

Geometria 1

1 1. hét - 09.11

1. Legyen $ABCD$ paralelogramma és O egy tetszőleges pont. Bizonyítsuk be, hogy $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$!
2. Bizonyítsuk be, hogy ha egy tetraéder két szemközi élét elhagyjuk, akkor a maradék élek felezőpontjai paralelogrammát alkotnak!
3. Bizonyítsuk be, hogy egy négyszög középvonalainak a metszéspontja azonos az átlók felezőpontjait összekötő szakasz felezőpontjával!
4. Bizonyítsuk be, hogy egy paralelepipedon testátlóját harmadolja az a sík, amelyet a testátló egyik végpontjából kiinduló élek másik végpontjai határoznak meg!
5. Szerkesszünk a síkon ötszöget, ha adottak az oldalfelező pontjai!
6. Az ABC háromszög köré írt körének középpontja O . Mutassuk meg, hogy az $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ vektor az ABC háromszög magasságpontjába mutat!

2 2. hét - 09.18

1. Egy szabályos hatszög középpontja $K(4, 1, 4)$, két szomszédos csúcsa $A(3, 1, 5)$ és $B(3, 2, 4)$. Adjuk meg a többi négy csúcs koordinátáit!
2. Az adott $A(4, -1, 3)$ és $B(5, 4, 1)$ pontokhoz határozzuk meg $C(7, y, z)$ pont y és z koordinátáit úgy, hogy az A , B és C pontok egy egyenesen legyenek!
3.
 - i) Bizonyítsuk be, hogy az $A(7, 0, -1)$, $B(-2, 4, 0)$, $C(-5, 4, 2)$ és $D(4, 0, 1)$ pontok egy paralelogramma csúcsai!
 - ii) A $P(1, 3, -1)$ pontot tükrözzük az A -ra, majd a tükröképet a B -re, az így kapott pontot C -re, majd az így kapottat D -re. Mik a negyedik tükrökép koordinátái?
4. Adottak az $\underline{a}(2, -1, 1)$, $\underline{b}(-1, 3, 0)$ és $\underline{c}(1, 0, 7)$ vektorok. Bonstuk fel a $\underline{d}(9, -9, 10)$ vektort $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ irányú összetevőkre!

5. Lineárisan független-e az alábbi három vektor:

i) $\underline{a}(-2, 3); \underline{b}(4, 1)?$

ii) $\underline{a}(-4, 2, 1); \underline{b}(0, 4, 3); \underline{c}(-4, 6, 4)?$

6. Egy szabályos tetraéder egyik csúcsából induló egyik élvektor $\underline{a}$, ebből a csúcsból a szemközti lap súlypontjába mutató vektor $\underline{s}$. Számítsuk ki az $\underline{a} \cdot \underline{s}$ skaláris szorzat értékét, ha a tetraéder élhossza 1!

7. Az $ABCD$ téglalap csúcsait kössük össze egy tetszőleges P ponttal! Bizonyítsuk be, hogy $PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$!

8. Az ABC és az $A'B'C'$ háromszögek olyan helyzetűek, hogy az A, B, C csúcsokból rendre a $B'C', C'A', A'B'$ egyenesekre állított merőlegesek egy ponton mennek át. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az A', B', C' csúcsokból rendre a BC, CA, AB egyenesekre állított merőlegesek szintén egy ponton mennek át!

9. A z -tengely melyik pontjából látszik az $A(1, 0, 0), B(0, 1, 0)$ pontpár 30° -os szög alatt?

10. Egy rombusz $A(2, 0, 1)$ csúcsából induló egyik oldalvektor $\underline{b}(0, 3, 6)$. A $\underline{v}(8, -4, 8)$ vektor egyirányú az A -ból induló rombuszátlóval. Adjuk meg a rombusz csúcsainak koordinátáit!

3 3.hét - 09.25

1. Az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ vektorokra fennállnak az $\underline{a} \times \underline{b} = \underline{c} \times \underline{d}$ és $\underline{a} \times \underline{c} = \underline{b} \times \underline{d}$ azonosságok. Bizonyítsuk be, hogy $\underline{a} - \underline{d}$ és $\underline{b} - \underline{c}$ vektorok párhuzamosak!

2. Az $\underline{a}, \underline{b}$ és $\underline{c}$ egy sík három nem egy egyenesre eső pontjainak helyvektorai. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi vektor a sík egy normálvektora:

$$\underline{a} \times \underline{b} + \underline{b} \times \underline{c} + \underline{c} \times \underline{a}.$$

3. Egy egyenes B és C pontjainak helyvektorai $\underline{b}$ és $\underline{c}$, míg az egyenesen kívüli A ponté $\underline{a}$. Bizonyítsuk be, hogy az A pont távolsága a BC egyenestől:

$$\frac{|\underline{a} \times \underline{b} + \underline{b} \times \underline{c} + \underline{c} \times \underline{a}|}{|\underline{b} - \underline{c}|}.$$

4. Számítsuk ki az ABC háromszög területét, ha a csúcsok

a) $A(1, 0, 2), B(4, 3, 8), C(0, -4, 6),$

b) $A(4, -1, -3), B(3, 1, -2), C(1, 5, 0).$

5. Számítsuk ki az ABC háromszög B csúcshoz tartozó magasságának a hosszát, ha a csúcsok koordinátái: $A(1, -1, 2), B(5, -6, 2), C(1, 3, -1)$!

4 4.hét - 10.02

1. Számítsuk ki az $ABCD$ tetraéder térfogatát, ahol $A(2, -1, 1)$, $B(5, 5, 4)$, $C(3, 2, -1)$, $D(4, 1, 3)$.
2. Válasszuk meg z értékét úgy, hogy az $\underline{a}(4, -1, 2)$, $\underline{b}(1, 2, 3)$ és $\underline{c}(3, 3, z)$ vektorok egy síkba essenek.
3. Az $ABCD$ tetraéder csúcspontjai $A(-4, 1, 5)$, $B(2, 0, 2)$, $C(-1, 0, 3)$ és $D(x, 9, -2)$. A D csúcsához tartozó magassága $6\sqrt{3}$. Adjuk meg x értékét, ha az $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ élvektorok ebben a sorrendben balrendszert alkotnak!
4. Egy paralelepipedon egy csúcsából kiinduló lapátlói által feszített paralelepipedon térfogata hogyan aránylik az eredeti térfogatához?
5. (Lagrange azonosság) Mutassuk meg, hogy tetszőleges $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$ vektorokra

$$(\underline{a} \times \underline{b})(\underline{c} \times \underline{d}) = \begin{vmatrix} \underline{ac} & \underline{bc} \\ \underline{ad} & \underline{bd} \end{vmatrix}$$

6. (Jacobi azonosság) Mutassuk meg, hogy tetszőleges $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorokra

$$(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{c} + (\underline{b} \times \underline{c}) \times \underline{a} + (\underline{c} \times \underline{a}) \times \underline{b} = 0$$

7. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$ vektorokra

$$(\underline{a} \times \underline{b}) \times (\underline{c} \times \underline{d}) = (\underline{cda})\underline{b} - (\underline{cdb})\underline{a}$$

8. Mekkora az $A(2, 3, 1)$, $B(4, 1, -2)$, $C(6, 3, 7)$ és $D(-5, -4, 8)$ csúcsokkal rendelkező tetraéder D -hez tartozó magassága?
9. a) Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a $P(-2, 5, 6)$ és a $Q(7, -1, 3)$ pontokon!
b) Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely illeszkedik az $A(1, 1, 2)$, $B(-1, 4, 2)$ és a $C(2, -1, -3)$ pontokra!

5 5.hét - 10.09

1. Számítsuk ki az alábbi párhuzamos síkpár távolságát: $2x - 3y + 6z - 14 = 0$, és $4x - 6y + 12z + 21 = 0$.
2. Mekkora szöget zárnak be egymással az $ABCD$ tetraéder ABC és ACD lapjai, ha a csúcsok koordinátái: $A(2, 3, 1)$, $B(4, 1, -2)$, $C(6, 3, 7)$, $D(-5, -4, 8)$?

3. Határozzuk meg az $S : 3x + y - 5z = 12$ sík és az

$$e : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 4 + t \\ z = 2 \end{cases}$$

egyenes metszéspontját! Mennyi a sík és az egyenes hajlásszöge? Mi lesz annak az egyenesnek az egyenlete, ami az S síkban van, és merőleges e -re?

4. Határozzuk meg az $x + 3y - 2z + 2 = 0$ sík és a vele párhuzamos $\frac{x-1}{4} = \frac{y+3}{2} = \frac{-z-1}{5}$ egyenes távolságát!
5. Milyen távol van az origótól a következő két egyenes metszéspontja?

$$e : \begin{cases} x = 3 - 5t \\ y = 2t - 1 \\ z = 3t - 2 \end{cases}, \quad f : \begin{cases} x = -t - 3 \\ y = 2 + t \\ z = -3 - 4t \end{cases}$$

6. Adottak az $e : \frac{x+1}{3} = \frac{13-y}{12} = \frac{z+9}{11}$ és az $f : \frac{x-9}{6} = \frac{y-7}{3} = \frac{z}{-5}$ egyenesek. Határozzuk meg a normáltranszverzális egyenesüket, és a távolságukat. Továbbá határozzuk meg a $\underline{v}(1, -6, 2)$ iránnyal párhuzamos transzverzális egyenesüket! Milyen alakzat lesz a térben a két egyenes pontjait összekötő összes lehetséges szakaszok felezőpontjainak mértani helye?
7. Adjuk meg annak az egyenesnek az egyenletrendszerét, amely átmegy az $A(-1, 2, -3)$ ponton, merőleges a $\underline{d}(6, -2, -3)$ vektorra, és metszi az $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-5}$ egyenest!

6 6.hét - 10.16

- Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely egyenlő távolságra van a $P(5, -8, 7)$ ponttól és az $2x - 9y + 5z = 6$ síktól!
- Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely tartalmazza az $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-2}{2}$ egyenest és merőleges a $3x + 2y - z - 5 = 0$ síkra!
- Egy szabályos tetraéder egyik magasságegyenesének egyenletrendszere: $x = 4 + t$, $y = 4 + t$, $z = 4 + t$, egyik csúcsa pedig $A(-3, 12, 4)$. Határozzuk meg a tetraéder további csúcsainak koordinátáit!
- Az $ABCD$ rombusz benne van az $5x + 8y + 11z = 0$ síkban. Két (nem szomszédos) csúcsának koordinátái $A(8, -5, 0)$ és $C(-2, y, 6)$, továbbá a BD átló hossza $4\sqrt{6}$. Határozzuk meg B és D csúcsok koordinátáit!
- Az ABC gömbháromszög oldalai legyenek $a = \frac{\pi}{4}$, $b = \frac{\pi}{3}$, $c = \frac{\pi}{6}$. Jelölje az A csúccsal szemközti oldal felezőpontját A_1 , és hasonlóan B_1 , C_1 a másik két oldal felezőpontjait. Határozzuk meg az A_1B_1 , B_1C_1 , C_1A_1 gömbi középvonalak hosszait, valamint az AA_1 gömbi súlyvonalszakasz hosszát!

6. Határozzuk meg a gömbháromszög hiányzó adatait, ha tudjuk, hogy
 - a) $\alpha = 45^0$, $\beta = 120^0$, $\gamma = 45^0$.
 - b) $a = 75^0$, $b = 60^0$, $\gamma = 45^0$.
 - c) $\alpha = 120^0$, $\beta = 60^0$, $c = 135^0$.
7. Az egységgömb középpontjából kiinduló $\underline{a}(3, -1, 2)$, $\underline{b}(6, 4, 3)$ és $\underline{c}(1, 4, 2)$ vektorok kidöfik egy gömbháromszög csúcsait. Határozzuk meg a gömbháromszög adatait!

7 8.hét - 10.30

1. Számítsuk ki a gömbháromszög hiányzó oldalát és szögeit, ha $a = 150^0$, $b = 60^0$, $\alpha = 150^0$. Határozzuk meg a háromszög beírt és körülírt körének sugarát!
2. Az ABC gömbháromszög oldalai legyenek $a = \frac{\pi}{4}$, $b = \frac{\pi}{3}$, $c = \frac{\pi}{6}$. Jelölje M az A csúcs szemközti oldalra vett merőleges vetületét. Határozzuk meg az AM gömbi magasságszakasz hosszát!
3. Igaz marad-e gömbi geometriában, hogy a háromszög súlyvonalai egy ponton mennek át, és harmadolják egymást?
4. Igaz marad-e gömbi geometriában, hogy a háromszög magasságegyenesei egy ponton mennek át?
5. Az egységnyi területű szabályos gömbi négyszögnek mind a négy csúcsa köré kört rajzolunk, melyeknek sugara a gömbi négyszög oldalának a fele. Mekkora lesz a négyzet körökön kívül eső részének a területe?
6. Hány darab egybevágó gömbi négyszeggel lehet átfedés nélkül lefedni a gömb felszínét?
7. Legyen az ABC gömbháromszögben $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\beta = \frac{\pi}{3}$, $\gamma = \frac{\pi}{2}$. Keressük annak a körnek a sugarát, amelynek középpontja a BC íven van, és érinti AB illetve AC oldalakat.
8. Adottak két város koordinátái: K.h. 19^0 , É.sz. $47^030'$ (Budapest), illetve Ny.h. $73^030'$, É.sz. $40^015'$ (New York). Határozzuk meg a két város távolságát légvonalban, illetve az őket légvonalban összekötő útvonal legészakibb pontját! A Föld sugarát vegyük 6380 km-nek.