Geometria 1

1 1. hét - 09.10

1. Legyen $ABCD$ paralelogramma és O egy tetszőleges pont. Bizonyítsuk be, hogy $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$!

2. Bizonyítsuk be, hogy ha egy tetraéder két szemközti élét elhagyjuk, akkor a maradék élek felezőpontjai paralelogrammát alkotnak!

3. Bizonyítsuk be, hogy egy négyszög középvonalainak a metszéspontja azonos az átlók felezőpontjait összekötő szakasz felezőpontjával!

4. Bizonyítsuk be, hogy egy paralelepipedon testátlóját harmadolja az a sík, amelyet a testátló egyik végpontjából kiinduló élek másik végpontjai határoznak meg!

5. Szerkesszünk a síkon ötszöget, ha adottak az oldalfelező pontjai!

6. Az ABC háromszög köré írt körének középpontja O. Mutassuk meg, hogy az $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ vektor az ABC háromszög magasságpontjába mutat!

7. Egy szabályos hatszög középpontja $K(4, 1, 4)$, két szomszédos csúcsa $A(3, 1, 5)$ és $B(3, 2, 4)$. Adjuk meg a többi négy csúcs koordinátáit!

8. Az adott $A(4, -1, 3)$ és $B(5, 4, 1)$ pontokhoz határozzuk meg $C(7, y, z)$ pont y és z koordinátáit úgy, hogy az A, B és C pontok egy egyenesen legyenek!

9. i) Bizonyítsuk be, hogy az $A(7, 0, -1)$, $B(-2, 4, 0)$, $C(-5, 4, 2)$ és $D(4, 0, 1)$ pontok egy paralelogramma csúcsai!
   ii) A $P(1, 3, -1)$ pontot tükrözzük az A-ra, majd a tükörképet a B-re, az így kapott pontot C-re, majd az így kapottat D-re. Mik a negyedik tükörkép koordinátái?

10. Adottak az $\underline{a}(2, -1, 1)$, $\underline{b}(-1, 3, 0)$ és $\underline{c}(1, 0, 7)$ vektorok. Bonstuk fel a $\underline{d}(9, -9, 10)$ vektort $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ irányú összetevőkre!

11. Lineárisan független-e az alábbi három vektor:

    i) $\underline{a}(-2, 3)$; $\underline{b}(4, 1)$?

    ii) $\underline{a}(-4, 2, 1)$; $\underline{b}(0, 4, 3)$; $\underline{c}(-4, 6, 4)$?

12. Egy szabályos tetraéder egyik csúcsából induló egyik élvektor $\underline{a}$, ebből a csúcsból a szemközti lap súlypontjába mutató vektor $\underline{s}$. Számítsuk ki az $\underline{a} \cdot \underline{s}$ skaláris szorzat értékét, ha a tetraéder élhossza 1!

13. Az $ABCD$ téglalap csúcsait kössük össze egy tetszőleges P ponttal! Bizonyítsuk be, hogy $PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$!

14. Az ABC és az $A'B'C'$ háromszögek olyan helyzetűek, hogy az A, B, C csúcsokból rendre a $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ egyenesekre állított merőlegesek egy ponton mennek át. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az A', B', C' csúcsokból rendre a BC, CA, AB egyenesekre állított merőlegesek szintén egy ponton mennek át!

15. A z-tengely melyik pontjából látszik az $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ pontpár 30^0-os szög alatt?

16. Egy rombusz $A(2,0,1)$ csúcsából induló egyik oldalvektor $\underline{b}(0,3,6)$. A $\underline{v}(8,-4,8)$ vektor egyirányú az A-ból induló rombuszátlóval. Adjuk meg a rombusz csúcsainak koordinátáit!

2 2.hét - 09.17

1. Az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$ vektorokra fennállnak az $\underline{a} \times \underline{b} = \underline{c} \times \underline{d}$ és $\underline{a} \times \underline{c} = \underline{b} \times \underline{d}$ azonosságok. Bizonyítsuk be, hogy $\underline{a} - \underline{d}$ és $\underline{b} - \underline{c}$ vektorok párhuzamosak!

2. Az $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ egy sík három nem egy egyenesre eső pontjainak helyvektorai. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi vektor a sík egy normálvektora:

$$\underline{a} \times \underline{b} + \underline{b} \times \underline{c} + \underline{c} \times \underline{a}.$$

3. Egy egyenes B és C pontjainak helyvektorai $\underline{b}$ és $\underline{c}$, míg az egyenesen kívüli A ponté $\underline{a}$. Bizonyítsuk be, hogy az A pont távolsága a BC egyenestől:

$$\frac{|\underline{a} \times \underline{b} + \underline{b} \times \underline{c} + \underline{c} \times \underline{a}|}{|\underline{b} - \underline{c}|}.$$

4. Számítsuk ki az ABC háromszög területét, ha a csúcsok

   a) $A(1,0,2)$, $B(4,3,8)$, $C(0,-4,6)$,

   b) $A(4,-1,-3)$, $B(3,1,-2)$, $C(1,5,0)$.

5. Számítsuk ki az ABC háromszög B csúcshoz tartozó magasságának a hosszát, ha a csúcsok koordinátái: $A(1,-1,2)$, $B(5,-6,2)$, $C(1,3,-1)$!

3 3.hét - 09.24

1. Számítsuk ki az $ABCD$ tetraéder térfogatát, ahol $A(2,-1,1)$, $B(5,5,4)$, $C(3,2,-1)$, $D(4,1,3)$.

2. Válasszuk meg z értékét úgy, hogy az $\underline{a}(4,-1,2)$, $\underline{b}(1,2,3)$ és $\underline{c}(3,3,z)$ vektorok egy síkba essenek.

3. Az $ABCD$ tetraéder csúcspontjai $A(-4,1,5)$, $B(2,0,2)$, $C(-1,0,3)$ és $D(x,9,-2)$. A D csúcshoz tartozó magassága $6\sqrt{3}$. Adjuk meg x értékét, ha az $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ élvektorok ebben a sorrendben balrendszert alkotnak!

4. Egy paralelepipedon egy csúcsából kiinduló lapátlói által feszített paralelepipedon térfogata hogyan aránylik az eredeti térfogatához?

5. (Lagrange azonosság) Mutassuk meg, hogy tetszőleges $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$ vektorokra

$$(\underline{a}\times\underline{b})(\underline{c}\times\underline{d}) = \begin{vmatrix} \underline{ac} & \underline{bc} \\ \underline{ad} & \underline{bd} \end{vmatrix}$$

6. (Jacobi azonosság) Mutassuk meg, hogy tetszőleges $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorokra

$$(\underline{a}\times\underline{b})\times\underline{c} + (\underline{b}\times\underline{c})\times\underline{a} + (\underline{c}\times\underline{a})\times\underline{b} = 0$$

7. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$ vektorokra

$$(\underline{a}\times\underline{b})\times(\underline{c}\times\underline{d}) = (\underline{cda})\underline{b} - (\underline{cdb})\underline{a}$$

8. Mekkor az $A(2,3,1)$, $B(4,1,-2)$, $C(6,3,7)$ és $D(-5,-4,8)$ csúcsokkal rendelkező tetraéder D-hez tartozó magassága?

9. a) Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a $P(-2,5,6)$ és a $Q(7,-1,3)$ pontokon!
   b) Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely illeszkedik az $A(1,1,2)$, $B(-1,4,2)$ és a $C(2,-1,-3)$ pontokra!

4 4.hét - 10.01

1. a) Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a $P(-2,5,6)$ és a $Q(7,-1,3)$ pontokon!
   b) Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely illeszkedik az $A(1,1,2)$, $B(-1,4,2)$ és a $C(2,-1,-3)$ pontokra!

2. Számítsuk ki az alábbi párhuzamos síkpár távolságát: $2x-3y+6z-14=0$, és $4x-6y+12z+21=0$.

3. Mekkora szöget zárnak be egymással az $ABCD$ tetraéder ABC és ACD lapjai, ha a csúcsok koordinátái: $A(2,3,1)$, $B(4,1,-2)$, $C(6,3,7)$, $D(-5,-4,8)$?

4. Határozzuk meg az $S : 3x + y - 5z = 12$ sík és az

$$e : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 4 + t \\ z = 2 \end{cases}$$

egyenes metszéspontját! Mennyi a sík és az egyenes hajlásszöge? Mi lesz annak az egyenesnek az egyenlete, ami az S síkban van, és merőleges e-re?

4. Határozzuk meg az $x + 3y - 2z + 2 = 0$ sík és a vele párhuzamos $\frac{x-1}{4} = \frac{y+3}{2} = \frac{-z-1}{5}$ egyenes távolságát!

6. Milyen távol van az origótól a következő két egyenes metszéspontja?

$$e : \begin{cases} x = 3 - 5t \\ y = 2t - 1 \\ z = 3t - 2 \end{cases} \quad , \quad f : \begin{cases} x = -t - 3 \\ y = 2 + t \\ z = -3 - 4t \end{cases}$$

5 5.hét - 10.08

1. Adottak az $e : \frac{x+1}{3} = \frac{13-y}{12} = \frac{z+9}{11}$ és az $f : \frac{x-9}{6} = \frac{y-7}{3} = \frac{z}{-5}$ egyenesek. Határozzuk meg a normáltranszverzális egyenesüket, és a távolságukat. Továbbá határozzuk meg a $\underline{v}(1, -6, 2)$ iránnyal párhuzamos transzverzális egyenesüket! Milyen alakzat lesz a térben a két egyenes pontjait összekötő összes lehetséges szakaszok felezőpontjainak mértani helye?

2. Adjuk meg annak az egyenesnek az egyenletrendszerét, amely átmegy az $A(-1, 2, -3)$ ponton, merőleges a $\underline{d}(6, -2, -3)$ vektorra, és metszi az $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-5}$ egyenest!

3. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely egyenlő távolságra van a $P(5, -8, 7)$ ponttól és az $2x - 9y + 5z = 6$ síktól!

4. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely tartalmazza az $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-2}{2}$ egyenest és merőleges a $3x + 2y - z - 5 = 0$ síkra!

5. Az $ABCD$ rombusz benne van az $5x + 8y + 11z = 0$ síkban. Két (nem szomszédos) csúcsának koordinátái $A(8, -5, 0)$ és $C(-2, y, 6)$, továbbá a BD átló hossza $4\sqrt{6}$. Határozzuk meg B és D csúcsok koordinátáit!

6 6.hét - 10.15

1. Egy szabályos tetraéder egyik magasságegyenesének egyenletrendszere: $x = 4 + t$, $y = 4 + t$, $z = 4 + t$, egyik csúcsa pedig $A(-3, 12, 4)$. Határozzuk meg a tetraéder további csúcsainak koordinátáit!

2. Adottak a $3x+2y-6z-5=0$ és a $6x-3y+Cz-3=0$ síkok. Határozza meg C értékét úgy, hogy a síkok merőlegesek legyenek egymásra! Állítsa elő a két sík metszésvonalának egyenletrendszerét!

3. Az ABC gömbháromszög oldalai legyenek $a=\frac{\pi}{4}$, $b=\frac{\pi}{3}$, $c=\frac{\pi}{6}$. Jelölje az A csúccsal szemközti oldal felezőpontját A_1, és hasonlóan B_1, C_1 a másik két oldal felezőpontjait. Határozzuk meg az A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1 gömbi középvonalak hosszait, valamint az AA_1 gömbi súlyvonalszakasz hosszát!

4. Határozzuk meg a gömbháromszög hiányzó adatait, ha tudjuk, hogy

   a) $\alpha=45^0$, $\beta=120^0$, $\gamma=45^0$.

   b) $a=75^0$, $b=60^0$, $\gamma=45^0$.

   c) $\alpha=120^0$, $\beta=60^0$, $c=135^0$.

5. Az egységgömb középpontjából kiinduló $\underline{a}(3,-1,2)$, $\underline{b}(6,4,3)$ és $\underline{c}(1,4,2)$ vektorok kidöfik egy gömbháromszög csúcsait. Határozzuk meg a gömbháromszög adatait!

7 7.hét - 10.22

1. Számítsuk ki a gömbháromszög hiányzó oldalát és szögeit, ha $a=150^0$, $b=60^0$, $\alpha=150^0$. Határozzuk meg a háromszüg beírt és körülrt körének sugarát!

2. Az ABC gömbháromszög oldalai legyenek $a=\frac{\pi}{4}$, $b=\frac{\pi}{3}$, $c=\frac{\pi}{6}$. Jelölje M az A csúcs szemközti oldalra vett merőleges vetületét. Határozzuk meg az AM gömbi magasságszakasz hosszát!

3. Igaz marad-e gömbi geometriában, hogy a háromszög súlyvonalai egy ponton mennek át, és harmadolják egymást?

4. Igaz marad-e gömbi geometriában, hogy a háromszög magasságegyenesei egy ponton mennek át?

5. Az egységnyi területű szabályos gömbi négyszögnek mind a négy csúcsa köré kört rajzolunk, melyeknek sugara a gömbi négyszög oldalának a fele. Mekkora lesz a négyzet körökön kívül eső részének a területe?

6. Hány darab egybevágó gömbi négyzettel lehet átfedés nélkül lefedni a gömb felszínét?

7. Legyen az ABC gömbháromszögben $\alpha=\frac{\pi}{4}$, $\beta=\frac{\pi}{3}$, $\gamma=\frac{\pi}{2}$. Keressük annak a körnek a sugarát, amelynek középpontja a BC íven van, és érinti AB illetve AC oldalakat.

8 8.hét - 10.29

1. Számítsuk ki a gömbháromszög hiányzó oldalát és szögeit, ha $a = 150^0$, $b = 60^0$, $\alpha = 150^0$. Határozzuk meg a háromszüg beírt és körülírt körének sugarát!

2. Igaz marad-e gömbi geometriában, hogy a háromszög súlyvonalai egy ponton mennek át, és harmadolják egymást?

3. Igaz marad-e gömbi geometriában, hogy a háromszög magasságegyenesei egy ponton mennek át?

4. Az egységnyi területű szabályos gömbi négyszögnek mind a négy csúcsa köré kört rajzolunk, melyeknek sugara a gömbi négyszög oldalának a fele. Mekkora lesz a négyzet körökön kívül eső részének a területe?

5. Hány darab egybevágó gömbi négyzettel lehet átfedés nélkül lefedni a gömb felszínét?

6. Legyen az ABC gömbháromszögben $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\beta = \frac{\pi}{3}$, $\gamma = \frac{\pi}{2}$. Keressük annak a körnek a sugarát, amelynek középpontja a BC íven van, és érinti AB illetve AC oldalakat.

7. Adottak két város koordinátái: K.h. 19^0, É.sz. $47^030'$ (Budapest), illetve Ny.h. $73^030'$, É.sz. $40^015'$ (New York). Határozzuk meg a két város távolságát légvonalban, illetve az őket légvonalban összekötő útvonal legészakibb pontját! A Föld sugarát vegyük 6380 km-nek.

8. Adottak három város koordinátái: K.h. $37^030'$, É.sz. $55^045'$ (Moszkva), Ny.h. $43^015'$, D.sz. 23^0 (Rio), K.h. $2^030'$, É.sz. 49^0 (Párizs). Mekkora az általuk meghatározott gömbháromszög kerülete, területe? Melyik a gömbháromszög kerületének legészakibb és legdélibb pontja?