

A kétszeresen csonkolt Coxeter orthoszkém
kövezésekhez tartozó kongruens- és nem
kongruens hiperszférafedések vizsgálata.

SZAKDOLGOZAT

Készítette:
Eper Miklós
Matematika Bsc III. évfolyam

Témavezető:
Dr. Szirmai Jenő
BME Geometria Tanszék

2020. június 12.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	3
2. A hiperbolikus tér projektív modellje	6
3. Coxeter kövezések és fedéseik	7
3.1. Coxeter orthoszkémek	8
3.2. Coxeter orthoszkémek által generált szimmetriacsoport	10
3.3. Coxeter orthoszkémek térfogata	12
3.4. Hiperszférák	13
4. Hiperszférafedések a $\mathbb{H}^3$ hiperbolikus térben	14
4.1. Fedni, vagy nem fedni?	21
4.2. Nem kongruens fedések	30
4.3. Kongruens fedések	33

1. Bevezetés

A diszkrét geometria egyik fontos kérdése a kongruens gömbök optimális sűrűségű kitöltéseinek és fedéseinek vizsgálata konstans görbületű terekben. Az euklideszi eset a leginkább ismert, itt az egyik legjelentősebb eredmény a híres *Kepler-sejtésnek* [25], HILBERT 18. problémájának megoldása, amelyre THOMAS HALES adott számítógéppel támogatott bizonyítást az ezredfordulón [17]. Ez a bizonyítás FEJES TÓTH LÁSZLÓ 1950-es évekbeli gondolatain alapul [12]. A hiperbolikus esetben már jóval több a nyitott kérdés.

A hiperbolikus terek vizsgálata, egyik első megalkotója BOLYAI JÁNOS személye miatt is klasszikus magyar témának számít (lásd [2]), és ebben a témakörben FEJES TÓTH L. munkásságán és az általa alapított iskolán keresztül számtalan nagyon fontos eredmény született (a teljesség igénye nélkül itt csak FEJES TÓTH GÁBOR [13, 14], id. és ifj. BÖRÖCZKY KÁROLY [5, 6, 7, 8, 9], HEPPES ALADÁR [18], HORVÁTH JENŐ, H. TEMESVÁRI ÁGOTA [19], BEZDEK KÁROLY [1], MOLNÁR EMIL [34, 32] nevét említjük). Érdekes és sok vonatkozásában ma is nyitott problémákat tartalmazó kérdés a hiperbolikus terekben a kongruens és nem kongruens gömbök optimális sűrűségű kitöltéseinek és fedéseinek a vizsgálata. A hiperbolikus térben a gömböknek három típusa létezik: klasszikus gömb, horoszféra és hipeszféra, melyekből utóbbi kettő nem kompakt "gömb". Továbbá hiperbolikus terekben az elhelyezés és fedés sűrűségének definiálása is döntő jelentőségű, kritikus fogalom, ahogy BÖRÖCZKY KÁROLY [5] [6] írásaiban példákön keresztül bemutatja. A leginkább elfogadott sűrűség-definiálás a gömbök lokális sűrűségét tekinti a Dirichlet-Voronoi celláikra vonatkozóan, mi is ezen lokális sűrűségfogalmat és annak kiterjesztését fogjuk használni.

A téma aktualitását jelzi, hogy n -dimenzióban ($n \geq 3$) még az sem tisztázott, hogy a legsűrűbb klasszikus gömbökkel történő gömbelhelyezés mikor valósul meg (lásd [32]). A klasszikus gömbelhelyezésekre vonatkozóan BÖRÖCZKY KÁROLY (lásd [8], [7]) bizonyította, hogy az n -dimenziós konstans görbületű térben r sugarú gömbökkel történő pakolás esetén a pakolás lokális sűrűsége a gömbök Dirichlet-Voronoi celláira vonatkozóan nem haladhatja meg az $(n+1)$ darab egymást páronként érintő r sugarú gömb, középpontjaik által kifeszített szimplexre vonatkozó sűrűségét. Az ennek megfelelő legnagyobb sűrűségű elrendezés $\mathbb{H}^3$ -ben megvalósul, de nem klasszikus értelemben vett gömbökkel, hanem horoszférákkal és ≈ 0.85328 sűrűséggel. Ez a sűrűség teljesen asszimptotikus Coxeter kövezésekhez kapcsolódó horoszféra pakolásokkal többféleképpen is megvalósítható (lásd [26]). Magasabb dimenziók-

ban $n = 4, \dots, 9$ is érdekes és nagy sűrűségű eredmények születtek, amelyek a [27, 29, 30] munkákban olvashatók. A témavezetőm megmutatta, hogy $n \geq 4$ dimenziókban teljesen asszimptotikus szimplexekre vonatkozó lokálisan optimális horoszférapakolás sűrűsége meghaladja a megfelelő Böröczky-féle sejtett felső határt, például $\mathbb{H}^4$ -ben a teljesen asszimptotikus szimplexekre vonatkozó lokálisan optimális horoszférapakolás sűrűsége ≈ 0.77038 (lásd [36, 37, 28]), de ez nem terjeszthető ki a teljes hiperbolikus térre. Klasszikus gömbökkel történő elhelyezések esetén az eddig ismert legnagyobb sűrűség [32] cikkben leírt ≈ 0.77147 . Másik alapkérdés, hogy a „nem azonos típusú” horoszférakitöltések és fedések esetén adott dimenzióban milyen lesz az optimális gömbelrendezés (lásd [36, 44]).

A hiperszférelhelyezésekről és fedésekről még kevesebb eredmény született. A hiperbolikus síkon VERMES I. [51] igazolta, hogy a hiperszféra pakolásokra vonatkozó felső határ $\frac{3}{\pi}$, valamint [53] cikkében megmutatta, hogy a hiperbolikus síkban a legritkább fedés sűrűsége tetszőlegesen megközelítheti a körökre illetve horociklusokra vonatkozó sűrűségértéket.

Bizonyos kövezésekhez kapcsolódó hiperszférafedések vizsgálata található a témavezető cikkeiben ($n = 3, 4, 5$) dimenzióban a [38], [39] munkákban, valamint szabályos hiperbolikus csonkolt szimplexekkel való kövezésekhez határozza meg az optimális hiperszféra konfigurációt, [46], [41],[42] cikkeiben. A témavezetőm [40] cikkében meghatározza a háromdimenziós telített hiperszférakitöltéseknek egy felső korlátját ≈ 0.86338 , illetve [43] cikkében eljárás található a $\mathbb{H}^3$ hiperbolikus tér csonkolt tetraéderekre való felbontására a tér tetszőleges telített hiperszférelrendezéséhez.

További eredményei kongruens és nem-kongruens hiperszférákkal való pakolásokra $\mathbb{H}^3$ -ben: [47]-ben kocka- és oktaéder alapú kövezésekre vonatkozó nem kongruens esetben ≈ 0.84931 sűrűségű, [48]-ben csonkolt Coxeter orthoszkém alapú kövezésekre vonatkozó esetben ≈ 0.81335 sűrűségű az optimális elrendezés. Több esetben talált lokálisan olyan hiperszférelrendezést, amelyeknek sűrűsége meghaladja az elhelyezésekre vonatkozó klasszikus- gömb és horoszférákra vonatkozó Böröczky-Florian féle felső sűrűséghatárt.

A hiperszférafedésekről még kevesebbet tudunk, itt szintén ($n \geq 3$) esetén nyitott az optimális konfigurációk kérdése. A hiperbolikus síkon ($n = 2$) VERMES I. [52] bizonyította, hogy a hiperszféra- vagy horoszférafedésekre vonatkozó alsó korlát $\frac{\sqrt{12}}{\pi}$, de magasabb dimenzióban nincs hasonló eredmény a legkisebb sűrűségű fedésre. (Megjegyezzük, hogy a hiperbolikus síkon a

legritkább fedés ugyanilyen sűrűséggel realizálódik, ha horoszférákat használunk.) A témavezető [32] cikkében a klasszikus gömbökkel történő fedéshez ≈ 1.368931 -as sűrűségű konfigurációt ad meg. A témavezető [41] cikkében a 3-, 4- és 5-dimenziós Coxeter kövezésekhez határozza meg a legritkább hiperszférafedéseket szabályos prizma-kövezésekre vonatkozóan, melyek egyszerűen csonkolt Coxeter-orthoszkémekből származtathatók a principális csúcs poláris síkjára való tükrözéssel. FEJES TÓTH L. [12] korszakos munkájában található ≈ 1.280 -as sűrűségű horoszférafedés leírása, amely a $[6, 3, 3]$ parkettázáshoz kapcsolódódik.

Vizsgálható továbbá az úgynevezett hip-hor elrendezések családja, amely során az elhelyezések és fedések egyaránt tartalmaznak hiperszférákat és horoszférákat. Ezt a problémát a témavezető kitöltésekkel kapcsolatban 2- és 3-dimenziós hiperbolikus terekben bizonyos Coxeter kövezések esetében megoldotta a [45] munkájában. A hiperbolikus síkon az elhelyezés sűrűsége tetszőlegesen megközelíti a $\frac{3}{\pi}$ felső határt, $\mathbb{H}^3$ -ban pedig az optimális elrendezés a $[7, 3, 6]$ kövezéshez kapcsolódik ≈ 0.83267 -es sűrűséggel, illetve lokálisan optimális ≈ 0.85397 sűrűség is elérhető $[p, 3, 6]$ ($6 < p < 7, p \in \mathbb{R}$) kövezés esetén. Témavezetőmmel ugyanezekhez a végtelen csúccsal rendelkező, egyszerűen csonkolt orthoszkémek Coxeter kövezéseihez kapcsolódóan oldottuk meg a fedési kérdést [50], melyről TDK dolgozatot is készítettem. A síkon ($n = 2$) a fent említett hip-hor fedések sűrűsége tetszőlegesen megközelíti a hiperszféra vagy horoszférafedésekre vonatkozó alsó korlátot: $\frac{\sqrt{12}}{\pi}$, illetve a hiperbolikus térben ($n = 3$) az optimális elrendezés a $[7, 3, 6]$ Coxeter kövezéshez kapcsolódik, ≈ 1.27297 -es sűrűséggel, amely kisebb mint a FEJES TÓTH L. által meghatározott ≈ 1.280 -as, horoszférák által realizálódó eddig ismert legkisebb fedési sűrűség. Továbbá $[p, 3, 6]$ ($6 < p < 7, p \in \mathbb{R}$) Coxeter kövezéshez kapcsolódó lokálisan optimális hip-hor fedést érhető el ≈ 1.26885 -ös sűrűséggel, azonban ezen fedéshez tartozó kövezés nem terjeszthető ki a teljes hiperbolikus térre.

Jelen dolgozatban a 3-dimenziós hiperbolikus tér kongruens- és nem kongruens hiperszférákkal történő fedéseit vizsgáljuk kétszeresen csonkolt Coxeter orthoszkémekkel történő kövezésekre vonatkozóan. [49]-ben témavezetőm ugyanezekhez a kövezésekhez ≈ 0.81335 -ös optimális pakolási sűrűséget ad meg, amely $[7, 3, 7]$ kövezéshez és a kongruens esethez tartozik. A [33] munkában a témavezetőm szerzőtársaival a kétszeresen csonkolt orthoszkémekhez tartozó kövezések további vizsgálatai során szintén a $[7, 3, 7]$ kövezéshez tartozóan ≈ 1.26829 -es fedési sűrűségű hiperszférafedést adott meg, amely

jelenleg a legritkább hiperbolikus gömbfedés.

Jelen dolgozatban ezeket az eredményeket egészítjük ki a maradék kongruens eset, illetve a nem kongruens esetek vizsgálatával. Python programozási nyelv segítségével megmutatjuk, hogy a nem kongruens hiperszférafedések esetében az optimális elrendezés a $[7, 3, 8]$ kövezéshez tartozik ≈ 1.28228 -as sűrűséggel. Továbbá vizsgáljuk az $[u, 3, 7]$ ($6 < u < 7, u \in \mathbb{R}$) kövezéshez kapcsolódó lokálisan realizálódó hiperszférafedést, amely $u \approx 6.45953$ esetén veszi fel minimumát ≈ 1.26454 -es sűrűséggel, azonban ezen lokálisan optimális fedéshez tartozó parkettázás nem terjeszthető ki a teljes hiperbolikus térre.

2. A hiperbolikus tér projektív modellje

Számításainkhoz a $\mathbb{H}^n$ tér E. BELTRAMI, A. CAYLEY és F. C. KLEIN nevéhez köthető jól ismert projektív modelljét használjuk. A modellt a $\mathbb{E}^{1,n}$, $(1, n)$ szignatúrával rendelkező Lorentz térben értelmezzük, azaz tekintsük a $\mathbf{V}^{n+1}$ valós vektorteret a

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = -x^0 y^0 + x^1 y^1 + \dots + x^n y^n \quad (1)$$

$(1, n)$ szignatúrájú bilineáris forma megadásával. Továbbá $\mathbf{x} = (x^0, \dots, x^n) \in \mathbf{V}^{n+1}$ és $\mathbf{y} = (y^0, \dots, y^n) \in \mathbf{V}^{n+1}$ nemnulla vektorokra az alábbi ekvivalenciarelációnak megfelelően egy valós c nem zéró szorzó erejéig egyértelműen meghatároznak egy pontot a $\mathcal{P}^n(\mathbb{R})$ valós projektív térben:

$$\mathbf{x} \sim \mathbf{y} \iff \exists c \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \mathbf{y} = c \cdot \mathbf{x} \quad (2)$$

$\sim$ -al vett faktorizálás a $\mathcal{P}^n(\mathbf{V}^{n+1}, \mathbf{V}_{n+1}, \langle ; \rangle)$ n -dimenziós valós projektív metrikus teret indukálja. A $\mathbb{H}^n$ n -dimenziós tér pontjait a modellben a $\mathcal{P}^n(\mathbf{V}^{n+1}, \mathbf{V}_{n+1})$ projektív térnek a

$$Q = \{[\mathbf{x}] \in \mathcal{P}^n \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0\} = \partial \mathbb{H}^n \quad (3)$$

kvadratikus forma által "meghatározott tartomány" belső pontjai tartoznak. Ekkor $\mathbb{H}^n$ modellezhető, mint a Q kúp-komponens belseje.

A tér "valós" pontjait azon belső $\mathbf{x} \in \mathbb{H}^n$ pontok alkotják, amelyekre $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle < 0$. A Q pontjai $\partial \mathbb{H}^n$ a projektív térben $\mathcal{P}^n$ az abszolút alakzatot

határozzák meg, amely a $\mathbb{H}^n$ végtelen távoli pontjait tartalmazza. Azon pontok, amelyekre $\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle > 0$ a modellen kívül találhatók és a $\mathbb{H}^n$ külső pontjainak nevezzük. Legyen $P[\mathbf{x}] \in \mathcal{P}^n$, ekkor $R[\mathbf{y}] \in \mathcal{P}^n$ pontot a $P[\mathbf{x}]$ -hez a Q -ra vonatkoztatva konjugáltként mondjuk, ha $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$ teljesül. Azon pontok halmaza, amelyek konjugáltak valamely $P[\mathbf{x}] \in \mathcal{P}^n$ ponthoz, a pont polár síkját alkotják: $pol(P) = \{[\mathbf{y}] \in \mathcal{P}^n \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0\}$. Így a Q bilineáris forma (3) egy a bijektív megfeleltetést (lineáris polaritást) $(\mathbf{V}^{n+1} \rightarrow \mathbf{V}_{n+1})$ határoz meg $\mathcal{P}^n$ pontjai és hipersíkjai között. A $\mathcal{P}^n$ egyenesei jellemezhetők mint a $\mathbf{V}^{n+1}$ 2-alterei vagy mint az $(n-1)$ -alterei a $\mathbf{V}_{n+1}$ formatérnek (lásd [35]). Ekkor $P[\mathbf{x}]$ pont illeszkedik $\alpha[\mathbf{a}]$ hipersíkra, ha $\langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle = 0$ teljesül. $(\mathbf{x} \in \mathbf{V}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}, \mathbf{a} \in \mathbf{V}_{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\})$.

Így a Q abszolút alakzat metszete az $x^n = 1$ hipersíkkal, éppen a már említett Beltrami-Cayley-Klein modellt adja. A hiperbolikus tér axiómáinak ellenőrzésével láthatjuk, hogy a megadott struktúra valóban a hiperbolikus teret adja meg.

A fent leírt projektív modellben értelmezzük a távolságot, a definiált skáláris szorzásnak megfelelően. Ebből megadható a hiperbolikus távolság ebben a modellben. Tehát $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{H}^n$ pontok távolsága

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{k}{2} \ln \frac{-\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2 - \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle}}{-\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle - \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2 - \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle}}, \quad (4)$$

amely a Beltrami-Cayley-Klein modellben értelmezett kettősviszonyon alapuló definícióból jön. $\mathbb{H}^n$ metszetgörbülete $\frac{1}{K} = -k^2$, innen $k = \sqrt{\frac{-1}{K}} \in \mathbb{R}$ metrikus konstans, amelyről a továbbiakban feltesszük, hogy $k = 1$. A távolságképlet a következő szerint írható át:

$$\cosh d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{-\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle}} \quad (5)$$

A hiperbolikus tér projektív modelljének részletes leírása megtalálható: [15],[35]

3. Coxeter kövezések és fedéseik

A $\mathbb{H}^n$ n -dimenziós hiperbolikus tér kövezéseinek egy karakterizációja ifj. Böröczky Károly [4] összefoglaló cikkében látható az alábbiak szerint: konvex poliéderek egy $\mathcal{T}$ családja $\mathbb{H}^n$ -beli kövezés, ha:

- $\mathcal{T}$ elemei lefedik $\mathbb{H}^n$ -t,
- bármely kompakt halmazt $\mathcal{T}$ -nek csak véges sok eleme metsz,
- $\mathcal{T}$ bármely két elemének metszete $(0 \leq k < n)$ -dimenziós közös lap.

Ilyen kövezések többféle módon generálhatók, jelen írásban olyan periódikus kövezéseket tekintünk, amelyek alaptartományai egyszerűen csonkolt Coxeter-orthoszkémek.

3.1. Coxeter orthoszkémek

1. Definíció. A $\mathbb{H}^n$ ($2 \leq n \in \mathbb{N}$) térben $\mathcal{S}$ (klasszikus) orthoszkém olyan $H^0, \dots, H^n$, $(n+1)$ hipersíkkal határolt szimplex (lásd [3, 24]), amelyre $H^i \perp H^j$, teljesül, ha csak $j \neq i-1, i, i+1$.

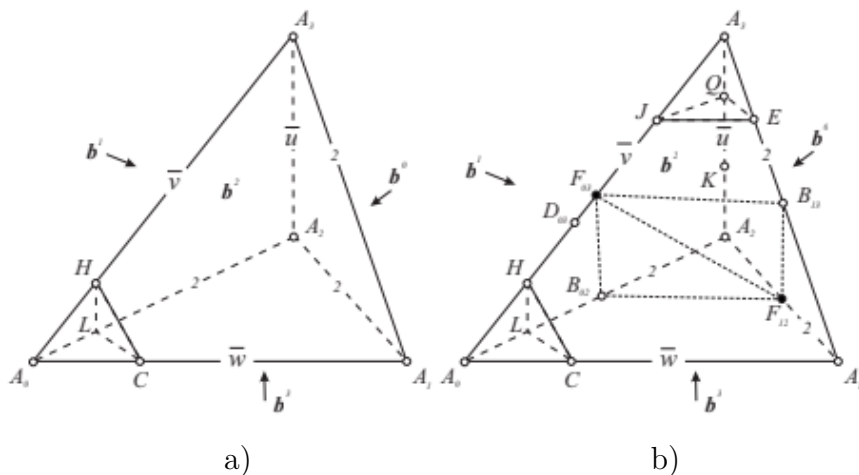
2. Definíció. A $\mathbb{H}^n$ térben a d -rendű, vagy d -szer csonkolt ($(0 \leq d \leq 2)$ általánosított) orthoszkém egy $n+d+1$ hipersíkkal határolt $H^0, H^1, \dots, H^{n+d}$ politóp amelyben $H^i \perp H^j$ minden $j \neq i-1, i, i+1$ esetén, ($d=2$ -höz tartozó, indexeket modulo $n+3$ tekintjük).

A klasszikus ($d=0$) orthoszkémek esetében az A_i ($n \geq 2$) csúcsokkal szemközti hipersíkokat jelölje H^i ($0 \leq i \leq n$), továbbá az $\mathcal{S}$ orthoszkémnek jelölje α^{ij} a H^i és H^j síkjainak a szögét: $\alpha^{ij} = \frac{\pi}{2}$, if $0 \leq i < j-1 \leq n$. A maradék n lapszögét $\alpha^{i,i+1}$, ($0 \leq i \leq n-1$) az $\mathcal{S}$ orthoszkém lényeges szögeinek nevezzük (lásd 1. ábra) A d -rendű Coxeter orthoszkémek geometriailag a következőképpen írhatók le:

- $d=0$ esetben megegyeznek a SCHLÄFLI által meghatározott klasszikus orthoszkémekkel (1. Definíció). Jellemzőjük, hogy megadható csúcsaiknak $A_0 A_1 \dots A_n$ sorozata, hogy $\forall i \in \{0, \dots, n-3\}$ $A_i A_{i+1}$ él merőleges $A_{i+2} A_{i+3}$ élre. Ekkor a sorozat első és utolsó csúcsát A_0 -t és A_n -et az orthoszkém principális csúcsainak nevezzük. Ebben az esetben az orthoszkém valamennyi csúcsa a hiperbolikus tér "valós" belső pontja vagy határpontja.
- $d=1$ esetben az orthoszkém A_n principális csúcsa a Q abszolút alakzaton kívül esik, tehát a hiperbolikus tér "külső" pontja. Ekkor ezt a csúcsot lecsonkoljuk a $pol(A_n)$ polár síkjával, és az így keletkező testet vizsgáljuk (lásd 1. ábra). Ebben az esetben egyszerűen csonkolt orthoszkémnek nevezzük, A_n külső csúcscsal.

- $d = 2$ esetben az orthoszkém mindkét A_0, A_n principális csúcsa a hiperbolikus tér "külső" pontja, tehát a Q abszolút alakzaton kívül esik, így ekkor ezeket a csúcsoakat a $pol(A_0)$ és $pol(A_n)$ polár síkokkal lecsonkoljuk. A keletkező csonkolt szimplexet nevezzük kétszeresen csonkolt orthoszkémnek. Ebben az esetben két részesetet különböztetünk meg attól függően, hogy az A_0A_n egyenesének van-e a hiperbolikus térrel közös pontja vagy nincs. Például, a háromdimenziós hiperbolikus térben, a Lambert kocka nevezetes kövezését származtathatjuk, ha $A_0A_3 \cap \mathbb{H}^3 = \emptyset$ és további szögfeltételek teljesülnek. Pl. az A_0, A_3 -al szemközti $pol(A_0)$ és $pol(A_3)$ csonkoló polár síkok (lapok) szöge is a π egész (>1) hányada.

Általánosan a Coxeter-orthoszkémeket H.-C. IM HOF [22, 21] írásaiban osztályozta. Bebizonyította, hogy ezek csak ≤ 9 dimenziókban léteznek és teljes felsorolásukat adta.



1. ábra. a) 3-dimenziós $d = 1$ -rendű (egyszeresen csonkolt) Coxeter orthoszkém A_0 külső csúccsal, $\pi = HLC$ polár síkkal csonkolva. b) 3-dimenziós $d = 2$ -rendű (kétszeresen csonkolt) Coxeter orthoszkém A_0, A_3 külső csúcsokkal, $\pi^0, \pi^3 = HLC, JQE$ polár síkokkal csonkolva.

3.2. Coxeter orthoszkémek által generált szimmetriacsoport

Másik lehetséges jellemzése a kövezéseknek a szimmetriacsoportjuk segítségével történhet, ilyenkor a kövezést periódikusnak is nevezzük. Ekkor létezik olyan konvex poliéder, melynek szimmetriacsoport szerinti képei a tér egy kövezését adják, ezt a poliédert a kövezés alaptartományának nevezzük. Ha $\mathcal{T}$ jelöli a kövezést, akkor jelöljük a szimmetriacsoportját $Sym\mathcal{T}$ -vel.

Tekintsük át a végesen generált Coxeter csoportok definícióját. Ezen csoportokat az $\{r_1, \dots, r_n\}$ generátor elemekkel és definiáló relációkkal az alábbi módon lehet megadni:

$$G = \langle r_1, \dots, r_n | (r_i r_j)^{m_{ij}} = 1 \rangle, \quad (6)$$

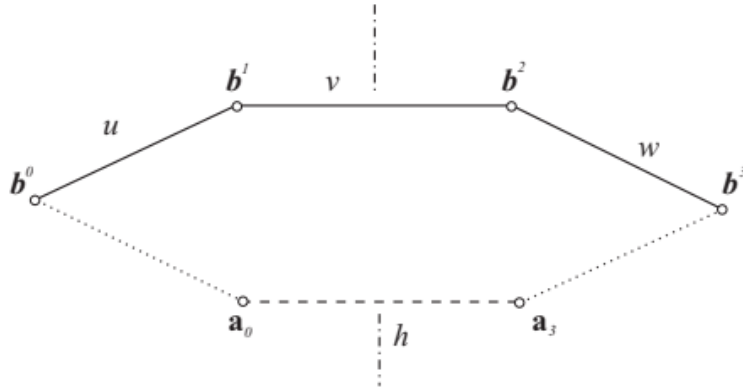
ahol $m_{ii} = 1$ és $2 \leq m_{ij} \in \{\mathbb{N} \cup \infty\}$, ha $i \neq j$, illetve ha $m_{ij} = \infty$, akkor az (r_i, r_j) párhoz nem tartozik definiáló reláció.

A G Coxeter csoport Coxeter-mátrixán azt az $n \times n$ -es szimmetrikus M mátrixot értjük, amelynek sorai és oszlopai r_i -kkel vannak indexelve és ij -edik eleme: $M_{ij} = m_{ij}$. Ehhez kapcsolódik a csoport C Coxeter-Schläfli cosinus mátrixa, amely M -el meggyegyző méretű, sorai és oszlopai ugyanígy vannak indexelve, és ij -edik eleme: $C_{ij} = -\cos \frac{\pi}{m_{ij}}$. G Coxeter-Schläfli gráfján azt a súlyozott gráfot értjük, amelynek csúcsai $\{r_1, \dots, r_n\}$ elemei, két csúcs pontosan akkor van összekötve, ha $m_{ij} > 2$, illetve egy él pontosan akkor van megcímkézve m_{ij} -vel, ha az legalább 4.

Jelen írásban a $d = 2$ -rendű Coxeter orthoszkémekkel foglalkozunk, ahol A_0, A_3 principiális csúcsok a Q abszolút alakzat külső pontjai. ($\mathbb{H}^n$ -ben egy ilyen $\mathcal{S}$ orthoszkém csúcsai $A_1, \dots, A_{n-1}, P_0^0, P_1^0, \dots, P_{n-1}^0, P_0^n, P_1^n, \dots, P_{n-1}^n$, ahol $P_0^0, P_1^0, \dots, P_{n-1}^0$ a lecsonkolt A_0 csúcs π^0 polár síkján, $P_0^n, P_1^n, \dots, P_{n-1}^n$ pedig a lecsonkolt A_n csúcs π^n polár síkján fekszenek, lásd 1. ábra $n = 3$ esetben.) Ekkor észrevehetjük, hogy a korábban geometriailag leírt kétszeresen csonkolt Coxeter orthoszkémnek oldallapjaira való tükrözései, Coxeter csoport generátorrendszerét alkotják, amely teljesen diszkrétén hat a $\mathbb{H}^n$ téren. Tekintsünk tehát olyan periódikus $\mathcal{T}$ kövezéseket $\overline{\mathbb{H}}^n$ ($n \geq 2$)-ben, ahol a $Sym\mathcal{T}$ szimmetriacsoportnak egy d -rendű általánosított orthoszkém az alaptartománya, és a csoportot az orthoszkém $(n - 1)$ -dimenziós hiperlapjaira vonatkozó tükrözések generálják (csonkolt esetben a csonkoló lapra is tükrözünk). A $\overline{\mathbb{H}}^n$ ($n \geq 2$) térben szimplexekkel csak akkor tudunk hipersík

tükrözésekkel kövezést generálni, ha minden egyes lapszöge a π egész számú hányada (pl. a hiperbolikus síkon a "zéro szöget" is megengedhetjük (azaz a ∞ -vel való osztást) bizonyos "elég kényes" és itt nem részletezett feltételekkel). Ez alapján egy kétszeresen csonkolt Coxeter orthoszkém által generált szimmetriacsoport elemeit az orthoszkémre alkalmazva, képei átfedés nélkül kitöltik az n -dimenziós hiperbolikus teret pontosan akkor, ha lapjai által bezárt szögek π egész számú hányadosai, és ekkor periodikus kövezés alaptartományaként $\mathbb{H}^n$ $\mathcal{T}$ kövezését adják.

Így a Coxeter csoportokra értelmezett mátrixokat és gráfot orthoszkémekre is értelmezhetjük. Egy általánosított $S \subset \overline{\mathbb{H}}^n$ Coxeter orthoszkémet súlyozott gráffal (Coxeter-Schläfli szimbólumával) jellemezhetjük. Ebben a csúcsok a simplex hipersíkjait jelölik és két csúcsot összekötő éléhez a k_i súlyt rendeljük ha a hipersíkok lapszöge $\frac{\pi}{k_i}$. Formálisan a gráfban $k_i - 2$ vonallal kötünk össze két csúcsot ha $k_i = 3, 4$ és egy vonallal, de k_i súllyal megjelölve $k_i \geq 5$ esetében. Ha két sík merőleges egymásra, akkor nem kötjük össze a megfelelő csúcsokat. Ha S két határoló hipersíkja hiperbolikus értelemben párhuzamos, akkor a megfelelő súly ∞ és vastag élt használunk. Ha a két hipersík ultraparallel akkor a gráfban szaggatott vonallal jelöljük (lásd 2. ábra). A $[k_1, \dots, k_{n-1}, k_n]$ rendezett halmazt a $\mathcal{S}$ orthoszkém által generált $\mathcal{T}$ kövezés *Coxeter-Schläfli* szimbólumának nevezzük.



2. ábra. $d = 2$ -rendű Coxeter kövezések Coxeter-Schläfli gráfja az 1. ábra jelöléseivel, ezen kapják a főszerepet jelen dolgozatban

A szimbólumokhoz hozzárendelhető egy $(n + 1) \times (n + 1)$ szimmetrikus

(c^{ij}) Coxeter-Schläfli cosinus mátrix, ahol $i \neq j \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, c^{ij} egyenlő $-\cos \frac{\pi}{k_{ij}}$. Például, az 5-dimenziós hiperbolikus térben $\mathbb{H}^5$ ha a súlyokra $k_1 = p, k_2 = q, k_3 = r, k_4 = s, k_5 = t$ akkor:

$$(c^{ij}) := \begin{pmatrix} 1 & -\cos \frac{\pi}{p} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\cos \frac{\pi}{p} & 1 & -\cos \frac{\pi}{q} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos \frac{\pi}{q} & 1 & -\cos \frac{\pi}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\cos \frac{\pi}{r} & 1 & -\cos \frac{\pi}{s} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\cos \frac{\pi}{s} & 1 & -\cos \frac{\pi}{t} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\cos \frac{\pi}{t} & 1 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

1. Megjegyzés. Az állandó görbületű terekben a Coxeter csoportok illetve a Coxeter szimplexek fontos szerepet játszanak. A szférikus és euklideszi Coxeter szimplexeket H. S. M. COXETER osztályozta [10] cikkében.

A hiperbolikus terekben véges vagy végtelen csúcsú Coxeter szimplexek osztályozását és teljes felsorolását H. S. M. COXETER és G. J. WHITROW [11], F. LANNÉR [31], J.-L. KOSZUL és M. CHEIN végezték el. Ilyen típusú Coxeter szimplexek ≤ 9 dimenzióig léteznek.

Ha megengedünk külső csúcsokat is, akkor magasabb dimenzióban is találunk Coxeter szimplexeket, de teljes osztályozás nincs.

3.3. Coxeter orthoszkémek térfogata

- A $\mathbb{H}^2$ hiperbolikus síkon:

A hiperbolikus síkon a kétszeresen csonkolt orthoszkém lehet egy ötszög, ha a külső csúcsokat összekötő él metszi a modellkört. Ekkor az ötszögnek mind az öt szöge derékszög. Az orthoszkém lehet négyszög is, amennyiben a külső csúcsokat összekötő él nem metszi a modellkört, ezt az esetet azonban most nem vizsgáljuk. Az ötszög területe a hiperbolikus sokszögek jól ismert területképletével, a Gauss-Bonnet-tétel alapján számolható (lásd [20]):

$$Vol_2(\mathcal{S}) = 3\pi - 5\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \quad (8)$$

- A $\mathbb{H}^3$ hiperbolikus térben:

Ekkor a vizsgált poliéder $HLCA_1A_2JQE$ egy kétszeresen csonkolt orthoszkém A_0, A_3 külső csúccsal (lásd 1.ábra), melynek térfogata R. KELLERHALS alábbi tétele alapján számolható [23] (itt a Lambert kocka eseteit nem vizsgáljuk):

1. Tétel. *A három dimenziós $\mathcal{S}$ hiperbolikus orthoszkém térfogata (a Lambert kocka kivételével) kifejezhető a lapok hajlásszögeivel $\alpha_{01}, \alpha_{12}, \alpha_{23}$, $(0 \leq \alpha_{ij} \leq \frac{\pi}{2})$ (1.ábra) a következő formula szerint:*

$$\begin{aligned} Vol_3(\mathcal{S}) = \frac{1}{4} \{ & \mathcal{L}(\alpha_{01} + \theta) - \mathcal{L}(\alpha_{01} - \theta) + \mathcal{L}(\frac{\pi}{2} + \alpha_{12} - \theta) + \\ & + \mathcal{L}(\frac{\pi}{2} - \alpha_{12} - \theta) + \mathcal{L}(\alpha_{23} + \theta) - \mathcal{L}(\alpha_{23} - \theta) + 2\mathcal{L}(\frac{\pi}{2} - \theta) \}, \end{aligned} \quad (9)$$

ahol $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$ az alábbi formula szerint van definiálva:

$$\tan(\theta) = \frac{\sqrt{\cos^2 \alpha_{12} - \sin^2 \alpha_{01} \sin^2 \alpha_{23}}}{\cos \alpha_{01} \cos \alpha_{23}}$$

és ahol $\mathcal{L}(x) := - \int_0^x \log |2 \sin t| dt$ a Lobachevsky függvényt jelöli.

$\mathcal{T}_{uvw}$ parkettázásnál: $\alpha_{01} = \frac{\pi}{u}$, $\alpha_{12} = \frac{\pi}{v}$, $\alpha_{23} = \frac{\pi}{w}$.

3.4. Hiperszférák

Az n -dimenziós hiperbolikus térben a gömböknek 3 fajtája létezik: a klasszikus gömb, a horoszféra és a hiperszféra, melyek közül az utóbbi kettő nem kompakt gömb. A hiperbolikus tér fedését itt hiperszférákkal valószínűsítjük meg úgy, hogy a gömböket a $\mathbb{H}^n$ tér egy fent leírt kövezéséhez rendeljük. Tehát a kövezés alaptartományát, a kétszeresen csomolt orthoszkémet lefedjük hiperszférákkal, majd az orthoszkém képeinek megfelelően a gömbök a tér fedését adják. Ehhez tekintsük a hiperszférák adatait:

A hiperszféra felülete $\mathbb{H}^n$ -ben ($n \geq 2$) egy másodrendű felület, amely állandó távolságra van egy hipersíktól, az általa meghatározott mindkét féltérben. Az n -dimenziós "fél-hiperszférát", amely h távolságra van a π hipersíktól, jelöljük $\mathcal{H}_n^h$ -el. A fenti modellben felírható $\mathcal{H}_n^h$ egyenlete (lásd [15],[16]):

$$1 - \sum_{i=1}^n x_i^2 = \left(-\frac{u_0}{\sinh h} + \sum_{i=1}^n \frac{u_i}{\sinh h} x_i \right)^2 \quad (10)$$

Ahol $(u_0, u_1, \dots, u_n)$ a π sík pólusa. Amennyiben π az $x_n = 0$ sík:

$$\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + \frac{x_n^2}{\tanh^2 h} = 1 \quad (11)$$

Legyen $\mathcal{A}_{n-1}$ $(n-1)$ -dimenziós poliéder a π hipersíkon. Legyen $\mathcal{H}_n^h(\mathcal{A}_{n-1})$ a hiperszféra azon korlátos darabja amelyet π , a hiperszféra felület, illetve a π -re merőleges $\mathcal{A}_{n-1}$ $(n-2)$ -dimenziós hiperlapjait tartalmazó $(n-1)$ -dimenziós hipersíkok határolnak (lásd 4.ábra). $\mathcal{H}_n^h(\mathcal{A}_{n-1})$ térfogata, BOLYAI JÁNOS 19. századból származó összefüggésével számolható ($n = 2, 3$ dimenziókban):

$$Vol_2(\mathcal{H}_2^h(\mathcal{A}_1)) = Vol_1(\mathcal{A}_1) \sinh(h), \quad (12)$$

$$Vol_3(\mathcal{H}_3^h(\mathcal{A}_2)) = \frac{1}{4} Vol_2(\mathcal{A}_2) [\sinh(2h) + 2h]. \quad (13)$$

A hiperszféra modellbeli egyenletéből láthatjuk, hogy ezen alakzatok megfelelői a gömbmodellben ellipszoidok lesznek, illetve ellipszisek a síkon.

4. Hiperszférafedések a $\mathbb{H}^3$ hiperbolikus térben

A háromdimenziós hiperbolikus térben a kétszeresen csnokolt Coxeter orthoszkémeknek, melyeknek leírása a 3. fejezetben található, végtelen sok végtelen sorozata létezik. Tekintsünk egy $[u, v, w]$ Coxeter-Schläfli szimbólummal adott orthoszkémet a $\mathbb{H}^3$ hiperbolikus térben, illetve az orthoszkém (c^{ij}) Coxeter-Schläfli cosinus mátrixát, és annak (h_{ij}) inverzét:

$$(c^{ij}) := \begin{pmatrix} 1 & -\cos \frac{\pi}{u} & 0 & 0 \\ -\cos \frac{\pi}{u} & 1 & -\cos \frac{\pi}{v} & 0 \\ 0 & -\cos \frac{\pi}{v} & 1 & -\cos \frac{\pi}{w} \\ 0 & 0 & -\cos \frac{\pi}{w} & 1 \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$(h_{ij}) := \frac{1}{\det((c^{ij}))} \begin{pmatrix} \sin^2 \frac{\pi}{u} - \cos^2 \frac{\pi}{v} & \cos \frac{\pi}{u} \sin^2 \frac{\pi}{w} & \cos \frac{\pi}{u} \cos \frac{\pi}{v} & \cos \frac{\pi}{u} \cos \frac{\pi}{v} \cos \frac{\pi}{w} \\ \cos \frac{\pi}{u} \sin^2 \frac{\pi}{w} & 1 - \cos^2 \frac{\pi}{w} & \cos \frac{\pi}{v} & \cos \frac{\pi}{v} \cos \frac{\pi}{w} \\ \cos \frac{\pi}{u} \cos \frac{\pi}{v} & \cos \frac{\pi}{v} & 1 - \cos^2 \frac{\pi}{u} & \cos \frac{\pi}{w} \sin^2 \frac{\pi}{u} \\ \cos \frac{\pi}{u} \cos \frac{\pi}{v} \cos \frac{\pi}{w} & \cos \frac{\pi}{v} \cos \frac{\pi}{w} & \cos \frac{\pi}{w} \sin^2 \frac{\pi}{u} & \sin^2 \frac{\pi}{u} - \cos^2 \frac{\pi}{v} \end{pmatrix} \quad (15)$$

Ahol $\det((c^{ij})) = \sin^2 \frac{\pi}{u} \sin^2 \frac{\pi}{w} - \cos^2 \frac{\pi}{v} < 0$. Tekintsük az $A_0 A_1 A_2 A_3$ csúcsokkal adott orthoszkémet az $O(1, 0, 0, 0)$ középpontú gömbmodellünkben, ekkor $A_k[\mathbf{a}_k](k = 0, 3)$ principális csúcsok a modellen kívülre esnek,

míg $A_k[\mathbf{a}_k](k = 1, 2)$ a modell belső pontjai, valamint A_1A_3 él belemetsz a modellgömbbe. Ezen feltételek biztosításához az orthoszkém mátrixának inverzét kell vizsgálni, ugyanis $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle = h_{ij}$, és a 2.fejeztben leírtak alapján $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_i \rangle < 0$ jelenti, hogy $A_i[\mathbf{a}_i]$ belső pont, míg $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_i \rangle > 0$ jelenti, hogy $A_i[\mathbf{a}_i]$ a modellen kívülre esik. Az világosan látszik, hogy előbbi feltétel mindig teljesül, azaz A_1, A_2 mindig belső pontok. Utóbbi feltételhez, tehát hogy A_0, A_3 külső csúcsok legyenek, az kell, hogy $\sin^2 \frac{\pi}{w} - \cos^2 \frac{\pi}{v} < 0$ és $\sin^2 \frac{\pi}{u} - \cos^2 \frac{\pi}{v} < 0$, amelyek pontosan akkor teljesülnek, ha $\frac{1}{w} + \frac{1}{v} < \frac{1}{2}$ és $\frac{1}{u} + \frac{1}{v} < \frac{1}{2}$. Ezek alapján a két külső csúccsal rendelkező Coxeter orthoszkémeknek az alábbi végtelen sorozatait tekinthetjük, melyeknek részletes osztályozása található [33]-ben. Jelöljük ezeket $\mathcal{F}_u^{(v,w)}$ -vel.

- $[u, v, w]$, ahol $u \geq 3, v \geq 7$ és $w \geq 3$
- $[u, v, w]$, ahol $u \geq 4, v = 5, 6$ és $w \geq 4$
- $[u, v, w]$, ahol $u \geq 5, v = 4$ és $w \geq 5$
- $[u, v, w]$, ahol $u \geq 7, v = 3$ és $w \geq 7$

Ezeknek megfelelően tekintsük a már fent említett $A_0A_1A_2A_3$ tetraédert a modellben (lásd 3.ábra), és csonkoljuk le A_0 és A_3 csúcsokat a $\pi^0 = \text{pol}(A_0)[\mathbf{a}^0]$ és $\pi^3 = \text{pol}(A_3)[\mathbf{a}^3]$ polár síkjaikkal (lásd 1.ábra). Ekkor $J = \pi^3 \cap A_0A_3, Q = \pi^3 \cap A_2A_3, E = \pi^3 \cap A_1A_3$, valamint $H = \pi^0 \cap A_0A_3, L = \pi^0 \cap A_0A_2, C = \pi^0 \cap A_0A_1$ a modell belső pontjai. Például Q pont rajta van az orthoszkém A_2A_3 élén, így felírható $\mathbf{q} \sim c \cdot \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_2$ alakban a neki megfelelő ekvivalenciaosztály, valamely c valós számra. Az ennek megfelelő pont pontosan akkor van rajta $\mathbf{a}^3$ -n, ha szorzatuk 0, tehát:

$$c \cdot \mathbf{a}_3 \mathbf{a}^3 + \mathbf{a}_2 \mathbf{a}^3 = 0 \Leftrightarrow c = -\frac{\mathbf{a}_2 \mathbf{a}^3}{\mathbf{a}_3 \mathbf{a}^3} \quad (16)$$

Ezzel $\mathbf{q}$ ekvivalenciaosztályát kifejezve:

$$\mathbf{q} \sim -\frac{\mathbf{a}_2 \mathbf{a}^3}{\mathbf{a}_3 \mathbf{a}^3} \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_2 \sim \mathbf{a}_2(\mathbf{a}_3 \mathbf{a}^3) - \mathbf{a}_3(\mathbf{a}_2 \mathbf{a}^3) = \mathbf{a}_2 h_{33} - \mathbf{a}_3 h_{23} \quad (17)$$

Hiszen $\mathbf{a}^j$ az A_j polár síkja, tehát $\mathbf{a}_i \mathbf{a}^j = \mathbf{a}_i \mathbf{a}^j = h_{ij}$. Ugyanígy a többi π^3 -on fekvő csúcs A_2 -t a megfelelő csúcsra kicserélve:

$$\mathbf{j} \sim \mathbf{a}_0(\mathbf{a}_3 \mathbf{a}^3) - \mathbf{a}_3(\mathbf{a}_0 \mathbf{a}^3) = \mathbf{a}_0 h_{33} - \mathbf{a}_3 h_{03} \quad (18)$$

$$\mathbf{e} \sim \mathbf{a}_1(\mathbf{a}_3 \mathbf{a}^3) - \mathbf{a}_3(\mathbf{a}_1 \mathbf{a}^3) = \mathbf{a}_1 h_{33} - \mathbf{a}_3 h_{13} \quad (19)$$

Illetve hasonlóan a π^0 -on fekvő csúcsoknál, A_3 szerepét A_0 -ra cserélve:

$$\mathbf{h} \sim \mathbf{a}_3(\mathbf{a}_0 \mathbf{a}^0) - \mathbf{a}_0(\mathbf{a}_3 \mathbf{a}^0) = \mathbf{a}_3 h_0 - \mathbf{a}_0 h_{03} \quad (20)$$

$$\mathbf{l} \sim \mathbf{a}_2(\mathbf{a}_0 \mathbf{a}^0) - \mathbf{a}_0(\mathbf{a}_2 \mathbf{a}^0) = \mathbf{a}_2 h_{00} - \mathbf{a}_0 h_{02} \quad (21)$$

$$\mathbf{c} \sim \mathbf{a}_1(\mathbf{a}_0 \mathbf{a}^0) - \mathbf{a}_0(\mathbf{a}_1 \mathbf{a}^0) = \mathbf{a}_1 h_0 - \mathbf{a}_0 h_{01} \quad (22)$$

Helyezzük el a kétszeresen csonkolt $QEJA_0A_1A_2HLC$ orthoszkémet a koordinátarendszerben, ahol a csúcsok koordinátái az alábbiak: $Q(1, 0, 0, 0)$, $E(1, 0, y, 0)$, $J(1, x, y, 0)$, $A_0(1, x, y, -z_0)$, $A_1(1, 0, y, -z_1)$, $A_2(1, 0, 0, -z_2)$, $H(1, x, y, -z_H)$ (lásd 3.ábra), ekkor teljesülnek az élekre vonatkozó merőlegességi feltételek. Az ismeretlenek értékeit megkaphatjuk, ha felírjuk kétféleképpen az orthoszkém éleinek hosszait, majd használjuk (5) hiperbolikus távolságformulát, illetve az inverz mátrixra vonatkozó (16)-(21) összefüggéseket.

$$\begin{aligned} \cosh(d(Q, E)) &= \frac{-\langle \mathbf{q}, \mathbf{e} \rangle}{\sqrt{\langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle \langle \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle}} = \frac{h_{13}h_{23} - h_{12}h_{33}}{\sqrt{(h_{22}h_{33} - h_{23}^2)(h_{11}h_{33} - h_{13}^2)}} = l_1 \\ \cosh(d(Q, E)) &= \frac{1}{\sqrt{(-1)(-1 + y^2)}} \end{aligned}$$

Adott orthoszkémre l_1 számolható, így $y = \sqrt{1 - \frac{1}{l_1^2}}$. Többi esetben hasonlóan:

$$\begin{aligned} \cosh(d(Q, J)) &= \frac{-\langle \mathbf{q}, \mathbf{j} \rangle}{\sqrt{\langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle \langle \mathbf{j}, \mathbf{j} \rangle}} = \frac{h_{03}h_{23} - h_{02}h_{33}}{\sqrt{(h_{22}h_{33} - h_{23}^2)(h_{00}h_{33} - h_{03}^2)}} = l_2 \\ \cosh(d(Q, J)) &= \frac{1}{\sqrt{(-1)(-1 + x^2 + y^2)}} \\ x &= \sqrt{1 - y^2 - \frac{1}{l_2^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cosh(d(E, A_1)) &= \frac{-\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{e} \rangle}{\sqrt{\langle \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1 \rangle}} = \sqrt{\frac{h_{11}h_{33} - h_{13}^2}{h_{11}h_{33}}} = l_3 \\ \cosh(d(E, A_1)) &= \frac{1 - y^2}{\sqrt{(-1 + y^2 + z_1^2)(-1 + y^2)}} \\ z_1 &= \sqrt{1 - y^2 - \frac{1 - y^2}{l_3^2}} \end{aligned}$$

$$\cosh(d(Q, A_2)) = \frac{-\langle \mathbf{a}_2, \mathbf{q} \rangle}{\sqrt{\langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2 \rangle}} = \sqrt{\frac{h_{22}h_{33} - h_{23}^2}{h_{22}h_{33}}} = l_4$$

$$\cosh(d(Q, A_2)) = \frac{1}{\sqrt{(-1 + z_2^2)(-1)}}$$

$$z_2 = \sqrt{1 - \frac{1}{l_4^2}}$$

$$\cosh(d(J, H)) = \frac{-\langle \mathbf{j}, \mathbf{h} \rangle}{\sqrt{\langle \mathbf{j}, \mathbf{j} \rangle \langle \mathbf{h}, \mathbf{h} \rangle}} = \frac{-h_{02}h_{03}h_{33} + h_{03}^2h_{23}}{\sqrt{h_{00}h_{33}(h_{22}h_{33} - h_{23}^2)(h_{00}h_{33} - h_{03}^2)}} = l_5$$

$$\cosh(d(J, H)) = \frac{1 - y^2 - x^2}{\sqrt{(-1 + y^2 + x^2 + z_H^2)(-1 + y^2 + x^2)}}$$

$$z_H = \sqrt{1 - y^2 - x^2 - \frac{1 - y^2 - x^2}{l_5^2}}$$

Tudjuk, hogy H csúcs az A_0 csúcs polár síkján fekszik, így $0 = \langle h, a_0 \rangle = -1 + x^2 + y^2 + z_0 z_H$, ahonnan $z_0 = \frac{1-x^2-y^2}{z_H}$, tehát tudjuk A_0 külső csúcs koordinátáit is. Ennek segítségével pedig számolhatjuk L és C koordinátáit, ugyanis tudjuk, hogy ezek rendre A_0A_2 és A_0A_1 szakaszokon vannak, tehát paraméterezhetjük őket: $L = (t_1x, t_1y, -t_1z_0 - (1-t_1)z_2)$, $C = (t_2x, y, -t_2z_0 - (1-t_2)z_1)$, ahol $t_1, t_2 \in [0, 1]$. Majd kihasználva, hogy A_0 polár síkján fekszenek (lásd 3.ábra):

$$0 = \langle l, a_0 \rangle = -1 + t_1x^2 + t_1y^2 + t_1z_0^2 + (1-t_1)z_0z_2$$

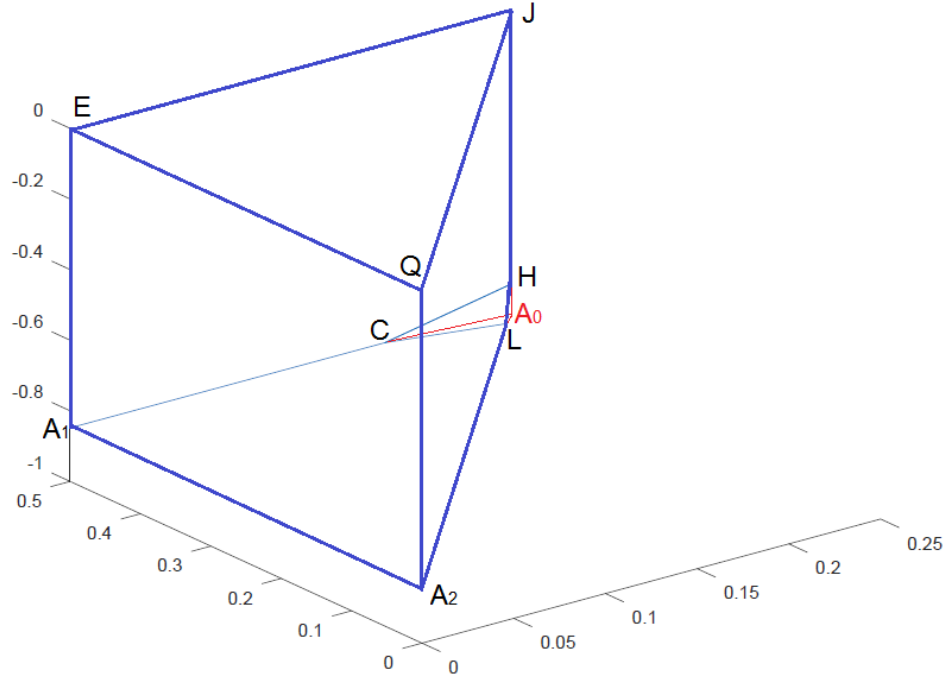
$$0 = \langle c, a_0 \rangle = -1 + t_2x^2 + y^2 + t_2z_0^2 + (1-t_2)z_0z_1$$

Ahonnan

$$t_1 = \frac{1 - z_0z_2}{x^2 + y^2 + z_0^2 - z_0z_2}, \quad t_2 = \frac{1 - y^2 - z_0z_1}{x^2 + z_0^2 - z_0z_1}$$

Ekkor kiszámolhatjuk a kétszeresen csonkolt $QEJA_1A_2HLC$ orthoszkém csúcsainak koordinátáit, illetve az 1.Tétel alapján a térfogatuk is meghatározható közelítőleg. Az alábbi táblázat tartalmazza ezeket az adatokat néhány általunk vizsgált esetben.

orthoszkém típusa	térfogat	csúcsok
$\mathcal{F}_7^{(3,7)}$	0.38325	$Q(1, 0, 0, 0), E(1, 0, 0.49697, 0), J(1, 0.23933, 0.49697, 0),$ $A_1(1, 0, 0.49697, -0.84393), A_2(1, 0, 0, -0.84393),$ $L(1, 0.22636, 0.47005, -0.84393), C(1, 0.17046, 0.49697, -0.84393)$ $H(1, 0.23933, 0.49697, -0.82440)$
$\mathcal{F}_4^{(5,5)}$	0.49789	$Q(1, 0, 0, 0), E(1, 0, 0.48587, 0), J(1, 0.48587, 0.48587, 0),$ $A_1(1, 0, 0.48587, -0.82419), A_2(1, 0, 0, -0.82419),$ $L(1, 0.33004, 0.33004, -0.82419), C(1, 0.17422, 0.48587, -0.82419)$ $H(1, 0.48587, 0.48587, -0.64047)$
$\mathcal{F}_5^{(4,6)}$	0.50747	$Q(1, 0, 0, 0), E(1, 0, 0.55589, 0), J(1, 0.40388, 0.55589, 0),$ $A_1(1, 0, 0.55589, -0.791493), A_2(1, 0, 0, -0.79149),$ $L(1, 0.31954, 0.43981, -0.79149), C(1, 0.15977, 0.55589, -0.79149)$ $H(1, 0.40388, 0.55589, -0.66693)$
$\mathcal{F}_3^{(7,3)}$	0.27899	$Q(1, 0, 0, 0), E(1, 0, 0.27580, 0), J(1, 0.47770, 0.27580, 0),$ $A_1(1, 0, 0.27580, -0.86733), A_2(1, 0, 0, -0.86733),$ $L(1, 0.38894, 0.22456, -0.86733), C(1, 0.35936, 0.27580, -0.86733)$ $H(1, 0.47770, 0.27580, -0.80216)$



3. ábra. A $[7, 3, 7]$ kétszeresen csomós Coxeter orthoszkémnél A_0 csúcsot HLC poláris síkkal, A_3 csúcsot pedig $Q EJ$ poláris síkkal csomósolva.

A fentiekben leírt, és koordinátáikkal megadott kétszeresen csonkolt Coxeter orthoszkémek olyanok (lapszögeiknek megfelelően), hogy oldalaikra vett tükörképei a $\mathbb{H}^3$ hiperbolikus teret átfedés nélkül kitöltik, amelynek így egy $\mathcal{T}_u^{(v,w)}$ kövezését adják.

Tekintsük $\mathcal{T}_u^{(v,w)}$ alaptartományát, és rendeljünk hozzá két hiperszférát az alábbiak szerint:

- Legyen az egyik hiperszféra alap hipersíkja (tehát amelytől pontjai adott távolságra vannak) $Q EJ$ sík, azaz A_3 polár síkja. Jelölje $\mathcal{H}_1$ azt a hiperszféra darabot, amelyet a hiperszféra felülete, $Q EJ$ sík, és QE , QJ , JE szakaszokra állított, az alap hipersíkra merőleges hipersíkok határolnak (lásd 4.ábra). Legyen a hiperszféra magassága h_1 .
- Legyen a másik hiperszféra alap hipersíkja (tehát amelytől pontjai adott távolságra vannak) $H LC$ sík, azaz A_0 polár síkja. Jelölje $\mathcal{H}_2$ azt a hiperszféra darabot, amelyet a hiperszféra felülete, $H LC$ sík, és HL , HC , CL szakaszokra állított, az alap hipersíkra merőleges hipersíkok határolnak (lásd 4.ábra). Legyen a hiperszféra magassága h_2 .
- Legyenek a hiperszférák olyanok, hogy a QA_2 , EA_1 , JH , LA_2 , CA_1 , A_1A_2 élek valamelyikének egy adott pontja illeszkedik mindkét hiperszféra felületére. Ez alapján 6 esetet különböztetünk meg.

1. Lemma. *Ha a fenti feltételeknek eleget tevő hiperszférák lefedik az adott orthoszkém minden élét, akkor az orthoszkém minden pontját is lefedik.*

Bizonyítás. *Az állítás ekvivalens azzal, hogy a hiperszféráknak megfelelő modellbeli ellipszoidok lefedik a modellbeli poliédert. Tekintsük a poliéder tetszőleges lapjának síkját. Az ellipszoidok ezen síkkal vett metszetei konvex alakzatok melyek lefedik a poliéder lapjának, mint sokszögnek az éleit. Tehát két konvex alakzat lefedi a sokszög éleit, akkor a teljes sokszöget le kell fedniük. Különben ha lenne a sokszögben olyan pont, mely a kettő közül egyik konvex alakzatba sem tartozik, akkor az egy-egy egyenessel elválasztható lenne a két konvex síkidomtól. A két egyenes meghatároz egy olyan szögtartományt, mely diszjunkt a két konvex síkidomtól, de a szögtartománynak kell, hogy legyen közös pontja a sokszög valamely élével. Tehát az ellipszoidoknak le kell fedniük a poliéder minden lapját.*

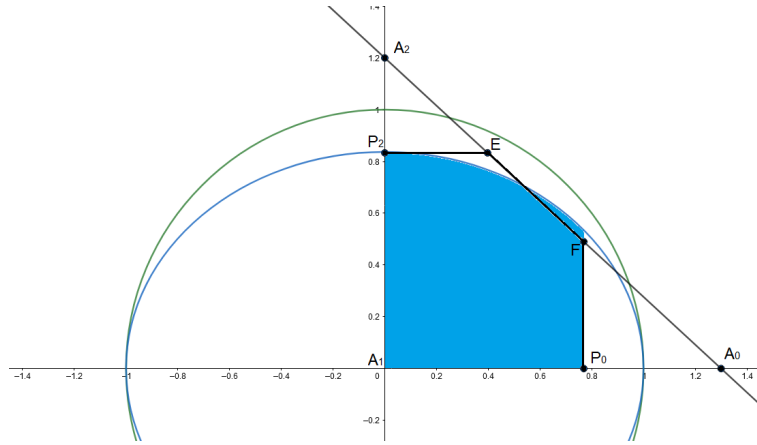
Hasonlóan feltehetjük, hogy van a poliéder belsejében olyan pont, mely nincs benne egyik ellipszoidban sem. Az ellipszoidok konvexek, így a pont

elválasztható lenne tőlük egy-egy síkkal, melyek így meghatároznak egy olyan végtelen tartományt mely diszjunkt az ellipszoidoktól. Azonban ennek a végtelen tartománynak kell, hogy legyen közös pontja a poliéder valamely lapjával. Tehát az ellipszoidok lefedik a teljes poliédert. $\square$

Tehát pontosan azok az elrendezések adják $\mathcal{F}_u^{(v,w)}$ fedését, amelyek az éleit lefedik. Ha ez teljesül, akkor $\mathcal{H}_1$ és $\mathcal{H}_2$ szimmetriacsoport általi képei a $\mathbb{H}^3$ hiperbolikus tér egy hiperszférafedését adják, jelöljük ezt $\mathcal{C}_u^{(v,w)}$ -vel.

3. Definíció. A $\mathcal{C}_u^{(v,w)}$ hip-hor fedés sűrűsége:

$$\delta(\mathcal{C}_u^{(v,w)}) = \frac{\text{Vol}(\mathcal{H}_1) + \text{Vol}(\mathcal{H}_2)}{\text{Vol}(\mathcal{F}_u^{(v,w)})}$$



4. ábra. A síkon $A_1P_0FEP_2$ kétszeresen csonkolt orthoszkém A_1P_0 éléhez (amely a fentiekkel ellentétben itt nem a csonkolásnál kapott él) rendelt hiperszférából a színezett rész jelöli $\mathcal{H}_i$ darabot, melynek térfogatát figyelembe vesszük a sűrűség definíciójában.

Az is látszik, hogy ha a hiperszférák lefedik az orthoszkémet, így a fent említett QA_2 , EA_1 , JH , LA_2 , CA_1 éleket is, de ezeknek az éleknek nincs olyan pontja, amely mindkét hiperszféra felületére illeszkedne, akkor tudjuk csökkenteni a hiperszférák magasságát, ezáltal a fedés sűrűségét, úgy hogy a fedés még mindig megvalósuljon. Tehát a fent is említett hat esetben valósul meg optimális sűrűségű fedés, vagyis amikor a 6 él valamelyikének van olyan pontja, amely illeszkedik mindkét hiperszféra felületére.

4.1. Fedni, vagy nem fedni?

Észrevehetjük, hogy Az orthoszkém A_0, A_1, A_2 csúcsainak modellbeli koordinátáira $z_0 = z_1 = z_2$, ez az orthoszkém éleinek merőlegességéből, azaz közvetlenül a definícióból következik. Így a továbbiakban legyen $z = z_0 = z_1 = z_2$.

Meghatározhatjuk az orthoszkém éleinek távolságfüggvényeit a poláris síktól: adott él egy tetszőleges pontjából merőlegest állítunk a poláris síkra, és ennek a hiperbolikus értelemben merőleges szaksznak a hossza lesz a távolság.

- HLC sík esetén LA_2, JH, CA_1 élek merőlegesek HLC -re, a poláris sík tulajdonságai miatt, így ezen élek pontjainak rendre L, H, C pontoktól kell venni a távolságát, hogy a távolságfüggvényt megkapjuk. Tehát ha a JH él egy pontja $T(1, x, y, -tz_H)$, $t \in [0, 1]$, akkor a távolságfüggvény:

$$d_{HLC}^{JH}(t) = \arccos \left(\frac{1 - x^2 - y^2 - tz_H^2}{\sqrt{(1 - x^2 - y^2 - z_H^2)(1 - x^2 - y^2 - t^2 z_H^2)}} \right)$$

Hasonlóan LA_2 és CA_1 élek távolságfüggvényei HLC -től:

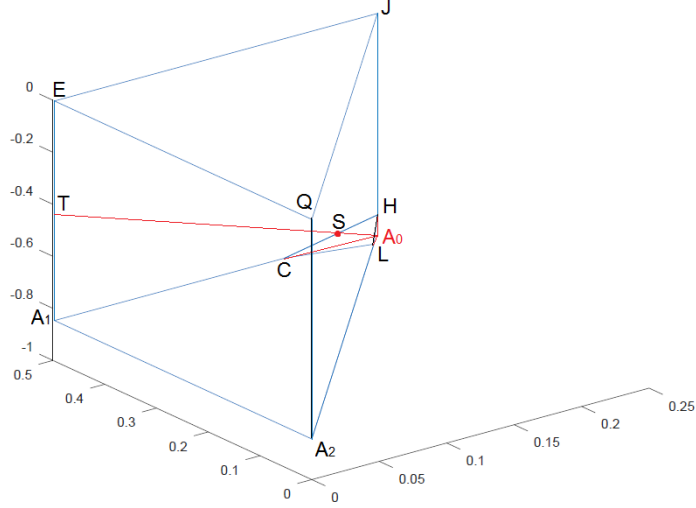
$$d_{HLC}^{LA_2}(t) = \arccos \left(\frac{1 - t(t_1x)^2 - t(t_1y)^2 - z^2}{\sqrt{(1 - (t_1x)^2 - (t_1y)^2 - z^2)(1 - (tt_1x)^2 - (tt_1y)^2 - z^2)}} \right)$$

$$d_{HLC}^{CA_1}(t) = \arccos \left(\frac{1 - t(t_2x)^2 - y^2 - z^2}{\sqrt{(1 - (t_2x)^2 - y^2 - z^2)(1 - (tt_2x)^2 - y^2 - z^2)}} \right)$$

QA_2, EA_1, A_1A_2 élek tetszőleges pontjából a HLC síkra hiperbolikus értelemben merőleges egyenes áthalad a sík poláris pontján, azaz A_0 -on. Így ha például QA_2 egy pontja $T(1, 0, 0, tz)$, $t \in [0, 1]$, akkor meg kell határoznunk TA_0 és HL egyenesek $S(1, (1-s)x, (1-s)y, stz + (1-s)z)$ metszéspontját, ahol $s \in [0, 1]$ ismeretlen paraméter (lásd 5.ábra). Az egyenesek egyenleteit felírva, és egyenlővé téve, lineáris egyenletrendszer megoldásaként kapjuk az s paramétert:

$$s = \frac{(x - t_1x)(z_H - z)}{(tz - z)(x - t_1x) - (-x)(z_H - z)}$$

Így T és S pontok távolsága adja meg a távolságfüggvényt.



5. ábra. EA_1 él és HLC sík távolságát T és S pontok távolsága adja meg.

$$d_{HLC}^{QA_2}(t) = \arccos \left(\frac{1 - tz(stz + (1-s)z)}{\sqrt{(1 - (tz)^2)(1 - ((1-s)x)^2 - ((1-s)y)^2 - (stz + (1-s)z)^2)}} \right)$$

Hasonlóan EA_1 élnél paraméterezhetjük $T(1, 0, y, tz)$ és $S(1, (1-s)x, y, stz + (1-s)z)$, $t, s \in [0, 1]$, pontokat (lásd 5.ábra), ahol s paramétert HC és TA_0 egyenesek egyenleteiből kapott egyenletrendszer megoldásaként kapjuk, illetve a távolságfüggvényt ugyanúgy S és T távolságaként.

$$s = \frac{(x - t_2x)(z_H - z)}{(tz - z)(x - t_2x) - (-x)(z_H - z)}$$

$$d_{HLC}^{EA_1}(t) = \arccos \left(\frac{1 - (1-s)y^2 - tz(stz + (1-s)z)}{\sqrt{(1 - y^2 - (tz)^2)(1 - ((1-s)x)^2 - y^2 - (stz + (1-s)z)^2)}} \right)$$

Ugyanígy A_1A_2 élnél: $T(1, 0, ty, z)$ és $S(1, (1-s)x, sty + (1-s)y, z)$, $t, s \in [0, 1]$, (lásd 5.ábra), és ekkor s , illetve a távolságfüggvény:

$$s = \frac{(x - t_2x)(t_1y - t_2y)}{(-x)(t_1y - t_2y) - (ty - y)(t_1x - t_2x)}$$

$$d_{HLC}^{A_1A_2}(t) = \arccos \left(\frac{1 - ty(sty + (1 - s)y) - z^2}{\sqrt{(1 - (ty)^2 - z^2)(1 - ((1 - s)x)^2 - (sty + (1 - s)y)^2 - z^2)}} \right)$$

- $Q EJ$ sík esetén a síkra merőlegesek QA_2 , EA_1 , JH élek a poláris sík tulajdonságai miatt, így erre a síkra a hiperbolikus értelemben merőleges egyenesek az $[x, y]$ koordináta síkra merőleges egyenesek a modellben. Tehát $(1, x, y, z)$ pontból a $Q EJ$ síkra állított merőleges egyenes talp-pontja: $(1, x, y, 0)$. Tehát ekkor a távolságfüggvények:

QA_2 , JH , EA_1 élek esetén rendre Q és $T(1, 0, 0, tz)$, E és $(1, 0, y, tz)$, J és $T(1, x, y, tz_H)$ pontok távolsága adja meg a távolságfüggvényt, ahol $t \in [0, 1]$, tehát:

$$d_{Q EJ}^{QA_2}(t) = \arccos \left(\frac{1}{\sqrt{1 - (tz)^2}} \right)$$

$$d_{Q EJ}^{EA_1}(t) = \arccos \left(\sqrt{\frac{1 - y^2}{1 - y^2 - (tz)^2}} \right)$$

$$d_{Q EJ}^{JH}(t) = \arccos \left(\sqrt{\frac{1 - x^2 - y^2}{1 - x^2 - y^2 - (tz)^2}} \right)$$

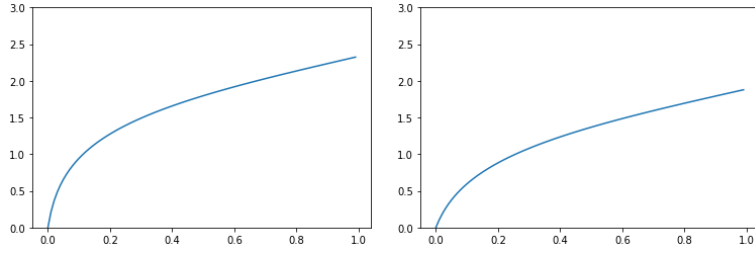
LA_2 , A_1A_2 , CA_1 élek esetén rendre $(1, tt_1x, tt_1y, z)$ és $(1, tt_1x, tt_1y, 0)$, $(1, 0, ty, z)$ és $(1, 0, ty, 0)$, $(1, tt_2x, y, z)$ és $(1, tt_2x, y, 0)$ pontok távolsága adja meg a távolságfüggvényt, ahol $t \in [0, 1]$, tehát:

$$d_{QEJ}^{LA_2}(t) = \arccos \left(\sqrt{\frac{1 - (tt_1x)^2 - (tt_1y)^2}{1 - (tt_1x)^2 - (tt_1y)^2 - z^2}} \right)$$

$$d_{QEJ}^{A_1A_2}(t) = \arccos \left(\sqrt{\frac{1 - (ty)^2}{1 - (ty)^2 - z^2}} \right)$$

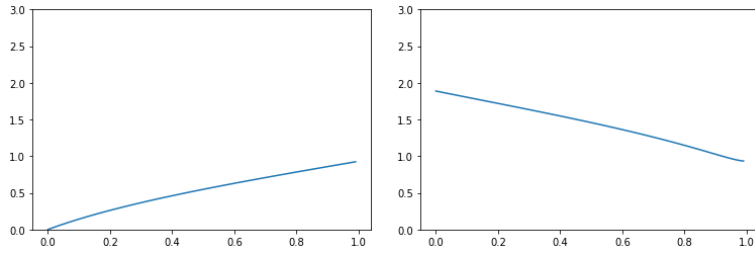
$$d_{QEJ}^{CA_1}(t) = \arccos \left(\sqrt{\frac{1 - (tt_2x)^2 - y^2}{1 - (tt_2x)^2 - y^2 - z^2}} \right)$$

Ennek a 12 távolságfüggvénynek a grafikonja a $[u, v, w] = [7, 3, 8]$ orthosz-
kém esetén:



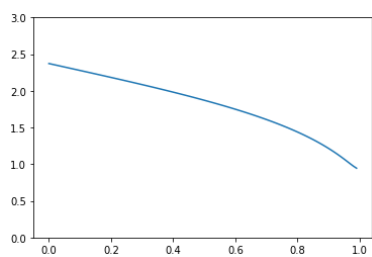
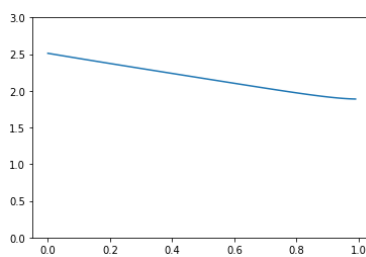
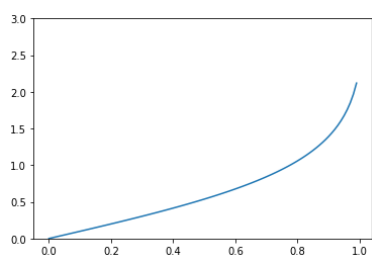
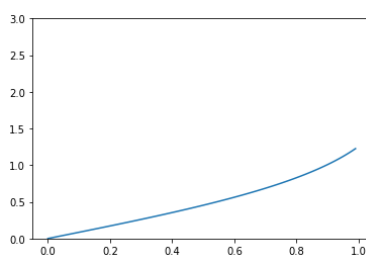
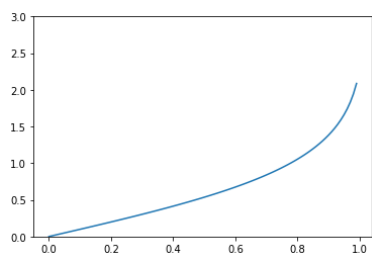
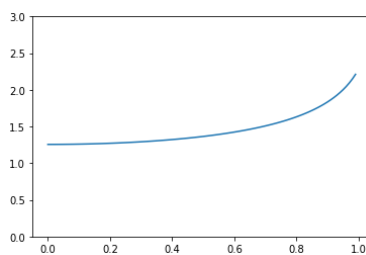
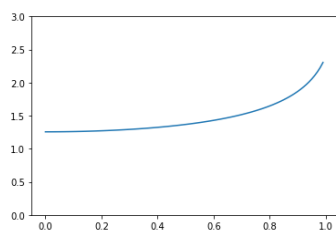
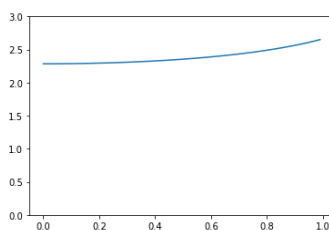
6. ábra. $d_{HLC}^{JH}(t)$

$d_{HLC}^{LA_2}(t)$



7. ábra. $d_{HLC}^{CA_1}(t)$

$d_{HLC}^{A_1A_2}(t)$

8. ábra. $d_{HLC}^{EA_1}(t)$  $d_{HLC}^{QA_2}(t)$ 9. ábra. $d_{QEJ}^{JH}(t)$  $d_{QEJ}^{QA_2}(t)$ 10. ábra. $d_{QEJ}^{EA_1}(t)$  $d_{QEJ}^{A_1A_2}(t)$ 11. ábra. $d_{QEJ}^{LA_2}(t)$  $d_{QEJ}^{CA_1}(t)$

A fent meghatározott egyváltozós valós függvényeknek a vizsgálatából az alábbi következményeket vonhatjuk le, amelyek segítenek belátni, hogy mely esetekben valósul meg fedés, és mikor nem.

- 1. Következmény.** *A távolságfüggvények szigorúan monotonak.*
- 2. Következmény.** *QA_2, A_1A_2, EA_1 élek HLC -hez legközelebbi pontjai rendre A_2, A_1, A_1 pontok.*
- 3. Következmény.** *LA_2, A_1A_2, CA_1 élek $Q EJ$ -hez legközelebbi pontjai rendre A_2, A_2, A_1 pontok.*
- 4. Következmény.** $\forall t \in [0, 1]: d_{HLC}^{A_1A_2}(t) + d_{Q EJ}^{A_1A_2}(t) \geq d(J, H)$
 $\forall t \in [0, 1]: d_{HLC}^{CA_1}(t) + d_{Q EJ}^{CA_1}(t) \geq d(J, H)$
 $\forall t \in [0, 1]: d_{HLC}^{QA_2}(t) + d_{Q EJ}^{QA_2}(t) \geq d(J, H)$

Nézzük tehát a fentiekben említett 6 esetet.

1. eset Ha az A_1A_2 él valamely T pontja helyezkedik el mindkét hiperszféra felületén. Ekkor az 1., 2. és 3. Következmény alapján $\mathcal{H}_1$ lefedí QA_2 -t és A_2T -t, $\mathcal{H}_2$ lefedí CA_1 -et és TA_1 -et, tehát együtt A_1A_2 -t is lefedik.

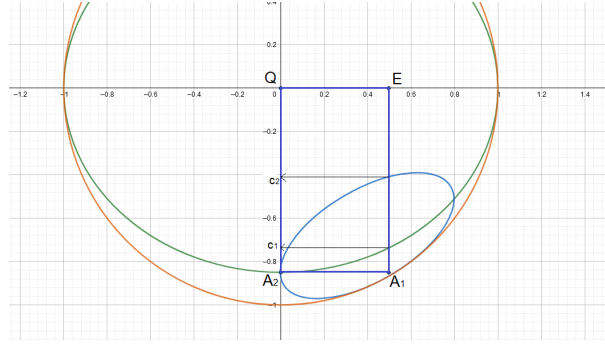
Tekintsük a hiperszféráknak modellben megfelelő ellipszoidok egyenleteit a 3.4 Fejezetben leírtaknak megfelelően (a, b, c) ismeretlenekkel, hogy ne keveredjenek a jelölések:

$$a^2 + b^2 + \frac{c^2}{\tanh^2 h_1} = 1, \quad 1 - a^2 - b^2 - c^2 = \frac{(-1 + ax + by + cz)^2}{\sinh^2 h_2} \quad (23)$$

Ugyanis HLC sík poláris pontja $A_0(1, x, y, z)$. Most nézzük az ellipszoidok síkmetszeit QEA_1A_2 és $A_0A_1A_2$ síkokkal. A síkmetszetek ellipszisek melyek egyenletét megkapjuk, ha az ellipszoidok egyenleteibe első esetben $a = 0$ -t helyettesítünk (hiszen QEA_1A_2 sík éppen $[y, z]$ koordinátasík), második esetben pedig $c = z$ -t helyettesítjük (hiszen A_0, A_1, A_2 csúcsok c -koordinátája megegyezik). Így a QEA_1A_2 síkmetszet ellipszisek egyenletei (lásd 12.ábra):

$$b^2 + \frac{c^2}{\tanh^2 h_1} = 1, \quad 1 - b^2 - c^2 = \frac{(-1 + by + cz)^2}{\sinh^2 h_2} \quad (24)$$

Rögzítsük A_1A_2 élen azt a pontot, amelyen mindkét ellipszis áthalad: ezzel rögzítettük egyenleteikben a hiperszférák h_1, h_2 magasságait, így $b = y$ helyettesítéssel ki tudjuk fejezni c_1, c_2 c -koordinátákat, vagyis hogy milyen magasságban metszik EA_1 -élt. Tehát c_1, c_2 csak az A_1A_2 azon pontjától függ, amely illeszkedik mindkét ellipszoid felületére. Ezt a pontot egy ismeretlennel paraméterezhetjük, így c_1, c_2 egyváltozós valós függvények, melyek vizsgálatánál azt kapjuk, hogy $-c_1 > -c_2$, azaz 1., 2. és 3. Következmény miatt a hiperszférák lefedik EA_1 élt. (lásd 12. ábra)



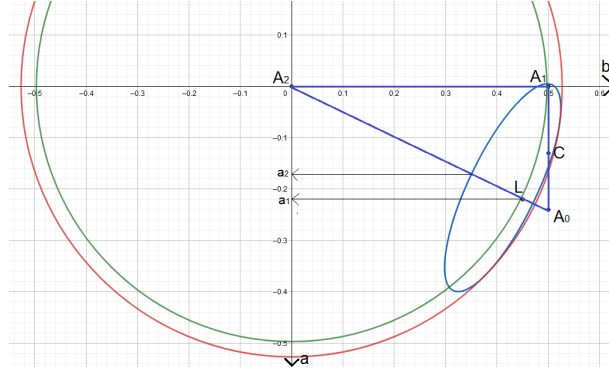
12. ábra. Az $\mathcal{F}_7^{(3,8)}$ -orthoszkém és a hiperszférák $QE A_1 A_2$ síkmetszete, a hiperszférák az $A_1 A_2$ él A_2 pontján haladnak át, és láthatóan lefedik EA_1 -et.

Ugyanígy a $A_0 A_1 A_2$ síkmetszet ellipszisek egyenletei (lásd 13. ábra):

$$a^2 + b^2 + \frac{z^2}{\tanh^2 h_1} = 1, \quad 1 - a^2 - b^2 - z^2 = \frac{(-1 + ax + by + z^2)^2}{\sinh^2 h_2} \quad (25)$$

Rögzítsük A_1A_2 élen azt a pontot, amelyen mindkét ellipszis áthalad: ezzel rögzítettük egyenleteikben a hiperszférák h_1, h_2 magasságait, így $b = \frac{y}{x}a$ helyettesítéssel ki tudjuk fejezni a_1, a_2 a -koordinátákat, vagyis, hogy hol metszik LA_2 -élt. Tehát a_1, a_2 csak az A_1A_2 azon pontjától függ, amely illeszkedik mindkét ellipszoid felületére. Ezt a pontot egy ismeretlennel paraméterezhetjük, így a_1, a_2 egyváltozós valós függvények, melyek vizsgálatánál azt kapjuk, hogy $a_1 > a_2$, azaz 1., 2. és 3. Következmény miatt a hiperszférák lefedik LA_2 élt (lásd 13. ábra).

Végül a 4. Következmény szerint $h_1 + h_2 \geq d(J, H)$, így a hiperszférák lefedik ebben az esetben JH élt is.



13. ábra. Az $\mathcal{F}_7^{(3,8)}$ -orthoszkém és a hiperszférák $A_0A_1A_2$ síkmetszete, a hiperszférák az A_1A_2 él A_1 pontján haladnak át, és láthatóan lefedik LA_2 -t.

Tehát ebben az esetben a hiperszférák lefedik az orthoszkém minden élét, így megvalósul a fedés az 1. Lemma szerint.

2. eset Ha a QA_2 él valamely T pontja helyezkedik el mindkét hiperszféra felületén. Ekkor 2. Következmény miatt $h_2 \geq d(L, A_2)$, így $\mathcal{H}_2$ lefedik CA_1 , LA_2 és A_1A_2 éleket, valamint TA_2 -t, míg $\mathcal{H}_1$ lefedik TQ -t, így együtt lefedik QA_2 -t is. 4. Következmény alapján a hiperszférák együtt lefedik JH élt, hiszen $h_1 + h_2 \geq d(J, H)$. EA_1 élhez az előzőekhez hasonlóan tekintsük az orthoszkém és a hiperszférák QEA_1A_2 síkmetszetét, így kapjuk (24)-egyenleteket. QA_2 élen a T pontot rögzítve rögzítjük h_1, h_2 magasságokat, így $b = y$ helyettesítéssel ki tudjuk fejezni c_1, c_2 c -koordinátákat, vagyis, hogy milyen magasságban metszik EA_1 élt. Így az előzőekhez hasonlóan c_1, c_2 egyváltozós valós függvények vizsgálatánál azt kapjuk, hogy $-c_1 > -c_2$, azaz 1., 2. és 3. Következmények miatt a hiperszférák lefedik EA_1 élt. (lásd 12. ábra)

Tehát ebben az esetben a hiperszférák lefedik az orthoszkém minden élét, így megvalósul a fedés az 1. Lemma szerint.

3. eset Ha a CA_1 él valamely T pontja helyezkedik el mindkét hiperszféra felületén. Ekkor 3. Következmény miatt $h_1 \geq d(C, A_1)$, így $\mathcal{H}_1$ lefedik EA_1 , QA_2 és A_1A_2 éleket, valamint TA_1 -et, míg $\mathcal{H}_2$ lefedik TC -t, így együtt lefedik CA_1 -t is. 4. Következmény alapján a hiperszférák együtt lefedik JH élt, hiszen $h_1 + h_2 \geq d(J, H)$. LA_2 élhez az előzőekhez hasonlóan tekintsük az orthoszkém és a hiperszférák $A_0A_1A_2$ síkmetszetét,

így kapjuk (25)-egyenleteket. CA_1 élen a T pontot rögzítve rögzítjük h_1, h_2 magasságokat, így $b = \frac{y}{x}a$ helyettesítéssel ki tudjuk fejezni a_1, a_2 a -koordinátákat, vagyis, hogy hol metszik LA_2 élt. Így az előzőekhez hasonlóan a_1, a_2 egyváltozós valós függvények vizsgálatánál azt kapjuk, hogy $a_1 > a_2$, azaz 1., 2. és 3. Következmények miatt a hiperszférák lefedik LA_2 élt. (lásd 13. ábra)

Tehát ebben az esetben a hiperszférák lefedik az orthoszkém minden élt, így megvalósul a fedés az 1. Lemma szerint.

4. eset Ha az EA_1 él valamely T pontja helyezkedik el mindkét hiperszféra felületén. Előzőekhez hasonlóan tekintsük az orthoszkém és a hiperszférák QEA_1A_2 síkmetszetét, így kapjuk (24)-egyenleteket. Ha $\mathcal{H}_2$ fedi le A_2 csúcsot, akkor EA_1 élen a T pontot rögzítve rögzítjük h_1, h_2 magasságokat, így $b = 0$ helyettesítéssel ki tudjuk fejezni c_1, c_2 c -koordinátákat, vagyis, hogy hol metszik QA_2 élt. Így az előzőekhez hasonlóan c_1, c_2 egyváltozós valós függvények vizsgálatánál azt kapjuk, hogy $-c_1 < -c_2$, azaz a hiperszférák nem fedik le QA_2 élt. Ha $\mathcal{H}_1$ fedi le A_2 csúcsot, akkor EA_1 élen a T pontot rögzítve rögzítjük h_1, h_2 magasságokat, így $c = z$ helyettesítéssel ki tudjuk fejezni b_1, b_2 b -koordinátákat, vagyis, hogy hol metszik A_1A_2 élt. Így az előzőekhez hasonlóan b_1, b_2 egyváltozós valós függvények vizsgálatánál azt kapjuk, hogy $b_1 < b_2$, azaz a hiperszférák nem fedik le A_1A_2 élt. (12. ábrán, ha valamelyik ellipszist lezsugorítjuk úgy, hogy EA_1 -en messék egymást, akkor vagy QA_2 -t, vagy A_1A_2 -t nem fedik le.)

Tehát ebben az esetben a hiperszférák nem fedik le az orthoszkémet.

5. eset Ha az LA_2 él valamely T pontja helyezkedik el mindkét hiperszféra felületén. Előzőekhez hasonlóan tekintsük az orthoszkém és a hiperszférák $A_0A_1A_2$ síkmetszetét, így kapjuk (25)-egyenleteket. Ha $\mathcal{H}_2$ fedi le A_1 csúcsot, akkor LA_2 élen a T pontot rögzítve rögzítjük h_1, h_2 magasságokat, így $a = 0$ helyettesítéssel ki tudjuk fejezni b_1, b_2 b -koordinátákat, vagyis, hogy hol metszik A_1A_2 élt. Így az előzőekhez hasonlóan b_1, b_2 egyváltozós valós függvények vizsgálatánál azt kapjuk, hogy $b_1 < b_2$, azaz a hiperszférák nem fedik le A_1A_2 élt. Ha $\mathcal{H}_1$ fedi le A_1 csúcsot, akkor LA_2 élen a T pontot rögzítve rögzítjük h_1, h_2 magasságokat, így $b = y$ helyettesítéssel ki tudjuk fejezni a_1, a_2 a -koordinátákat, vagyis, hogy hol metszik CA_1 élt. Így az előzőekhez hasonlóan a_1, a_2 egyváltozós valós függvények vizsgálatánál azt kapjuk, hogy $a_1 < a_2$, azaz a

hiperszférák nem fedik le CA_1 élt. (13. ábrán, ha valamelyik ellipszist lezsugorítjuk úgy, hogy LA_2 -n messék egymást, akkor vagy CA_1 -et, vagy A_1A_2 -t nem fedik le.)

Tehát ebben az esetben a hiperszférák nem fedik le az orthoszkémet.

6. eset Ha az HJ él valamely T pontja helyezkedik el mindkét hiperszféra felületén. Ha $\mathcal{H}_2$ fedi le A_2 csúcsot, akkor HJ élen a T pontot rögzítve rögzítjük h_1, h_2 magasságokat, így (23)-egyenletekbe $a = 0, b = y$ helyettesítéssel ki tudjuk fejezni c_1, c_2 c -koordinátákat, vagyis, hogy hol metszik az ellipszoidok EA_1 élt. Így az előzőekhez hasonlóan c_1, c_2 egyváltozós valós függvények vizsgálatánál azt kapjuk, hogy $-c_1 < -c_2$, azaz a hiperszférák nem fedik le EA_1 élt. Ha $\mathcal{H}_1$ fedi le A_2 csúcsot, akkor HJ élen a T pontot rögzítve rögzítjük h_1, h_2 magasságokat, így $c = z, b = \frac{y}{x}a$ helyettesítéssel ki tudjuk fejezni a_1, a_2 a -koordinátákat, vagyis, hogy hol metszik az ellipszoidok LA_2 élt. Így az előzőekhez hasonlóan a_1, a_2 egyváltozós valós függvények vizsgálatánál azt kapjuk, hogy $a_1 < a_2$, azaz a hiperszférák nem fedik le LA_2 élt.

Tehát ebben az esetben a hiperszférák nem fedik le az orthoszkémet.

Összefoglalva nem kapunk fedést, ha HJ, LA_2, EA_1 élek valamely pontja illeszkedik mindkét hiperszféra felületére, de fedést kapunk, ha A_1A_2, QA_2, CA_1 élek valamely pontja illeszkedik mindkét hiperszféra felületére.

4.2. Nem kongruens fedések

Tehát az eddigiek alapján nem kongruens hiperszférafedés azokban az esetekben valósul meg, amikor a CA_1, A_1A_2 , vagy QA_2 élek valamely pontja illeszkedik mindkét hiperszféra felületére (így speciálisan a kongruens eseteket is tartalmazhatják). Jelölje ekkor $\mathcal{A}_1$ és $\mathcal{A}_2$ rendre a $Q EJ$ és HLC hiperbolikus háromszögeket. Ezeknek a területei a Gauss-Bonnet-tétel alapján számolhatóak (lásd [20]): $Vol_2(\mathcal{A}_1) = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{q} - \frac{\pi}{p}\right)$, $Vol_2(\mathcal{A}_2) = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{q} - \frac{\pi}{r}\right)$

- Legyen $T(1, 0, 0, tz), t \in [0, 1]$ a QA_2 él egy pontja, amelyen mindkét hiperszféra áthalad. Ekkor a magasságaik: $h_1(t) = d_{Q EJ}^{QA_2}(t)$ és $h_2(t) = d_{HLC}^{QA_2}(t)$. Így (9) és (13) alapján kiszámítható az orthoszkém, illetve a fedést megvalósító $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ hiperszféradarabok térfogata, majd 3. Definíció szerint a fedés sűrűsége.

Így adott u, v, w paraméterekre a fedések sűrűsége csak a t -paramétertől függő egyváltozós valós függvények, melyek valós függvényvizsgálatával kapjuk a minimális sűrűségeket, ezeket tartalmazza az alábbi táblázat:

Orthoszkém típusa	δ_{min}	h_1	h_2
$\mathcal{F}_3^{(7,3)}$	1.28943	0.92295	1.55521
$\mathcal{F}_3^{(8,3)}$	1.34248	0.67445	1.35737
$\mathcal{F}_4^{(5,4)}$	1.54311	0.73337	1.51710
$\mathcal{F}_4^{(6,4)}$	1.66605	0.52867	1.37017
$\mathcal{F}_5^{(4,5)}$	1.79576	0.77124	1.66724
$\mathcal{F}_5^{(5,4)}$	2.00292	0.42347	1.79770
$\mathcal{F}_6^{(4,5)}$	2.23585	0.53126	1.87500
$\mathcal{F}_6^{(5,4)}$	2.60090	0.31440	2.00574
$\mathcal{F}_7^{(3,7)}$	2.31671	1.08534	2.14790
$\mathcal{F}_7^{(4,5)}$	2.77700	0.42041	2.04284

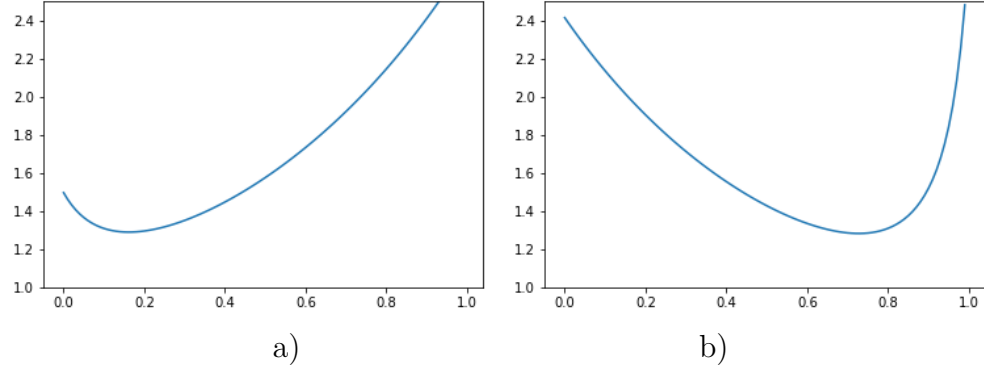
Az figyelhető meg, hogy a paraméterek további növelésével a sűrűségek is tovább nőnek, így ebben az esetben a minimális sűrűség ≈ 1.28943 , amely a $[3, 7, 3]$ kövezéshez tartozik.

- Legyen $T(1, tt_2x, y, z), t \in [0, 1]$ a CA_1 él egy pontja, amelyen mindkét hiperszféra áthalad. Ekkor a magasságaik: $h_1(t) = d_{QEJ}^{CA_1}(t)$ és $h_2(t) = d_{HLC}^{CA_1}(t)$. Így (9) és (13) alapján kiszámítható az orthoszkém, illetve a fedést megvalósító $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ hiperszféradarabok térfogata, majd 3.Definíció szerint a fedés sűrűsége.

Vegyük észre, hogy az orthoszkém szimmetriája miatt ez az eset ugyanaz, mint az előző, tehát mintha a QA_2 élen választanánk ki T pontot, csak az u és w paramétereket kell megcserélni (lásd 1.ábra).

Tehát ebben az esetben is a minimális sűrűség ≈ 1.28943 , amely a $[3, 7, 3]$ kövezéshez tartozik.

- Legyen $T(1, 0, ty, z), t \in [0, 1]$ az A_1A_2 él egy pontja, amelyen mindkét hiperszféra áthalad. Ekkor a magasságaik: $h_1(t) = d_{QEJ}^{A_1A_2}(t)$ és $h_2(t) = d_{HLC}^{A_1A_2}(t)$. Így (9) és (13) alapján kiszámítható az orthoszkém, illetve a fedést megvalósító $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ hiperszféradarabok térfogata, majd 3.Definíció szerint a fedés sűrűsége.



14. ábra. a) $\delta(\mathcal{C}_3^{(7,3)})(t)$, amikor T a QA_2 élen van b) $\delta(\mathcal{C}_7^{(3,8)})(t)$, amikor T a A_1A_2 élen van

Így adott u, v, w paraméterekre a fedések sűrűsége csak a t -paramétertől függő egyváltozós valós függvények, melyek valós függvényvizsgálatával kapjuk a minimális sűrűségeket, ezeket tartalmazza az alábbi táblázat:

Orthoszkém típusa	δ_{min}	h_1	h_2
$\mathcal{F}_3^{(7,3)}$	1.38712	1.36405	1.36405
$\mathcal{F}_3^{(8,3)}$	1.45345	1.15039	1.15039
$\mathcal{F}_4^{(5,4)}$	1.36411	1.16974	1.16974
$\mathcal{F}_4^{(5,5)}$	1.41055	1.29237	0.85103
$\mathcal{F}_5^{(4,5)}$	1.31751	1.19095	1.19095
$\mathcal{F}_5^{(4,6)}$	1.34255	1.26048	0.95234
$\mathcal{F}_6^{(4,5)}$	1.34255	0.95234	1.26048
$\mathcal{F}_6^{(4,6)}$	1.35938	1.01481	1.01481
$\mathcal{F}_7^{(3,7)}$	1.26829	1.49903	1.49903
$\mathcal{F}_7^{(3,8)}$	1.28228	1.53709	1.22995

Látható, hogy a szimmetrikus esetekben, tehát amikor $u = w$, akkor a minimális sűrűség éppen a kongruens esetben valósul meg. Továbbá az figyelhető meg, hogy a paraméterek további növelésével a sűrűségek is tovább nőnek, így ebben az esetben a minimális sűrűség nem kongruens fedést nézve ≈ 1.28228 , amely a $[7, 3, 8]$ kövezéshez tartozik.

Tehát a kapott eredmények alapján az alábbi tételt mondhatjuk ki:

2. Tétel. *A $\mathbb{H}^3$ hiperbolikus térben a kétszeresen csonkolt Coxeter orthoszkémekhez tartozó nem kongruens hiperszférafedések közül $\mathcal{C}_7^{(3,8)}$ fedési elrendezés adja a legkisebb sűrűségű fedést ≈ 1.28228 -as sűrűséggel.*

Vizsgálhatjuk továbbá a nem kongruens fedést abban az esetben is, ha $\mathcal{F}_u^{(3,7)}$ esetén az u paramétert is változtatjuk $6 < u < 7, u \in \mathbb{R}$ tartományban. Ekkor azonban nem teljesül a lapszögekre vonatkozó feltétel, így a generált szimmetriacsoportot az orthoszkémre alkalmazva, annak képei nem töltik ki a hiperbolikus teret. A korábban levezetett számítások ekkor ugyanúgy működnek a sűrűsége kétváltozós valós függvényt kapunk, melynek numerikus számításokkal meghatározhatjuk a szélsőértékeit, és az alábbi tételt mondhatjuk ki:

3. Tétel. *A $\mathbb{H}^3$ hiperbolikus térben $\mathcal{C}_u^{(3,7)}$, $(6 < u < 7, u \in \mathbb{R})$ nem kongruens fedési sűrűség minimumát $u \approx 6.45953$ esetén éri el ≈ 1.26454 -es sűrűséggel, amely kisebb, mint a FEJES TÓTH LÁSZLÓ, BÖRÖCZKY KÁROLY nevéhez tartozó, ≈ 1.280 -as sűrűségű fedés, azonban az ehhez tartozó hiperszférafedés nem terjeszthető ki a teljes hiperbolikus térre.*

4.3. Kongruens fedések

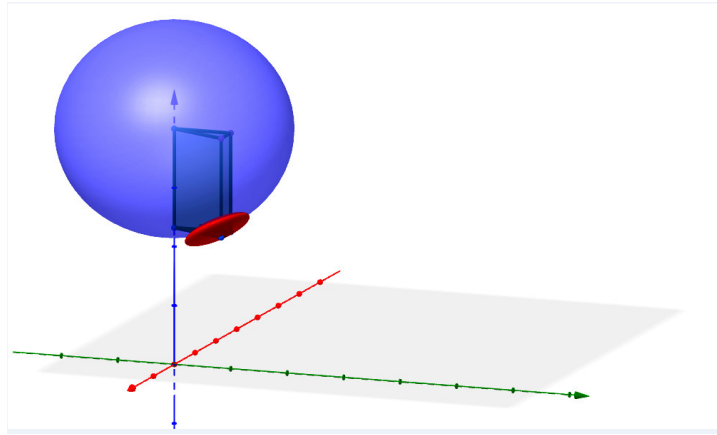
Ebben az esetben a QA_2, CA_1, A_1A_2 élek azon pontjait keressük, amelyekre a HLC -től és $Q EJ$ -től vett távolságfüggvények megegyeznek. Ahogy a nem kongruens esetben láttuk az u, v, w paraméterek növelésével nő a fedés sűrűsége, ezért az optimális fedés megtalálásához csak a korábbiakban vizsgált eseteket nézzük itt is. Ekkor az orthoszkémek éleit kiszámítva (lásd 4.fejezet eleje) azt kapjuk, hogy $d(Q, A_2) < d(L, A_2)$ és $d(C, A_1) < d(E, A_1)$. Így ha a QA_2 vagy CA_1 élek valamely pontja illeszkedik mindkét hiperszféra felületére, akkor $h_1 < h_2$ vagy $h_2 < h_1$ adódik, tehát ezekben az esetekben a fedés nem lehet kongruens.

Tehát optimális sűrűségű kongruens fedés akkor valósulhat meg, ha A_1A_2 élek valamely pontja illeszkedik mindkét hiperszféra felületére. Ezt a pontot a $d_{HLC}^{A_1A_2}(t) = d_{Q EJ}^{A_1A_2}(t)$ egyenlet megoldásából kapjuk meg, amiből $h_1 = h_2$ magasság is megkapható. Majd pedig a fedést megvalósító hiperszféra darabok, és a sűrűség ugyanúgy számítható, mint a nem kongruens esetben. Tekintsük tehát a sűrűségeket:

Orthoszkém típusa	δ_{min}	h_1	h_2
$\mathcal{F}_3^{(7,3)}$	1.38712	1.36405	1.36405
$\mathcal{F}_3^{(8,3)}$	1.45345	1.15039	1.15039
$\mathcal{F}_4^{(5,4)}$	1.36411	1.16974	1.16974
$\mathcal{F}_4^{(6,4)}$	1.45714	0.99583	0.99583
$\mathcal{F}_5^{(4,5)}$	1.31751	1.19095	1.19095
$\mathcal{F}_5^{(4,6)}$	1.45345	1.13375	1.13375
$\mathcal{F}_6^{(4,5)}$	1.45345	1.13375	1.13375
$\mathcal{F}_6^{(4,6)}$	1.35938	1.01481	1.01481
$\mathcal{F}_7^{(3,7)}$	1.26829	1.49903	1.49903
$\mathcal{F}_7^{(3,8)}$	1.36586	1.39916	1.39916

A [33]-beli eredményeket a most kiszámoltakkal kiegészítve az alábbi tétel foglalja össze:

4. Tétel. *A $\mathbb{H}^3$ hiperbolikus térben a kétszeresen csonkolt Coxeter orthoszkémekhez tartozó kongruens hiperszférafedések közül $\mathcal{C}_7^{(3,7)}$ fedési elrendezés adja a legkisebb sűrűségű fedést ≈ 1.26829 -as sűrűséggel, ez egyben a kétszeresen csonkolt Coxeter orthoszkémekhez tartozó hiperszférafedések közül is a legkisebb, és kisebb mint a $\mathbb{H}^3$ hiperbolikus térben eddig ismert legkisebb fedési sűrűség.*



15. ábra.

$\mathcal{F}_7^{(3,7)}$ orthoszkém ≈ 1.26829 -es sűrűséget produkáló hiperszférafedése

Hivatkozások

- [1] BEZDEK, K.: Sphere Packings Revisited, *Eur. J. Combin.*, **27/6** (2006), 864–883.
- [2] BOLYAI, J.: *Appendix, Scientiam Spatii absolute verum exhibens;...*, Marosvásárhely, (1831).
- [3] BÖHM, J, HERTEL, E.: *Polyedergeometrie in n-dimensionalen Räumen konstanter Krümmung*, Birkhäuser, Basel (1981).
- [4] ifj. BÖRÖCZKY KÁROLY: Kövezések, elhelyezések és fedések a hiperbolikus térben
- [5] BÖRÖCZKY, K.: Gömbelhelyezések állandó görbületű terekben I. *Math. Lapok* **25** (1974) 265–306.
- [6] BÖRÖCZKY, K.: Gömbelhelyezések állandó görbületű terekben II. *Math. Lapok* **26** (1975) 67–90.
- [7] BÖRÖCZKY, K.: Packing of spheres in spaces of constant curvature. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **32** (1978) 243–261.
- [8] BÖRÖCZKY, K. – FLORIAN, A.: Über die dichteste Kugelpackung im hyperbolischen Raum. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **15** (1964) 237–245.
- [9] BÖRÖCZKY, K. JR.: *Finite packing and covering*. Cambridge University Press (2004).
- [10] COXETER H. S. M: Discrete groups generated by reflections. *Ann. Math.* **35** (1934) 588–621.
- [11] COXETER H. S. M: Regular honeycombs in hyperbolic space. *Proceedings of the international Congress of Mathematicians, Amsterdam III* (1954) 155–169.
- [12] FEJES TÓTH L.: *Regular Figures*, Pergamon Press (1964).
- [13] FEJES TÓTH, G. – KUPERBERG, W. Packings and Covering. *Handbook of Convex Geometry*, P. M. Gruber, J. M. Wills (eds.) North Holland (1993), 799–860.

- [14] FEJES TÓTH G.: Covering the plane by convex discs. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **23** (1972) 263–270.
- [15] Á.G.HORVÁTH ÉS J. SZIRMAI: Nemeuklideszi geometriák modelljei *Typotex Kiadó (Budapest)*, 2004.
- [16] P.SZÁSZ: Bevezetés a Bolyai- Lobacsevszkij-féle geometriába *Akadémiai Kiadó (Budapest)*, 1973.
- [17] HALES T. C. – FERGUSON, S. P.: The Kepler conjecture. *Discrete and Computational Geometry* **36**(1) (2006) 1–269.
- [18] HEPPESS, A. – MOLNÁR, J.: Neuere Ergebnisse in der discreten Geometrie. *Mat. Lapok* **11** (1961) 330–355.
- [19] HORVÁTH, J. – TEMESVÁRI H. Á.: Über die Enge von Kugelpackungen und Dicke von Punktsystemen in hyperbolischen Räumen. *Math. Pannonica* **8/1** (1997) 137–154.
- [20] HORVÁTH, Á. G. Formulas on hyperbolic volume *Aequat.Math.*, **83** (2012), 97–116.
- [21] IM HOF, H.-C.: A class of hyperbolic Coxeter groups, *Expo. Math.*, (1985) **3** , 179–186.
- [22] IM HOF, H.-C.: Napier cycles and hyperbolic Coxeter groups, *Bull. Soc. Math. Belgique*, (1990) **42** , 523–545.
- [23] KELLERHALS, R.: On the volume of hyperbolic polyhedra, *Math. Ann.*, (1989) **245** , 541–569.
- [24] KELLERHALS, R.: The Dilogarithm and Volumes of Híperbolic Polytopes, *AMS Mathematical Surveys and Monographs*, (1991) **37** , 301–336.
- [25] KEPLER, J.: Strena seu de nive sexangula. *Frankfurt, Germany: Tampach* (1611) *Reprinted in Gesammelte Werke (Ed. M. Caspar and F. Hammer)*, **4** Oxford, England: Clarendon Press, (1966).
- [26] KOZMA, R. T. – SZIRMAI, J.: Optimally dense packings for fully asymptotic Coxeter tilings by horoballs of different types, *Monatsh. Math.*, **168/1** (2012), 27–47.

- [27] KOZMA, R. T. – SZIRMAI, J.: New Lower Bound for the Optimal Ball Packing Density of Hyperbolic 4-space, *Discrete Comput. Geom.*, (2014), DOI: 10.1007/s00454-014-9634-1.
- [28] KOZMA, R. T. – SZIRMAI, J.: The structure and visualization of optimal horoball packings in 3-dimensional hyperbolic space, *Submitted Manuscript*, (2016), arXiv: 1601.03620, (Melléklet: <http://homepages.math.uic.edu/~rkozma/SVOHP.html>).
- [29] KOZMA, R. T. – SZIRMAI, J.: New horoball packing density lower bound in hyperbolic 5-space, *Geometriae Dedicata*, (2019), DOI: 10.1007/s10711-019-00473-x, arXiv:1809.05411.
- [30] KOZMA, R. T. – SZIRMAI, J.: Horoball Packing Density Lower Bounds in Higher Dimensional Hyperbolic n -space for $6 \leq n \leq 9$, *Submitted Manuscript*, (2019), arXiv:1907.00595.
- [31] LANNÉR F.: On complexes with transitive groups of automorphisms. *Medd. Lunds Univ. Mat. Sem.* **11** (1950) 1–71.
- [32] MOLNÁR, E. – SZIRMAI, J.: Top dense hyperbolic ball packings and coverings for complete Coxeter orthoscheme groups, *Publications de L'institut Mathématique*, **103(117)** (2018), 129–146, DOI: 10.2298/PIM1817129M.
- [33] MOLNÁR, E. – STOJANOVIC, M. – SZIRMAI, J.: Non-fundamental trunc-simplex tilings and their optimal hyperball packings and coverings in hyperbolic space *Submitted Manuscript*(2020)
- [34] E. MOLNÁR: Polyhedron complexes with simply transitive group actions and their realizations, *Acta Math. Hung.*, **59/1-2** (1991), 175–216.
- [35] E. MOLNÁR: The projective interpretation of the eight 3-dimensional homogeneous geometries, *Beitr. Algebra Geom.*, **38** (1997), 261–288.
- [36] SZIRMAI, J.: Horoball packings to the totally asymptotic regular simplex in the hyperbolic n -space, *Aequat. Math.*, **85** (2013), 471–482, DOI: 10.1007/s00010-012-0158-6.

- [37] SZIRMAI, J.: Horoball packings and their densities by generalized simplicial density function in the hyperbolic space, *Acta Math. Hung.*, **136/1-2** (2012), 39–55, DOI: 10.1007/s10474-012-0205-8.
- [38] SZIRMAI, J.: The optimal hyperball packings related to the smallest compact arithmetic 5-orbifolds, *Kragujevac Journal of Mathematics*, **40/2** (2016), 260–270, DOI:10.5937/KgJMath1602260S, arXiv: 1306.4221.
- [39] SZIRMAI, J.: The p -gonal prism tilings and their optimal hypersphere packings in the hyperbolic 3-space, *Acta Math. Hung.*, **111(1-2)** (2006), 65–76
- [40] SZIRMAI, J.: Upper bound of density for packing of congruent hyperballs in hyperbolic 3-space, *Submitted Manuscript*, (2019)
- [41] SZIRMAI, J.: The least dense hyperball covering to the regular prism tilings in the hyperbolic n -space, *Ann. Mat. Pur. Appl.* (2016) **195/1**, 235–248, DOI: 10.1007/s10231-014-0460-0.
- [42] SZIRMAI, J.: Hyperball packings in hyperbolic 3-space, *Matematički Vesnik*, **70/3**, (2018), 211–221, arXiv: 1405.0248.
- [43] SZIRMAI, J.: Decomposition method related to saturated hyperball packings, *Ars Mathematica Contemporanea*, **16**, (2019), 349–358, DOI: 10.26493/1855-3974.1485.0b1, arXiv: 1709.04369.
- [44] SZIRMAI, J.: Horoball packings related to the 4-dimensional hyperbolic 24 cell honeycomb $\{3, 4, 3, 4\}$, *Filomat*, **32/1** (2018), 87–100, DOI: 10.2298/FIL1801087S, arXiv: 1502.02107.
- [45] SZIRMAI, J.: Packings with horo- and hyperballs generated by simple frustum orthoschemes, *Acta Math. Hungar.* **152 (2)**, (2017), 365–382, DOI:10.1007/s10474-017-0728-0.
- [46] SZIRMAI, J.: Density upper bound of congruent and non-congruent hyperball packings generated by truncated regular simplex tilings, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo Series 2*, **67** (2018), 307–322, DOI: 10.1007/s12215-017-0316-8, arXiv:1510.03208.

- [47] SZIRMAI, J.: Hyperball packings related to octahedron and cube tilings in hyperbolic space, *Contributions to Discrete Mathematics*, Accepted manuscript (2020), arXiv: 1709.04369.
- [48] SZIRMAI, J.: Congruent and non congruent hyperball packings related to doubly truncated Coxeter orthoschemes in hyperbolic 3-space, *Submitted manuscript* (2018).
- [49] SZIRMAI, J.: Congruent and non congruent hyperball packings related to doubly truncated Coxeter orthoschemes in hyperbolic 3-space, *Acta Univ. Sapientiae, Mathematica* 2 (2019) **11**, 437–459.
- [50] EPER, M.–SZIRMAI, J.: Coverings with horo- and hyperballs generated by simply truncated orthoschemes, *Submitted manuscript* (2020).
- [51] VERMES, I.: Ausfüllungen der hyperbolischen Ebene durch kongruente Hyperzykelbereiche, *Period. Math. Hungar.* (1979) **10/4**, 217–229.
- [52] VERMES, I.: Über reguläre Überdeckungen der Bolyai-Lobatschewskischen Ebene durch kongruente Hyperzykelbereiche, *Period. Math. Hungar.* (1981) **25/3**, 249–261.
- [53] VERMES, I.: Bemerkungen zum Problem der dünnsten Überdeckungen der hyperbolischen Ebene durch kongruente Hyperzykelbereiche, *Studia Sci. Math. Hungar.* (1988) **23**, 1–6.