gömbi geometria eszközeivel!
2. Jelölje egy konvex poliéder lapjainak a számát l , éleinek a számát e , csúcsainak a számát c . Mutassuk meg, hogy

- a) $e \leq 3c - 6$.
- b) ha a poliédernek nincs háromszög lapja, akkor $e \leq 2c - 4$.
- 3. Mutassuk meg, hogy öt darab szabályos test létezik! Számoljuk ki az éleik, lapjaik, csúcsaik számát!
- 4. Számítsuk ki a csonkított tetraéder félig szabályos test lapszögeit!
- 5. Vetítsük ki a dodekaédert a köré írt gömbjére. Számítsuk ki az így keletkező gömbi mozaik gömbi ötszögeinek köré és beírt köreinek sugarait!
- 6. Létezik-e olyan egyszerű poliéder, amelynek lapjainak élszáma mind különböző?
- 7. Van-e olyan, a kockától különböző konvex egyszerű poliéder, amelynek ugyanannyi lapja, éle és csúcsa van mint a kockának, de nincs négyszöglapja?

12 12.hét - 11.27

- 1. Bizonyítsuk be, hogy ha egy kollineáció alatt egy egyenesnek két különböző pontja fixpont, akkor az egyenes fixegyenes!
- 2. Bizonyítsuk be, hogy ha egy kollineáció alatt két egyenes fixegyenes, akkor a metszéspontjuk fixpont!
- 3. Bizonyítsuk be, hogy ha egy kollineációnak van tengelye, és a tengelyen kívül egy fixpontja, akkor ez a pont centrum!
- 4. Bizonyítsuk be, hogy egy kollineáció pontosan akkor centrális, ha axiális!
- 5. Bizonyítsuk be, hogy a gyufásdoboz modellben a képsík és az alapsík beforgatottja között centrális axiális kollineáció lép fel, amelynek tengelye a képsík tengely, centruma pedig a szem-pont beforgatottja!
- 6. Szerkesszük meg egy adott négyzet képét egy adott vetítőrendszerben a gyufásdoboz modellben!
- 7. Mutassuk meg, hogy bármely konvex négyszög (amelynek van nem párhuzamos oldalpárja) előáll tetszőleges oldalhosszúságú négyzet képeként valamely megfelelő vetítőrendszerben a gyufásdoboz modellben!
- 8. Szerkesszük meg ABC háromszög képét a gyufásdoboz modellben egy olyan vetítőrendszerben, hogy C csúcs a képsík tengely és a látóhatár között helyezkedik el, illetve C csúcs távolsága a képsík tengelytől nagyobb mint a szem-pont távolsága a látóhatártól.