

Fedések horo- és hiperszférákkal a 2- és 3-dimenziós hiperbolikus térben

Készítette:
Eper Miklós
Matematika Bsc III. évfolyam

Témavezető:
Dr. Szirmai Jenő
BME Geometria Tanszék

2019. október 24.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	3
2. A hiperbolikus tér projektív modellje	6
3. Coxeter kövezések és fedéseik	7
3.1. Coxeter orthoszkémek	8
3.2. Coxeter orthoszkémek által generált szimmetriacsoport	9
3.3. Coxeter orthoszkémek térfogata	12
3.4. Horo-és hiperszférák	13
4. Hip-hor gömbfedések a hiperbolikus síkon	14
4.1. C_a^1 fedések és sűrűségük	18
4.2. C_a^2 fedések és sűrűségük	19
5. Hip-hor gömbfedések a $\mathbb{H}^3$ hiperbolikus térben	20
5.1. Legritkább fedés, ha a metszéspont az A_0A_2 élen fekszik	26
5.2. Legritkább fedés, ha a metszéspont az A_0A_1 élen fekszik	29
5.3. Legritkább fedés, ha a metszéspont az A_1A_2 élen fekszik	31
5.4. Legritkább fedés, ha a metszéspont az A_0P_0 élen fekszik	35
5.5. Legritkább fedés, ha a metszéspont az A_1P_1 élen fekszik	35
5.6. Legritkább fedés, ha a metszéspont az A_2P_2 élen fekszik	35
5.7. Térbeli eredmények összefoglalása	36

1. Bevezetés

A diszkrét geometria egyik fontos kérdése a kongruens gömbök optimális sűrűségű kitöltéseinek és fedéseinek vizsgálata konstans görbületű terekben. Az euklideszi eset a leginkább ismert, itt az egyik legjelentősebb eredmény a híres *Kepler-sejtésnek* [26], HILBERT 18. problémájának megoldása, amelyre THOMAS HALES adott számítógéppel támogatott bizonyítást az ezredforulón [16]. Ez a bizonyítás FEJES TÓTH LÁSZLÓ 1950-es évekbeli gondolatain alapul [12]. A hiperbolikus esetben, már jóval több a nyitott kérdés.

A hiperbolikus terek vizsgálata egyik első megalkotója BOLYAI JÁNOS személye miatt is klasszikus magyar témának számít (lásd [2]) és ebben a témakörben FEJES TÓTH L. munkásságán és az általa alapított iskolán keresztül számtalan nagyon fontos eredmény született (a teljesség igény nélkül itt csak FEJES TÓTH GÁBOR [13, 14], id. és ifj. BÖRÖCZKY KÁROLY [5, 6, 7, 8, 9], HEPPES ALADÁR [17], HORVÁTH JENŐ, TEMESVÁRI ÁGOTA [18], BEZDEK KÁROLY [1], MOLNÁR EMIL [34] nevét említjük). Érdekes és sok vonatkozásában ma is nyitott problémákat tartalmazó kérdés a hiperbolikus terekben a kongruens és nem kongruens gömbök optimális sűrűségű kitöltéseinek és fedéseinek vizsgálata. A hiperbolikus térben a gömböknek három típusa létezik: klasszikus gömb, horoszféra és hipeszféra, melyekből utóbbi kettő nem kompakt "gömb". Továbbá hiperbolikus terekben az elhelyezés és fedés sűrűségének definiálása is döntő jelentőségű, kritikus fogalom, ahogy BÖRÖCZKY KÁROLY [5] [6] írásaiban példákon keresztül bemutatja. A leginkább elfogadott sűrűség-definiálás a gömbök lokális sűrűségét tekinti a Dirichlet-Voronoi cellákra vonatkozóan, mi is ezen lokális sűrűségfogalmat és annak kiterjesztését fogjuk használni.

A téma aktualitását jelzi, hogy n -dimenzióban ($n \geq 3$) még az sem tisztázott, hogy a legsűrűbb klasszikus gömbökkel történő gömbelhelyezés mikor valósul meg (lásd [34]). A klasszikus gömbelhelyezésekre vonatkozóan BÖRÖCZKY KÁROLY (lásd [8], [7]) bizonyította, hogy az n -dimenziós konstans görbületű térben r sugarú gömbökkel történő pakolás esetén a pakolás lokális sűrűsége a gömbök Dirichlet-Voronoi celláira vonatkozóan nem haladhatja meg az $(n+1)$ darab egymást páronként érintő r sugarú gömb középpontjaik által kifeszített szimplexre vonatkozó sűrűségét. Az ennek megfelelő legnagyobb sűrűségű elrendezés $\mathbb{H}^3$ -ben megvalósul, de nem klasszikus értelemben vett gömbökkel, hanem horoszférákkal és ≈ 0.85328 sűrűséggel. Ez a sűrűség teljesen asszimptotikus Coxeter kövezésekhez kapcsolódó horoszféra pakolásokkal többféleképpen is megvalósítható (lásd [27]). Magasabb dimenziókban

$n = 4, \dots, 9$ is érdekes és nagy sűrűségű eredmények születtek, amelyek a [28, 30, 31] munkákban olvashatók. A témavezetőm megmutatta, hogy $n \geq 4$ dimenziókban teljesen asszimptotikus szimplexekre vonatkozó lokálisan optimális horoszféra pakolás sűrűsége meghaladja a megfelelő Böröczky-féle sejtett felső határt, például $\mathbb{H}^4$ -ben a teljesen asszimptotikus szimplexekre vonatkozó lokálisan optimális horoszféra pakolás sűrűsége ≈ 0.77038 (lásd [38, 39]), de ez nem terjeszthető ki a teljes hiperbolikus térre. Klasszikus gömbökkel történő elhelyezések esetén az eddig ismert legnagyobb sűrűség [34] cikkben leírt ≈ 0.77147 . Másik alapkérdés, hogy a „nem azonos típusú” horoszférakitöltések és fedések esetén adott dimenzióban milyen lesz az optimális gömbelrendezés (lásd [38]).

A hiperszféra elhelyezésekről és fedésekről még kevesebb eredmény született. A hiperbolikus síkon VERMES I. [52] igazolta, hogy a hiperszféra pakolásokra vonatkozó felső határ $\frac{3}{\pi}$, valamint [55] cikkében megmutatta, hogy a hiperbolikus síkban a legritkább fedés sűrűsége tetszőlegesen megközelítheti a körökre illetve horociklusokra vonatkozó sűrűségértéket.

Bizonyos kövezésekhez kapcsolódó hiperszféra fedések vizsgálata található a témavezető cikkeiben ($n = 3, 4, 5$) dimenzióban a [41], [42] munkákban, valamint szabályos hiperbolikus csomkolt szimplexekkel való kövezésekhez határozza meg az optimális hiperszféra konfigurációt, [49], [44] cikkeiben. A témavezetőm [43] cikkében meghatározza a háromdimenziós telített hiperszférakitöltéseknek egy felső korlátját ≈ 0.86338 .

További eredményei kongruens és nem-kongruens hiperszférákkal való pakolásokra $\mathbb{H}^3$ -ben: [50]-ben kocka- és oktaéder alapú kövezésekre vonatkozó nem kongruens esetben ≈ 0.84931 sűrűségű. [51]-ben csomkolt Coxeter orthoszkém alapú kövezésekre vonatkozó esetben ≈ 0.81335 sűrűségű az optimális elrendezés. Több esetben talált lokálisan olyan hiperszféra elrendezést, amelyeknek sűrűsége meghaladja az elhelyezésekre vonatkozó klasszikus- gömb és horoszférákra vonatkozó Böröczky-Florian féle felső sűrűséghatárt.

A hiperszférafedésekről még kevesebbet tudunk, itt szintén ($n \geq 3$) esetén nyitott az optimális konfigurációk kérdése. A hiperbolikus síkon ($n = 2$) VERMES I. [53] bizonyította, hogy a hiperszféra vagy horoszféra fedésekre vonatkozó alsó korlát $\frac{\sqrt{12}}{\pi}$, de magasabb dimenzióban nincs hasonló eredmény a legkisebb sűrűségű fedésre. (Megjegyezzük, hogy a hiperbolikus síkon a legritkább fedés ugyanilyen sűrűséggel realizálódik, ha horoszférákat használunk.) A témavezető [34] cikkében a klasszikus gömbökkel történő fedéshez

≈ 1.368931 -as sűrűségű konfigurációt ad meg. A témavezető [44] cikkében a 3-, 4- és 5-dimenziós Coxeter kövezésekhez határozza meg a legritkább hiperszféra fedéseket. FEJES TÓTH L. [12] korszakos munkájában található ≈ 1.280 -as sűrűségű horoszféra fedés leírása, amely a $[6, 3, 3]$ parkettázáshoz kapcsolódódik.

Jelen dolgozatban az ú.n. hip-hor fedések témakörét vizsgáljuk, amely során az elhelyezések és fedések egyaránt tartalmazhatnak hiperszférákat és horoszférákat. Ezt a problémát a témavezető elhelyezésekkel kapcsolatban 2- és 3-dimenziós hiperbolikus terekben bizonyos Coxeter kövezések esetében megoldotta a [48] munkájában. A hiperbolikus síkon az elhelyezés sűrűsége tetszőlegesen megközelíti a $\frac{3}{\pi}$ felső határt, $\mathbb{H}^3$ -ban pedig az optimális elrendezés a $[7, 3, 6]$ kövezéshez kapcsolódik ≈ 0.83267 -es sűrűséggel, illetve lokálisan optimális ≈ 0.85397 sűrűség is elérhető $[p, 3, 6]$ ($6 < p < 7, p \in \mathbb{R}$) kövezés esetén.

Ebben a dolgozatban ugyanezekhez a Coxeter kövezésekhez kapcsolódóan vizsgáljuk a fedési kérdést. Megadjuk azokat a horoszféra illetve hiperszféra elrendezéseket 2- és 3-dimenziós hiperbolikus térben, amelyek a tér végtelen csúccsal rendelkező, egyszeresen csonkolt orthoszkémek Coxeter kövezéséhez kapcsolódóan, a legritkább hip-hor fedéseket eredményeznek, valamint megadjuk ezek sűrűségét.

Python programozási nyelvet használva *megmutatjuk, hogy a hiperbolikus síkon ($n = 2$) a fent említett hip-hor fedések sűrűsége tetszőlegesen megközelíti a hiperszféra vagy horoszféra fedésekre vonatkozó alsó korlátot, illetve a hiperbolikus térben ($n = 3$) az optimális elrendezés a $[7, 3, 6]$ Coxeter kövezéshez kapcsolódik, ≈ 1.27297 -es sűrűséggel, amely kisebb mint a FEJES TÓTH L. és ID. BÖRÖCZKY K. által meghatározott eddig ismert legkisebb sűrűség.* Továbbá vizsgáljuk a $[p, 3, 6]$ ($6 < p < 7, p \in \mathbb{R}$) Coxeter kövezéshez kapcsolódó lokálisan realizálódó hip-hor fedést, amely a minimumát a p paraméter ≈ 6.45962 értékére veszi fel, ≈ 1.26885 -ös sűrűséggel, azonban ezen lokálisan optimális fedéshez tartozó parkettázás nem terjeszthető ki a teljes hiperbolikus térre.

Főbb eredményeinket a síkbeli esetben 2. és 3. Tételben, térbeli esetben 4. és 5. Tételben foglaltuk össze.

2. A hiperbolikus tér projektív modellje

Számításainkhoz a $\mathbb{H}^n$ tér E. BELTRAMI, A. CAYLEY és F. C. KLEIN nevéhez köthető jól ismert projektív modelljét használjuk. A modellt a $\mathbb{E}^{1,n}$, $(1, n)$ szignatúrával rendelkező Lorentz térben értelmezzük, azaz tekintsük a $\mathbf{V}^{n+1}$ valós vektorteret a

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = -x^0 y^0 + x^1 y^1 + \dots + x^n y^n \quad (1)$$

$(1, n)$ szignatúrájú bilineáris forma megadásával. Továbbá $\mathbf{x} = (x^0, \dots, x^n) \in \mathbf{V}^{n+1}$ és $\mathbf{y} = (y^0, \dots, y^n) \in \mathbf{V}^{n+1}$ nemnulla vektorokra az alábbi ekvivalenciarelációnak megfelelően egy valós c nem zéró szorzó erejéig egyértelműen meghatároznak egy pontot a $\mathcal{P}^n(\mathbb{R})$ valós projektív térben:

$$\mathbf{x} \sim \mathbf{y} \longleftrightarrow \exists c \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \mathbf{y} = c \cdot \mathbf{x} \quad (2)$$

$\sim$ -al vett faktorizálás a $\mathcal{P}^n(\mathbf{V}^{n+1}, \mathbf{V}_{n+1}, \langle ; \rangle)$ n -dimenziós valós projektív metrikus teret indukálja. A $\mathbb{H}^n$ n -dimenziós tér pontjait a modellben a $\mathcal{P}^n(\mathbf{V}^{n+1}, \mathbf{V}_{n+1})$ projektív térnek a

$$Q = \{[\mathbf{x}] \in \mathcal{P}^n \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0\} = \partial \mathbb{H}^n \quad (3)$$

kvadratikusan forma által "meghatározott tartomány" belső pontjai tartoznak. Ekkor $\mathbb{H}^n$ modellezhető, mint a Q kúp-komponens belseje.

A tér "valós" pontjait azon belső $\mathbf{x} \in \mathbb{H}^n$ pontok alkotják, amelyekre $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle < 0$. A Q pontjai $\partial \mathbb{H}^n$ a projektív térben $\mathcal{P}^n$ az abszolút alakzatot határozzák meg, amely a $\mathbb{H}^n$ végtelen távoli pontjait tartalmazza. Azon pontok, amelyekre $\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle > 0$ a modellen kívül találhatók és a $\mathbb{H}^n$ külső pontjainak nevezzük. Legyen $P[\mathbf{x}] \in \mathcal{P}^n$, ekkor $R[\mathbf{y}] \in \mathcal{P}^n$ pontot a $P[\mathbf{x}]$ -hez a Q -ra vonatkoztatva konjugáltak mondjuk, ha $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$ teljesül. Azon pontok halmaza, amelyek konjugáltak valamely $P[\mathbf{x}] \in \mathcal{P}^n$ ponthoz, a pont polár síkját alkotják: $pol(P) = \{[\mathbf{y}] \in \mathcal{P}^n \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0\}$. Így a Q bilineáris forma (3) egy a bijektív megfeleltetést (lineáris polaritást) $(\mathbf{V}^{n+1} \rightarrow \mathbf{V}_{n+1})$ határoz meg $\mathcal{P}^n$ pontjai és hipersíkjai között. A $\mathcal{P}^n$ egyenesei jellemezhetők mint a $\mathbf{V}^{n+1}$ 2-alterei vagy mint az $(n-1)$ -alterei a $\mathbf{V}_{n+1}$ formatérnek (lásd [36]). Ekkor $P[\mathbf{x}]$ pont illeszkedik $\alpha[\mathbf{a}]$ hipersíkra, ha $\langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle = 0$ teljesül. $(\mathbf{x} \in \mathbf{V}^{n+1} \setminus \{0\}, \mathbf{a} \in \mathbf{V}_{n+1} \setminus \{0\})$.

Így a Q abszolút alakzat metszete az $x^n = 1$ hipersíkkal, éppen a már említett Beltrami-Cayley-Klein modellt adja. A hiperbolikus tér axiómáinak ellenőrzésével láthatjuk, hogy a megadott struktúra valóban a hiperbolikus teret adja meg.

A fent leírt projektív modellben értelmezzük a távolságot, a definiált skaláris szorzásnak megfelelően. Ebből megadható a hiperbolikus távolság ebben a modellben. Tehát $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{H}^n$ pontok távolsága

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{k}{2} \ln \frac{-\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2 - \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle}}{-\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle - \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^2 - \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle}}, \quad (4)$$

amely a Beltrami-Cayley-Klein modellben értelmezett kettősviszonyon alapuló definícióból jön. $\mathbb{H}^n$ metszetgörbülete $\frac{1}{K} = -k^2$, innen $k = \sqrt{\frac{-1}{K}} \in \mathbb{R}$ metrikus konstans, amelyről a továbbiakban feltesszük, hogy $k = 1$. A távolságképlet a következő szerint írható át:

$$\cosh d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{-\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle}} \quad (5)$$

A hiperbolikus tér projektív modelljének részletes leírása megtalálható: [15],[36]

3. Coxeter kövezések és fedéseik

A $\mathbb{H}^n$ n -dimenziós hiperbolikus tér kövezéseinek egy karakterizációja ifj. Böröczky Károly [4] összefoglaló cikkében látható az alábbiak szerint: konvex poliéderek egy $\mathcal{T}$ családja $\mathbb{H}^n$ -beli kövezés, ha:

- $\mathcal{T}$ elemei lefedik $\mathbb{H}^n$ -t,
- bármely kompakt halmazt $\mathcal{T}$ -nek csak véges sok eleme metsz,
- $\mathcal{T}$ bármely két elemének metszete ($0 \leq k < n$)-dimenziós közös lap.

Ilyen kövezések többféle módon generálhatók, jelen írásban olyan periódikus kövezéseket tekintünk, amelyek alaptartományai egyszeresen csonkolt Coxeter-orthoszkémek.

3.1. Coxeter orthoszkémek

1. Definíció. A $\mathbb{H}^n$ ($2 \leq n \in \mathbb{N}$) térben $\mathcal{S}$ (klasszikus) orthoszkém olyan $H^0, \dots, H^n$, $(n+1)$ hipersíkkal határolt szimplex (lásd [3, 24]), amelyre $H^i \perp H^j$, teljesül, ha csak $j \neq i-1, i, i+1$.

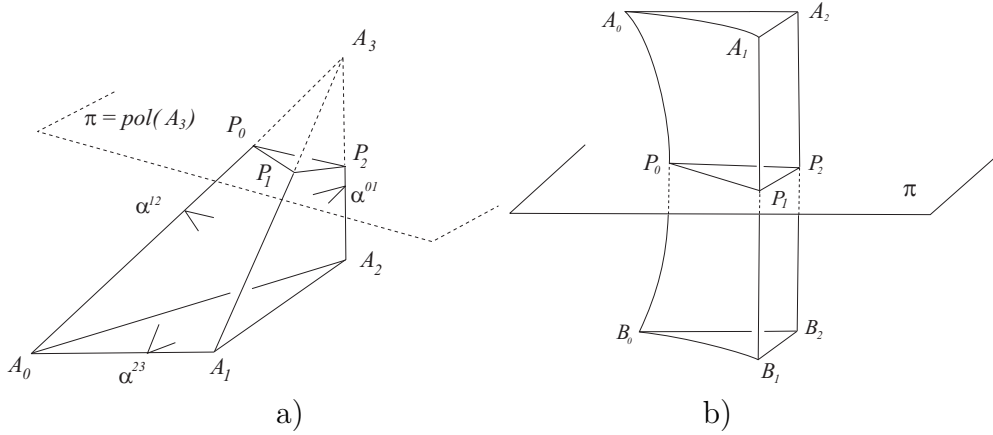
2. Definíció. A $\mathbb{H}^n$ térben a d -ed rendű, vagy d -szer csonkolt ($(0 \leq d \leq 2)$ általánosított) orthoszkém egy $n+d+1$ hipersíkkal határolt $H^0, H^1, \dots, H^{n+d}$ politóp amelyben $H^i \perp H^j$ minden $j \neq i-1, i, i+1$ esetén, ($d = 2$ -höz tartozó, indexeket modulo $n+3$ tekintjük).

A klasszikus ($d = 0$) orthoszkémek esetében az A_i ($n \geq 2$) csúcsokkal szemközti hipersíkokat jelölje H^i ($0 \leq i \leq n$), továbbá az $\mathcal{S}$ orthoszkémnek jelölje α^{ij} a H^i és H^j síkjainak a szögét: $\alpha^{ij} = \frac{\pi}{2}$, if $0 \leq i < j-1 \leq n$. A maradék n lapszögét $\alpha^{i,i+1}$, ($0 \leq i \leq n-1$) az $\mathcal{S}$ orthoszkém lényeges szögeinek nevezzük (lásd 1. ábra) A d -fokú Coxeter orthoszkémek geometriailag a következőképpen írhatók le:

- $d = 0$ esetben megegyeznek a SCHLÄFLI által meghatározott klasszikus orthoszkémekkel (1. Definíció). Jellemzőjük, hogy megadható csúcsaiknak $A_0 A_1 \dots A_n$ sorozata, hogy $\forall i \in \{0, \dots, n-3\}$ $A_i A_{i+1}$ él merőleges $A_{i+2} A_{i+3}$ élre. Ekkor a sorozat első és utolsó csúcsát A_0 -t és A_n -et az orthoszkém principális csúcsainak nevezzük. Ebben az esetben az orthoszkém valamennyi csúcsa a hiperbolikus tér "valós" belső pontja vagy határpontja.
- $d = 1$ esetben az orthoszkém A_n principális csúcsa a Q abszolút alakzaton kívül esik, tehát a hiperbolikus tér "külső" pontja. Ekkor ezt a csúcsot lecsonkoljuk a $pol(A_n)$ polár síkjával, és az így keletkező testet vizsgáljuk (lásd 1. ábra). Ebben az esetben egyszeresen csonkolt orthoszkémnek nevezzük, A_n külső csúcscsal.
- $d = 2$ esetben az orthoszkém mindkét A_0, A_n principális csúcsa a hiperbolikus tér "külső" pontja, tehát a Q abszolút alakzaton kívül esik, így ekkor ezeket a csúcsokat a $pol(A_0)$ és $pol(A_n)$ polár síkokkal lecsonkoljuk. A keletkező csonkolt szimplexet nevezzük kétszeresen csonkolt orthoszkémnek. Ebben az esetben két részesetet különböztetünk meg attól függően, hogy az $A_0 A_n$ egyenesének van-e a hiperbolikus térrel közös pontja vagy nincs. Például, a háromdimenziós hiperbolikus térben, a Lambert kocka nevezetes kövezését származtathatjuk, ha

$A_0A_3 \cap \overline{\mathbb{H}}^3 = \emptyset$ és további szögfeltételek teljesülnek. Pl. az A_0, A_3 -al szemközti $pol(A_0)$ és $pol(A_3)$ csonkoló polár síkok (lapok) szöge is a π egész (>1) hányada.

Általánosan a Coxeter-orthoszkémeket H.-C. IM HOF [22] írásában osztályozta. Bebizonyította, hogy csak ≤ 9 dimenziókban léteznek és teljes felsorolásukat adta. Ebből az osztályozásból származik, hogy $d = 1$ -fokú Coxeter orthoszkémek csak 2-, 3- és 5-dimenziós hiperbolikus térben léteznek.



1. ábra. a) 3-dimenziós $d = 1$ -fokú Coxeter orthoszkém (egyszeresen csonkolt orthoszkém) A_3 külső csúccsal. Az orthoszkémet $\pi = pol(A_3)$ polár síkkal csonkoltuk. b) Egyszeresen csonkolt orthoszkém π -re tükrözve.

3.2. Coxeter orthoszkémek által generált szimmetriacsoport

Másik lehetséges jellemzése a kövezéseknek a szimmetriacsoportjuk segítségével történhet, ilyenkor a kövezést periódikusnak is nevezzük. A kövezés periódikus, ha létezik olyan konvex poliéder, melynek szimmetriacsoport szerinti képei a tér egy kövezését adják, ekkor ezt a poliédert a kövezés alaptartományának nevezzük. Ha $\mathcal{T}$ jelöli a kövezést, akkor jelöljük a szimmetriacsoportját $Sym\mathcal{T}$ -vel.

1. Megjegyzés. BÖRÖCZKY K. konstruált a hiperbolikus síkon konvex sokszög egybevágó példányaival kövezést, amely nem periódikus és bizonyította, hogy ilyen kövezés periódikus módon nem lehetséges [5]. Később hasonló konstrukciók születtek magasabb dimenzióban is [35].

Tekintsük át a véges Coxeter csoportok definícióját. Ezen csoportokat az $\{r_1, \dots, r_n\}$ generátor elemekkel és definiáló relációkkal az alábbi módon lehet megadni:

$$G = \langle r_1, \dots, r_n \mid (r_i r_j)^{m_{ij}} = 1 \rangle, \quad (6)$$

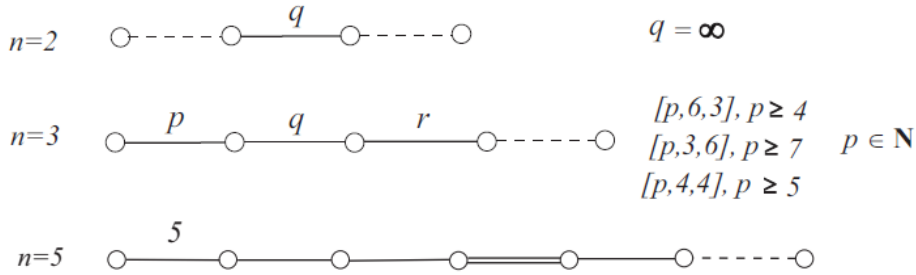
ahol $m_{ii} = 1$ és $m_{ij} \geq 2$, ha $i \neq j$, illetve ha $m_{ij} = \infty$, akkor az (r_i, r_j) párhoz nem tartozik definiáló reláció.

A G Coxeter csoport Coxeter-mátrixán azt az $n \times n$ -es szimmetrikus M mátrixot értjük, amelynek sorai és oszlopai r_i -kkel vannak indexelve és ij -edik eleme: $M_{ij} = m_{ij}$. Ehhez kapcsolódik a csoport C Schläfli-mátrixa, amely M -el meggyegyző méretű, sorai és oszlopai ugyanígy vannak indexelve, és ij -edik eleme: $C_{ij} = -\cos \frac{\pi}{M_{ij}}$. G Coxeter-Schläfli gráfján azt a címkézett gráfot értjük, amelynek csúcsai $\{r_1, \dots, r_n\}$ elemei, két csúcs pontosan akkor van összekötve, ha $m_{ij} > 2$, illetve egy él pontosan akkor van megcímkézve m_{ij} -vel, ha az legalább 4.

Jelen írásban a $d = 1$ fokú Coxeter orthoszkémekkel foglalkozunk, ahol A_0 principiális csúcs végtelen távoli pont, a Q abszolút alakzaton helyezkedik el. ($\mathbb{H}^n$ -ben egy ilyen $\mathcal{S}$ orthoszkém csúcsai $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}, P_0, P_1, \dots, P_{n-1}$, ahol $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}$ a lecsonkolt A_n csúcs π polár síkján fekszenek, lásd 1. ábra $n = 3$ esetben.) Ekkor észrevehetjük, hogy a korábban geometriailag leírt egyszeresen csonkolt Coxeter orthoszkémnek oldallapjaira való tükrözései, Coxeter csoport generátorrendszerét alkotják. Tekintsünk tehát olyan periódikus $\mathcal{T}$ kövezéseket $\overline{\mathbb{H}}^n$ ($n \geq 2$)-ben, ahol a $Sym\mathcal{T}$ szimmetriacsoportnak egy d -rendű általánosított orthoszkém az alaptartománya, és a csoportot az orthoszkém $(n-1)$ -dimenziós hiperlapjaira vonatkozó tükrözések generálják (csonkolt esetben a csonkoló lapra is tükrözünk). A $\overline{\mathbb{H}}^n$ ($n \geq 2$) térben szimplexekkel csak akkor tudunk hipersík tükrözésekkel kövezést generálni, ha minden egyes lapszöge a π egész számú hányada (pl. a hiperbolikus síkon a "zérol szöget" is megengedhetjük (azaz a ∞ -vel való osztást) bizonyos "elég kényes" és itt nem részletezett feltételekkel). Ez alapján egy egyszeresen csonkolt Coxeter orthoszkém által generált szimmetriacsoport elemeit az orthoszkémre alkalmazva, képei átfedés nélkül kitöltik az n -dimenziós hiperbolikus teret pontosan akkor, ha lapjai által bezárt szögek π egész számú hányadosai, és ekkor periódikus kövezés alaptartományaként $\mathbb{H}^n$ $\mathcal{T}$ parkettázását adják.

Így a Coxeter csoportokra értelmezett mátrixokat és gráfot orthoszkémekre is értelmezhetjük. Egy általánosított $S \subset \overline{\mathbb{H}}^n$ Coxeter orthoszkémet

súlyozott gráfjával (Coxeter-Schläfli szimbólumával) jellemezhetjük. Ebben a csúcsok a szimplex hipersíkjait jelölik és két csúcsot összekötő éléhez a k_i súlyt rendeljük ha a hipersíkok lapszöge $\frac{\pi}{k_i}$. Formálisan a gráfban $k_i - 2$ vonallal kötünk össze két csúcsot ha $k_i = 3, 4$ és egy vonallal, de k_i súllyal megjelölve $k_i \geq 5$ esetében. Ha két sík merőleges egymásra, akkor nem kötjük össze a megfelelő csúcsokat. Ha S két határoló hipersíkja párhuzamos, akkor megfelelő súly ∞ . Ha a két hipersík ultraparallel akkor a gráfban pontozott vonallal jelöljük (lásd 2. ábra). A $[k_1, \dots, k_{n-1}, k_n]$ rendezett halmazt a $\mathcal{S}$ orthoszkém által generált $\mathcal{T}$ kövezés *Coxeter-Schläfli* szimbólumának nevezzük.



2. ábra. $d = 1$ -fokú Coxeter kövezések Coxeter-Schläfli gráfjai

A szimbólumokhoz hozzárendelhető egy $(n+1) \times (n+1)$ szimmetrikus (c^{ij}) *Coxeter-Schläfli mátrix*, ahol $i \neq j \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, c^{ij} egyenlő $-\cos \frac{\pi}{k_{ij}}$. Például, az 5-dimenziós hiperbolikus térben $\mathbb{H}^5$ ha a súlyokra $k_1 = p, k_2 = q, k_3 = r, k_4 = s, k_5 = t$ akkor:

$$(c^{ij}) := \begin{pmatrix} 1 & -\cos \frac{\pi}{p} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\cos \frac{\pi}{p} & 1 & -\cos \frac{\pi}{q} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos \frac{\pi}{q} & 1 & -\cos \frac{\pi}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\cos \frac{\pi}{r} & 1 & -\cos \frac{\pi}{s} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\cos \frac{\pi}{s} & 1 & -\cos \frac{\pi}{t} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\cos \frac{\pi}{t} & 1 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Ahogy már említettük IM HOF [21] eredményét, egyszeresen csonkolt orthoszkémek csak 2-, 3- és 5-dimenziós hiperbolikus térben léteznek. Coxeter-Schläfli gráfjaik, illetve a hozzájuk tartozó Coxeter-Schläfli szimbólumok a 2. ábrán láthatóak. Ezen parkettázások kapják a főszerepet jelen dolgozatban.

2. Megjegyzés. Az állandó görbületű terekben a Coxeter csoportok illetve a Coxeter szimplexek fontos szerepet játszanak. A szférikus és euklideszi Coxeter szimplexeket H. S. M. COXETER osztályozta [10] cikkében.

A hiperbolikus terekben véges vagy végtelen csúcsú Coxeter szimplexek osztályozását és teljes felsorolását H. S. M. COXETER és G. J. WHITROW [11], F. LANNÉR [33], J.-L. KOSZUL és M. CHEIN végezték el. Ilyen típusú Coxeter szimplexek ≤ 9 dimenzióig léteznek.

Ha megengedünk külső csúcsokat is, akkor magasabb dimenzióban is találunk Coxeter szimplexeket, de teljes osztályozás nincs.

3.3. Coxeter orthoszkémek térfogata

- A $\mathbb{H}^2$ hiperbolikus térben:

A hiperbolikus síkon az egyszeresen csonkolt orthoszkém egy Lambert-féle négyszög, melynek három szöge derékszög, illetve a negyedik szöge hegyesszög. Esetünkben ez a negyedik csúcs a végtelenben van, vagyis ezen csúcshoz tartozó szög 0. A négyszög területe a hiperbolikus háromszögek jól ismert területképlete alapján számolható (lásd [19]):

$$Vol_2(\mathcal{S}) = \frac{\pi}{2} \quad (8)$$

- A $\mathbb{H}^3$ hiperbolikus térben:

Ekkor a vizsgált poliéder $A_0A_1A_2P_0P_1P_2$ egy egyszeresen csonkolt orthoszkém A_3 külső csúccsal (lásd 1.ábra), melynek térfogata R. KELLERHALS alábbi tétele alapján számolható [23]:

1. Tétel. A három dimenziós $\mathcal{S}$ hiperbolikus orthoszkém térfogata (a Lambert kocka kivételével) kifejezhető a lapok hajlásszögeivel $\alpha_{01}, \alpha_{12}, \alpha_{23}$, $(0 \leq \alpha_{ij} \leq \frac{\pi}{2})$ (1.ábra) a következő formula szerint:

$$\begin{aligned} Vol_3(\mathcal{S}) = \frac{1}{4} \{ & \mathcal{L}(\alpha_{01} + \theta) - \mathcal{L}(\alpha_{01} - \theta) + \mathcal{L}(\frac{\pi}{2} + \alpha_{12} - \theta) + \\ & + \mathcal{L}(\frac{\pi}{2} - \alpha_{12} - \theta) + \mathcal{L}(\alpha_{23} + \theta) - \mathcal{L}(\alpha_{23} - \theta) + 2\mathcal{L}(\frac{\pi}{2} - \theta) \}, \end{aligned} \quad (9)$$

ahol $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$ az alábbi formula szerint van definiálva:

$$\tan(\theta) = \frac{\sqrt{\cos^2 \alpha_{12} - \sin^2 \alpha_{01} \sin^2 \alpha_{23}}}{\cos \alpha_{01} \cos \alpha_{23}}$$

és ahol $\mathcal{L}(x) := -\int_0^x \log |2 \sin t| dt$ a Lobachevsky függvényt jelöli.
 $\mathcal{T}_{pqr}$ parkettázásnál: $\alpha_{01} = \frac{\pi}{p}$, $\alpha_{12} = \frac{\pi}{q}$, $\alpha_{23} = \frac{\pi}{r}$.

3.4. Horo-és hiperszférák

Az n -dimenziós hiperbolikus térben a gömböknek 3 fajtája létezik: a klasszikus gömb, a horoszféra és a hiperszféra, melyek közül az utóbbi kettő "végtelen sugarú" gömb. A hiperbolikus tér fedését itt horo- és hiperszférákkal valósítjuk meg úgy, hogy a gömböket a $\mathbb{H}^n$ tér egy fent leírt kövezéséhez rendeljük. Tehát a kövezés alaptartományát, az egyszeresen csunkolt orthoszkémet lefedjük horo- és hiperszférákkal, majd az orthoszkém képeinek megfelelően a gömbök a tér fedését adják. Ehhez tekintsük a horo- és hiperszférák adatait:

- A horoszféra $\mathbb{H}^n$ -ben ($n \geq 2$) egy n -dimenziós végtelen sugarú gömb, melynek középpontja ideális pont $\partial\mathbb{H}^n$ -en. Ezzel ekvivalens megfogalmazás, hogy a horoszféra egy $(n-1)$ -dimenziós felület, amely merőleges párhuzamos egyenesek egy seregére, amelyek közös végtelen távoli pontja a horoszféra középpontja.

Tekintsük a már említett Beltrami-Cayley-Klein gömbmodellt, amelynek középpontja $O(1, 0, \dots, 0)$. Ekkor a horoszféra középpontja legyen $T_0(1, 0, \dots, 1)$, illetve menjen át $S(1, 0, \dots, s)$ ($|s| < 1$) ponton. Így a horoszféra Descartes-koordinátarendszerbeli egyenlete ($h_1, \dots, h_n$ változókkal) megkapható az abszolút gömb $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$, illetve az abszolút gömböt T_0 -ban érintő $x^0 - x^n = 0$ hipersík egyenletéből (lásd [47]):

$$\frac{2 \left(\sum_{i=1}^{n-1} h_i^2 \right)}{1-s} + \frac{4 \left(h_n - \frac{s+1}{2} \right)^2}{(1-s)^2} = 1. \quad (10)$$

A térfogat felírásához BOLYAI JÁNOS 19. századból származó eredményeit használhatjuk. A horoszféra felületén lévő $L(x)$ geodetikus hiperbolikus hossza megkapható a hozzá tartozó x húr hosszából:

$$L(x) = 2 \sinh \left(\frac{x}{2} \right) \quad (11)$$

A horoszféra felület belső geometriája euklideszi, így a rajta lévő $(n-1)$ -dimenziós $\mathcal{A}$ poliéder $\mathcal{A}$ térfogata $\mathbb{E}^{n-1}$ -ben számolható. A horoszféra

azon $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ darabjának térfogata, amelyet a felületen lévő $\mathcal{A}$ poliéder és középpontja határoz meg, a következőképpen kapjuk:

$$Vol(\mathcal{H}(\mathcal{A})) = \frac{1}{n-1} A. \quad (12)$$

- A hiperszféra felülete $\mathbb{H}^n$ -ben ($n \geq 2$) egy másodrendű felület, amely állandó távolságra van egy hipersíktól, az általa meghatározott mindkét féltérben. Az n -dimenziós "fél-hiperszférát", amely h távolságra van a π hipersíktól, jelöljük $\mathcal{H}_n^h$ -el (a modellben h -nak megfelelő távolság $\tanh h$). A fenti modellben felírható $\mathcal{H}_n^h$ egyenlete (tegyük fel, hogy π az $x^n = 0$ sík) (lásd [15]):

$$\sum_{i=1}^{n-1} h_i^2 + \frac{h_n^2}{\tanh^2 h} = 1 \quad (13)$$

Legyen $\mathcal{A}_{n-1}$ $(n-1)$ -dimenziós poliéder a π hipersíkon. Legyen $\mathcal{H}_n^h(\mathcal{A}_{n-1})$ a hiperszféra azon korlátos darabja amelyet π , a hiperszféra felület, illetve a π -re merőleges $\mathcal{A}_{n-1}$ $(n-2)$ -dimenziós hiperlapjait tartalmazó $(n-1)$ -dimenziós hipersíkok határolnak. $\mathcal{H}_n^h(\mathcal{A}_{n-1})$ térfogata, szintén BOLYAI JÁNOSTÓL származó összefüggéssel számolható ($n = 2, 3$ dimenziókban):

$$Vol_2(\mathcal{H}_2^h(\mathcal{A}_1)) = Vol_1(\mathcal{A}_1) \sinh(h), \quad (14)$$

$$Vol_3(\mathcal{H}_3^h(\mathcal{A}_2)) = \frac{1}{4} Vol_2(\mathcal{A}_2) [\sinh(2h) + 2h]. \quad (15)$$

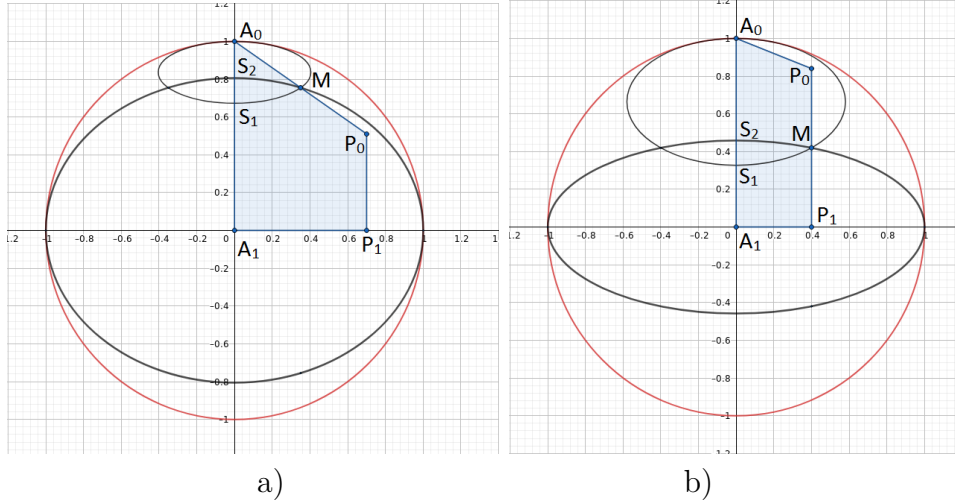
A horo- és hiperszférák modellbeli egyenleteiből láthatjuk, hogy ezen alakzatok megfelelői a gömbmodellben ellipszoidok lesznek, illetve ellipszisek a síkon.

4. Hip-hor gömbfedések a hiperbolikus síkon

Tekintsük a modellünkben a 2-dimenziós Coxeter orthoszkémet, azaz a $A_0 A_1 A_2$ derékszögű háromszöget: $A_0(1, 0, 1)$, $A_1(1, 0, 0)$, $A_2(1, \frac{1}{a}, 0)$. Itt a korábbiaknak megfelelően A_0 ideális csúcs, A_1 -nél derékszög van, A_2 pedig az abszolút alakzaton kívülre esik, tehát $0 < a < 1$ valós szám.

Ekkor azon pontok alkotják A_2 π polár síkját, melyeknek második koordinátája a , tehát a polár egyenes: $\mathbf{u}(1, -\frac{1}{a}, 0)^T$. Ha ezzel lecsonkoljuk A_2 -t, akkor éppen az $\mathcal{F}_a$ Lambert-féle négyszöget kapjuk, amely a modellben derékszögű trapézként jelenik meg (lásd 3. ábra). Ennek további csúcsai: $\pi \cap A_0A_2 = P_0(1, a, 1 - a^2)$, $\pi \cap A_1A_2 = P_1(1, a, 0)$, ahol P_i ($i = 0, \dots, 1$) pontok koordinátái $A_0A_1A_2$ és $P_0P_1A_2$ háromszögek hasonlóságából jönnek.

A Lambert-féle négyszögnek három szöge $\frac{\pi}{2}$, egy pedig 0, így szimmetriacsoportja valóban megegyezik a 2. ábra első gráfjának megfelelő Coxeter csoporttal, amelyet $[\infty]$ Coxeter-Schläfli szimbólummal jelölünk. Tehát a négyszög oldalaira vett tükörképei átfedés nélkül töltöki ki a $\mathbb{H}^2$ hiperbolikus síkot, amelynek így egy $\mathcal{T}_a$ parkettázását kapjuk.



3. ábra. a) $\mathcal{C}_a^1$ típusú hip-hor fedés $a = 0.7, t = 0.5$ paraméterekkel b) $\mathcal{C}_a^2$ típusú hip-hor fedés $a = 0.4, t = 0.5$ paraméterekkel

Vegyük $\mathcal{T}_a$ alaptartományát és fedjük le egy horo- és egy hiperciklussal az alábbiak szerint:

- A horociklus középpontja A_0 ideális pont kell legyen. Ekkor a horociklus metszéspontja A_0 és A_1 egyenesével $S_1(1, 0, s_1)$ ($-1 < s_1 < 1$), A_0 és P_0 egyenesével pedig $T(1, ta, 1 - ta^2)$, ($t \in \mathbb{R}$) pont legyen. Utóbbinál $0 < t < \frac{2}{1+a^2}$, ugyanis könnyen látszik, hogy ekkor lesz T a modell belső pontja. Jelölje $\mathfrak{H}_a(t)$ az A_0, S_1, T pontok által meghatározott horociklus-darabot (lásd 3. ábra a)).

- Legyenek a ciklusok olyanok, hogy van metszéspontjuk (ekkor kettő is van), és jelölje M azt a metszéspontot, amely a Lambert-féle négyszöggel azonos ténegyedbe esik. Legyenek továbbá olyanok a ciklusok, hogy M a négyszög A_0P_0 vagy P_0P_1 oldalán van (lásd 3. ábra).
- A hiperciklus alapegyenese (tehát amelytől pontjai állandó távolságra vannak) legyen A_1 és P_1 pontok egyenese. Így az előző két feltétel már egyértelműen meghatározza a hiperciklust. Ekkor a hiperciklus metszéspontja A_0 és A_1 egyenesének pozitív felével $S_2(1, 0, s_2)$ ($0 < s_2 < 1$) pont legyen (lásd 3. ábra). Jelölje $\mathcal{H}_a(t)$ azt a hiperciklusdarabot, amely átmegy M -en és amelyet A_1P_1 szakasz, a hiperciklus görbéje, illetve az alapegyenesre A_1 -ben és P_1 -ben állított merőlegesek határolnak (lásd 3. ábra b) $P_1MS_2A_1$).

1. Lemma. *Ha a horociklus és a hiperciklus teljesíti a fentieket, akkor uniójuk lefedi $\mathcal{T}_a$ alaptartományát.*

Bizonyítás. *Ezzel ekvivalens, hogy a modellben az ellipszoidok lefedik $A_0A_1P_0P_1$ trapézt. Ehhez pedig nyilvánvalóan elég belátni, hogy az ellipszoidok uniója lefedi a trapéz éleit, ebből következik, hogy a belső pontjait is lefedi. Két eset adódik, M pont helyétől függően:*

- $M \in A_0P_0$ esetén: A_1P_1 -et a hiperciklus nyilvánvalóan lefedi. A_0P_0 -nak A_0M szakaszát a horociklus, MP_0 szakaszát pedig a hiperciklus fedi le, ez az ellipszoidok konvexitásából látszik. Szintén az ellipszoidok konvexitásából jön, hogy S_2 y -koordinátája nagyobb mint M -é, S_1 -é pedig kisebb, mint M -é, így A_0A_1 -et is lefedi. Számítsuk ki, hogy a hiperciklus hol metszi P_0P_1 egyenesét.

Tudjuk, hogy a hiperciklus átmegy $M(1, ta, 1 - ta^2)$ ponton, így ezt behelyettesítve az egyenletébe (13) S_2 megkapható:

$$(ta)^2 + \frac{(1 - ta^2)^2}{s_2^2} = 1$$

$$s_2 = \frac{1 - ta^2}{\sqrt{1 - a^2t^2}}$$

Ekkor a hiperciklus pontjának y -koordinátája $x = a$ esetén, vagyis a P_0P_1 egyenesen:

$$y^2 = s_2^2(1 - a^2) = \left(\frac{1 - ta^2}{\sqrt{1 - a^2t^2}} \right)^2 (1 - a^2)$$

Erről az y -ról kell belátnunk, hogy nem kisebb, mint $1 - a^2$, ugyanis ez jelenti azt, hogy a hiperciklus lefedi P_0P_1 -et.

$$\left(\frac{1 - ta^2}{\sqrt{1 - a^2t^2}} \right) \sqrt{(1 - a^2)} \geq 1 - a^2$$

A bizonyítandó, amely ekvivalens átalakításokkal az alábbira egyszerűsödik:

$$t^2 - 2t + 1 \geq 0$$

Ami pedig nyilvánvalóan tetszőleges t -re igaz, így P_0P_1 -et lefedi a hiperciklus.

- $M \in P_1P_0$ esetén: A_1P_1 -et a hiperciklus nyilvánvalóan lefedi. Az ellipszoidok konvexitásából jön, hogy S_2 y -koordinátája nagyobb mint M -é, S_1 -é pedig kisebb, mint M -é, így A_0A_1 -et is lefedik. Számítsuk ki, hogy a horociklus hol metszi P_0P_1 egyenesét.

Tudjuk, hogy a horociklus átmegy $M(1, ta, 1 - ta^2)$ ($1 \leq t < \frac{2}{1+a^2} < 2$) ponton, így ezt behelyettesítve az egyenletébe (10) S_1 megkapható:

$$\frac{2((ta)^2)}{1 - s_1} + \frac{4\left((1 - ta^2) - \frac{s_1+1}{2}\right)^2}{(1 - s_1)^2} = 1.$$

$$s_1 = \frac{2ta^2 + t - 2}{t - 2} \quad (16)$$

Az ellipszis két helyen metszi P_0P_1 egyenest, ezen pontok y -koordinátáit megkaphatjuk, ha az imént kapott s_1 -et, illetve $x = a - t$ írunk a horociklus egyenletébe (10):

$$y_1 = \frac{ta^2 + t - 2 + a^2\sqrt{2t^2 - 2t}}{t - 2} \leq \frac{ta^2 + t - 2 - a^2\sqrt{2t^2 - 2t}}{t - 2} = y_2 \quad (17)$$

Tehát ha megmutatjuk, hogy $y_2 \geq 1 - a^2$, akkor ebből következik, hogy P_0 -t lefedi a horociklus, így a konvexitás miatt A_0P_0 -t, illetve P_0M -et is. A hiperszféra pedig nyilvánvalóan lefedi MP_1 -et, így P_0P_1 -et is lefedjük ebben az esetben. Tehát a bizonyítandó:

$$\frac{ta^2 + t - 2 - a^2\sqrt{2t^2 - 2t}}{t - 2} \geq 1 - a^2$$

Ekvivalens átalakításokkal:

$$t^2 - 3t + 2 \leq 0$$

Ez pedig tetszőleges $1 \leq t < 2$ -re teljesül, ezzel beláttuk az állítást. $\square$

Tehát a fentieket teljesítő horo- és hiperciklusok lefedik $\mathcal{F}_a$ -t, így $\mathfrak{H}_a(t)$ és $\mathcal{H}_a(t)$ szimmetriacsoport általi képei a hiperbolikus sík egy hip-hor fedését adják, ezt jelöljük $\mathcal{C}_a^1(t)$ -vel és $\mathcal{C}_a^2(t)$ -vel annak megfelelően, hogy $M \in A_0P_0$ vagy $M \in P_1P_0$.

3. Definíció. A $\mathcal{C}_a^i(t)$, $(i = 1, 2)$ hip-hor fedés sűrűsége:

$$\delta(\mathcal{C}_a^i(t)) = \frac{\text{Vol}(\mathcal{H}_a(t)) + \text{Vol}(\mathfrak{H}_a(t))}{\text{Vol}(\mathcal{F}_a)}$$

Az is könnyen látszik, hogy azzal, hogy M -et a négyszög oldalán helyezzük el, kisebb sűrűségű fedést kapunk, mint ha a négyzeten kívül helyeznénk el, így utóbbival nem kell foglalkoznunk.

4.1. $\mathcal{C}_a^1$ fedések és sűrűségük

Ebben az esetben $M \in A_0P_0$ a ciklusok metszéspontja, így legyen $M(1, ta, 1 - ta^2)$ ($0 < t \leq 1$). Ekkor s_1 adódik, ahogy (16)-ban láttuk, így:

$$\begin{aligned} \cosh(d(M, S_1)) &= \frac{-\left\langle (1, at, 1 - ta^2); (1, 0, \frac{2ta^2+t-2}{t-2}) \right\rangle}{\sqrt{\left\langle (1, at, 1 - ta^2); (1, at, 1 - ta^2) \right\rangle \left\langle (1, 0, \frac{2ta^2+t-2}{t-2}); (1, 0, \frac{2ta^2+t-2}{t-2}) \right\rangle}} = \\ &= \frac{2ta^2 + t - 4}{2t - 4 + 2ta^2} \end{aligned}$$

Ekkor (11) és (12) alapján:

$$\text{Vol}(\mathfrak{H}_a(t)) = 2 \sinh \left(\frac{1}{2} \text{arccosh} \left(\frac{2ta^2 + t - 4}{2t - 4 + 2ta^2} \right) \right) \quad (18)$$

Továbbá a hiperciklus területéhez ismerni kell A_1P_1 hosszát és a hiperciklus h_1 magasságát, vagyis M távolságát az alapegyenesre való vetületétől.

$$d(A_1, P_1) = \operatorname{arccosh} \left(\frac{-\langle (1, 0, 0); (1, a, 0) \rangle}{\sqrt{\langle (1, 0, 0); (1, 0, 0) \rangle \langle (1, a, 0); (1, a, 0) \rangle}} \right) = \operatorname{arccosh} \left(\frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \right)$$

$$\sinh(h_1) = \left(\sinh(\operatorname{arccosh} \left(\frac{-\langle (1, at, 1-ta^2); (1, at, 0) \rangle}{\sqrt{\langle (1, at, 0); (1, at, 0) \rangle \langle (1, at, 1-ta^2); (1, at, 1-ta^2) \rangle}} \right) \right) =$$

$$= \frac{1-ta^2}{a\sqrt{2t-t^2-a^2t^2}}$$

Tehát (14) alapján:

$$Vol(\mathcal{H}_a(t)) = \operatorname{arccosh} \left(\frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \right) \frac{1-ta^2}{a\sqrt{2t-t^2-a^2t^2}} \quad (19)$$

Így (19) és (18) szerint:

$$\delta(\mathcal{C}_a^1(t)) = \frac{\operatorname{arccosh} \left(\frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \right) \frac{1-ta^2}{a\sqrt{2t-t^2-a^2t^2}} + 2 \sinh \left(\frac{1}{2} \operatorname{arccosh} \left(\frac{2ta^2+t-4}{2t-4+2ta^2} \right) \right)}{\frac{\pi}{2}} \quad (20)$$

Az előző függvény függvényvizsgálatából közvetlenül adódik a következő

2. Tétel.

$$\lim_{a \rightarrow 0} \left(\mathcal{C}_a^1 \left(\frac{1}{2} \right) \right) = \frac{\sqrt{12}}{\pi}$$

Valamint, ha $\frac{\sqrt{12}}{\pi} > \mathcal{C}_a^1 \left(\frac{1}{2} \right)$, minden $(0 < a < 1)$ esetén (lásd 4. ábra). Tehát a $\mathbb{H}^2$ hiperbolikus síkon a hiper- vagy horoszféra fedések sűrűségére vonatkozó alsó korlát tetszőlegesen megközelíthető $\mathcal{C}_a^1 \left(\frac{1}{2} \right)$ hip-hor fedéssel. $\square$

Továbbá kétváltozós függvény valós függvényvizsgálatával adódik, hogy $\delta(\mathcal{C}_a^1(t))$ a minimumát $t = \frac{1}{2}$, $a \rightarrow 0$ esetén produkálja (numerikus számítások is ezt mutatják).

4.2. $\mathcal{C}_a^2$ fedések és sűrűségük

Ebben az esetben $M \in P_1P_0$. A horociklus metszéspontja A_0P_0 egyenessel legyen $(1, ta, 1-ta^2)$ ($1 \leq t < \frac{2}{1+a^2}$). Ha t nagyobb egy bizonyos értéknél,

akkor a horociklus nem metszi P_0P_1 szakaszt, ugyanis y_1 0-nál kisebb lesz. Ezt a t értéket megkapjuk, ha a horociklus egyenletébe behelyettesítjük P_1 -et, illetve (16) alapján s_1 -et, ekkor azt kapjuk, hogy $t = \frac{2}{1+2a^2-a^4} < \frac{2}{1+a^2}$, tehát ebben az esetben $1 \leq t < \frac{2}{1+2a^2-a^4}$ érdekes.

Ekkor $\mathfrak{H}_a(t)$ területe éppen úgy alakul, mint (18)-ban. $\mathcal{H}_a(t)$ területéhez pedig A_1P_1 hosszát már ismerjük, így csak a hiperciklus h magasságát kell kiszámítani. Azonban láttuk (17)-ben, hogy a horociklus hol metszi P_0P_1 egyenest, ezek közül a kisebb y -koordinátájú lesz az M pont, így a hiperciklus is ezen megy keresztül. Tehát h_2 megegyezik $(1, a, y_1)$ távolságával $(1, a, 0)$ -tól, vagyis az alapegyenesre való vetülettől.

$$\begin{aligned} \sinh(h_2) &= \left(\sinh(\operatorname{arccosh} \left(\frac{-\langle (1, a, y_1); (1, a, 0) \rangle}{\sqrt{\langle (1, a, 0); (1, a, 0) \rangle \langle (1, a, y_1); (1, a, y_1) \rangle}} \right) \right) = \\ &= \left(\sinh(\operatorname{arccosh} \left(\frac{\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1-a^2 - \left(\frac{ta^2+t-2+a^2\sqrt{2t^2-2t}}{t-2} \right)^2}} \right) \right) \end{aligned}$$

Tehát

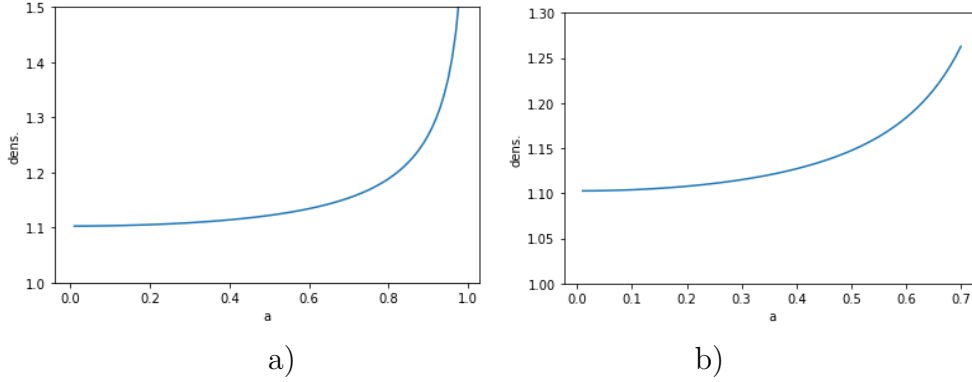
$$\delta(\mathcal{C}_a^2(t)) = \frac{\operatorname{arccosh} \left(\frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \right) \sinh h_2 + 2 \sinh \left(\frac{1}{2} \operatorname{arccosh} \left(\frac{2ta^2+t-4}{2t-4+2ta^2} \right) \right)}{\frac{\pi}{2}} \quad (21)$$

A $\delta(\mathcal{C}_a^2(t))$ kétváltozós függvény szélsőértékeinek vizsgálatából közvetlenül adódik a következő.

3. Tétel. *A $\delta(\mathcal{C}_a^2(t))$ sűrűségfüggvény a minimumát $t \approx 1.142$ és $a \rightarrow 0$ esetén teszi fel (lásd 4. ábra), és ebben az esetben is $\frac{\sqrt{12}}{\pi}$ eredményt kapjuk a minimumára. Tehát a $\mathbb{H}^2$ hiperbolikus síkon a hiper- vagy horoszféra fedések sűrűségére vonatkozó alsó korlát tetszőlegesen megközelíthető $\mathcal{C}_a^2$ hip-hor fedéssel is. $\square$*

5. Hip-hor gömbfedések a $\mathbb{H}^3$ hiperbolikus térben

A háromdimenziós hiperbolikus térben 3-féle végtelen sorozata van az egyszerűen csomolt Coxeter orthoszkémeknek egy végtelen távoli csúccsal, melyeknek leírása a 3. fejezetben található, illetve felsorolásuk a 2. ábrán látható.



4. ábra. a) $\delta(\mathcal{C}_a^1)$ sűrűség függvénye $t = 0.5$ esetén b) $\delta(\mathcal{C}_a^2)$ sűrűség függvénye $t \approx 1.142$ esetén

Ezen orthoszkémek Coxeter-Schläfli szimbólumai $[p, q, r]$, ahol a három eset $(q, r) = (3, 6), (4, 4), (6, 3)$, hiszen csak ezek az egész megoldásai $\frac{\pi}{q} + \frac{\pi}{r} = \frac{\pi}{2}$ egyenletnek. A p paraméter pozitív egész, $p \geq 7$, ha $(q, r) = (3, 6)$, $p \geq 5$, ha $(q, r) = (4, 4)$, $p \geq 4$, ha $(q, r) = (6, 3)$, szintén az orthoszkém geometriájából adódó feltétel. Jelöljük ezeket az orthoszkémeket $\mathcal{F}_p^{(q,r)}$ -el, csúcsai legyenek $A_0 A_1 A_2 P_0 P_1 P_2$ (lásd 1. ábra).

Tekintsük az $O(1, 0, 0, 0)$ középpontú gömbmodellünkben egy 3-dimenziós Coxeter orthoszkémet, azaz $A_0 A_1 A_2 A_3$ tetraédert, ahol A_0 ideális csúcs, A_3 az abszolút alakzaton kívülre esik, $A_0 A_1 A_2$ pedig derékszögű háromszög. Csonkoljuk le A_3 csúcsot a polár síkjával (lásd 1. ábra). Ekkor $P_k[\mathbf{p}_k]$ ($k = 0, 1, 2$) és $A_k[\mathbf{a}_k]$ ($k = 1, \dots, 2$) a modell belső pontjai, és P_k -k a $pol(A_3)[\mathbf{a}^3]$ A_3 külső csúcs polár síkján fekszenek. P_k pont rajta van az orthoszkém $A_0 A_k A_3$ lapján (vagy élén $k = 0$ esetén), így felírható $\mathbf{p}_k \sim c \cdot \mathbf{a}_3 + \mathbf{p}_k$ alakban a neki megfelelő ekvivalenciaosztály, valamely c valós számra. Az ennek megfelelő pont pontosan akkor van rajta $\mathbf{a}^3$ -n, ha szorzatuk 0, tehát:

$$c \cdot \mathbf{a}_3 \mathbf{a}^3 + \mathbf{p}_k \mathbf{a}^3 = 0 \Leftrightarrow c = -\frac{\mathbf{a}_k \mathbf{a}^3}{\mathbf{a}_3 \mathbf{a}^3} \quad (22)$$

Ezzel $\mathbf{p}_k$ ekvivalenciaosztályát kifejezve:

$$\mathbf{p}_k \sim -\frac{\mathbf{a}_k \mathbf{a}^3}{\mathbf{a}_3 \mathbf{a}^3} \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_k \sim \mathbf{a}_k (\mathbf{a}_3 \mathbf{a}^3) - \mathbf{a}_3 (\mathbf{a}_k \mathbf{a}^3) \quad (23)$$

Tekintsük az orthoszkém (c_{ij}) Coxeter-Schläfli mátrixát, illetve annak (h_{ij})

inverzét:

$$(c^{ij}) := \begin{pmatrix} 1 & -\cos \frac{\pi}{p} & 0 & 0 \\ -\cos \frac{\pi}{p} & 1 & -\cos \frac{\pi}{q} & 0 \\ 0 & -\cos \frac{\pi}{q} & 1 & -\cos \frac{\pi}{r} \\ 0 & 0 & -\cos \frac{\pi}{r} & 1 \end{pmatrix} \quad (24)$$

$$(h_{ij}) := \frac{1}{\det((c^{ij}))} \begin{pmatrix} -\cos^2 \frac{\pi}{q} - \cos \frac{\pi}{p} & \cos \frac{\pi}{p} - \cos^2 \frac{\pi}{r} & \cos \frac{\pi}{p} \cos \frac{\pi}{q} & \cos \frac{\pi}{p} \cos \frac{\pi}{q} \cos \frac{\pi}{r} \\ -\cos^2 \frac{\pi}{p} + 1 & -\cos \frac{\pi}{p} \cos^2 \frac{\pi}{r} & \cos \frac{\pi}{p} \cos^2 \frac{\pi}{q} & \cos \frac{\pi}{p} \cos^2 \frac{\pi}{r} \\ \cos \frac{\pi}{p} - \cos^2 \frac{\pi}{r} & 1 - \cos^2 \frac{\pi}{r} & \cos \frac{\pi}{q} & \cos \frac{\pi}{q} \cos \frac{\pi}{r} \\ \cos \frac{\pi}{p} \cos^2 \frac{\pi}{r} & \cos \frac{\pi}{p} \cos^2 \frac{\pi}{q} & \cos \frac{\pi}{q} & 1 - \cos^2 \frac{\pi}{p} \\ \cos \frac{\pi}{p} \cos \frac{\pi}{q} & \cos \frac{\pi}{q} & 1 - \cos^2 \frac{\pi}{p} & -\cos \frac{\pi}{r} \cos^2 \frac{\pi}{p} \\ \cos \frac{\pi}{p} \cos \frac{\pi}{q} \cos \frac{\pi}{r} & \cos \frac{\pi}{q} \cos \frac{\pi}{r} & -\cos \frac{\pi}{r} \cos^2 \frac{\pi}{p} & -\cos^2 \frac{\pi}{p} - \cos^2 \frac{\pi}{q} + 1 \end{pmatrix} \quad (25)$$

Ahol $\det((c^{ij})) = \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{p} \sin \frac{\pi}{r} - \sin^2 \frac{\pi}{q}}$. Ekkor $\mathbf{a}_i \mathbf{a}_j = h_{ij}$, így mivel $\mathbf{a}^3$ az A_3 csúcs polár síkja $\mathbf{a}_k \mathbf{a}^3 = h_{k3}$ is teljesül, tehát $p_k = a_k h_{33} - a_3 h_{k3}$. Legyenek a csonkolt orthoszkém csúcsai: $P_0(1, 0, 0, 0)$, $P_1(1, 0, y, 0)$, $P_2(1, x, y, 0)$, $A_0(1, 0, 0, 1)$, $A_1(1, 0, y, z_1)$, $A_2(1, x, y, z_2)$ (lásd 5. ábra), ekkor teljesülnek az élekre vonatkozó merőlegességi feltételek. Az ismeretlenek értékeit megkaphatjuk, ha felírjuk kétféleképpen az orthoszkém éleinek hosszait, illetve használjuk a fent leírt, inverz mátrixra vonatkozó összefüggést (23).

$$\cosh(d(P_0 P_1)) = \frac{-\langle \mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1 \rangle}{\sqrt{\langle \mathbf{p}_0, \mathbf{p}_0 \rangle \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_1 \rangle}} = \frac{h_{03} h_{13} - h_{01} h_{33}}{\sqrt{(h_{11} h_{33} - h_{13}^2)(h_{00} h_{33} - h_{03}^2)}} = l_1$$

$$\cosh(d(P_0 P_1)) = \frac{1}{\sqrt{(-1)(-1 + y^2)}}$$

Adott orthoszkémre l_1 számolható, így $y = \sqrt{1 - \frac{1}{l_1^2}}$. Többi esetben hasonló

an:

$$\begin{aligned}\cosh(d(P_0 P_2)) &= \frac{-\langle \mathbf{p}_0, \mathbf{p}_2 \rangle}{\sqrt{\langle \mathbf{p}_0, \mathbf{p}_0 \rangle \langle \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_2 \rangle}} = \frac{h_{03}h_{23} - h_{02}h_{33}}{\sqrt{(h_{22}h_{33} - h_{23}^2)(h_{00}h_{33} - h_{03}^2)}} = l_2 \\ \cosh(d(P_0 P_2)) &= \frac{1}{\sqrt{(-1)(-1 + y^2 + x^2)}} \\ x &= \sqrt{1 - y^2 - \frac{1}{l_2^2}}\end{aligned}$$

$$\cosh(d(A_1 P_1)) = \frac{-\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{p}_1 \rangle}{\sqrt{\langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_1 \rangle \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1 \rangle}} = \sqrt{\frac{h_{11}h_{33} - h_{13}^2}{h_{11}h_{33}}} = h_1 \quad (26)$$

$$\cosh(d(A_1 P_1)) = \frac{1 - y^2}{\sqrt{(-1 + y^2 + z_1^2)(-1 + y^2)}} \quad (27)$$

$$z_1 = \sqrt{1 - y^2 - \frac{1 - y^2}{h_1^2}} \quad (28)$$

$$\cosh(d(A_2 P_2)) = \frac{-\langle \mathbf{a}_2, \mathbf{p}_2 \rangle}{\sqrt{\langle \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_2 \rangle \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2 \rangle}} = \sqrt{\frac{h_{22}h_{33} - h_{23}^2}{h_{22}h_{33}}} = h_2 \quad (29)$$

$$\cosh(d(A_2 P_2)) = \frac{1 - y^2 - x^2}{\sqrt{(-1 + y^2 + x^2 + z_2^2)(-1 + y^2 + x^2)}} \quad (30)$$

$$z_2 = \sqrt{1 - y^2 - x^2 - \frac{1 - y^2 - x^2}{h_2^2}} \quad (31)$$

Ekkor kiszámíthatjuk az orthoszkémek csúcsainak koordinátáit, illetve az 1.Tétel alapján a térfogatukat is. Az alábbi táblázatok tartalmazzák ezeket az adatokat az általunk vizsgált esetekben.

orthoszkém típusa	térfogat	csúcsok
$\mathcal{F}_5^{(4,4)}$	0.34084	$P_0(1, 0, 0, 0), P_1(1, 0, 0.48587, 0), P_2(1, 0.48587, 0.48587, 0),$ $A_0(1, 0, 0, 1), A_1(1, 0, 0.48587, 0.76393),$ $A_2(1, 0.48587, 0.48587, 0.52786)$
$\mathcal{F}_6^{(4,4)}$	0.38165	$P_0(1, 0, 0, 0), P_1(1, 0, 0.57735, 0), P_2(1, 0.57735, 0.57735, 0),$ $A_0(1, 0, 0, 1), A_1(1, 0, 0.57735, 0.66667),$ $A_2(1, 0.57735, 0.57735, 0.33333)$
$\mathcal{F}_7^{(4,4)}$	0.40369	$P_0(1, 0, 0, 0), P_1(1, 0, 0.61971, 0), P_2(1, 0.61971, 0.61971, 0),$ $A_0(1, 0, 0, 1), A_1(1, 0, 0.61971, 0.61596),$ $A_2(1, 0.61971, 0.61971, 0.23191)$
orthoszkém típusa	térfogat	csúcsok
$\mathcal{F}_4^{(6,3)}$	0.31717	$P_0(1, 0, 0, 0), P_1(1, 0, 0.70711, 0), P_2(1, 0.40825, 0.70711, 0),$ $A_0(1, 0, 0, 1), A_1(1, 0, 0.70711, 0.49999),$ $A_2(1, 0.40825, 0.70711, 0.33333)$
$\mathcal{F}_5^{(6,3)}$	0.35992	$P_0(1, 0, 0, 0), P_1(1, 0, 0.78615, 0), P_2(1, 0.45388, 0.78615, 0),$ $A_0(1, 0, 0, 1), A_1(1, 0, 0.78615, 0.38197),$ $A_2(1, 0.45388, 0.78615, 0.17595)$
$\mathcal{F}_6^{(6,3)}$	0.38060	$P_0(1, 0, 0, 0), P_1(1, 0, 0.81650, 0), P_2(1, 0.47140, 0.81650, 0),$ $A_0(1, 0, 0, 1), A_1(1, 0, 0.81650, 0.33333),$ $A_2(1, 0.47140, 0.81650, 0.11111)$
orthoszkém típusa	térfogat	csúcsok
$\mathcal{F}_7^{(3,6)}$	0.31781	$P_0(1, 0, 0, 0), P_1(1, 0, 0.27580, 0), P_2(1, 0.47770, 0.27580, 0),$ $A_0(1, 0, 0, 1), A_1(1, 0, 0.27580, 0.92394),$ $A_2(1, 0.47770, 0.27580, 0.69574)$
$\mathcal{F}_8^{(3,6)}$	0.34696	$P_0(1, 0, 0, 0), P_1(1, 0, 0.34831, 0), P_2(1, 0.60329, 0.34831, 0),$ $A_0(1, 0, 0, 1), A_1(1, 0, 0.34831, 0.87868),$ $A_2(1, 0.60329, 0.34831, 0.51472)$
$\mathcal{F}_9^{(3,6)}$	0.36482	$P_0(1, 0, 0, 0), P_1(1, 0, 0.38813, 0), P_2(1, 0.67226, 0.38813, 0),$ $A_0(1, 0, 0, 1), A_1(1, 0, 0.38813, 0.84936),$ $A_2(1, 0.67226, 0.38813, 0.39742)$

Ezek az egyszerűen csomolt Coxeter orthoszkémek olyanok (lapszögeknek megfelelően), hogy oldalaira vett tükörképei a $\mathbb{H}^3$ hiperbolikus teret átfedés nélkül kitöltik, amelynek így egy $\mathcal{T}_p^{(q,r)}$ parkettázását adják.

Vegyük $\mathcal{T}_p^{(q,r)}$ alaptartományát, és rendeljük hozzá egy horo- és egy hiperszférát az alábbiak szerint:

- A horoszféra középpontja A_0 ideális csúcs kell legyen. Legyenek S_1, T_1, Q_1 rendre a horoszféra A_0P_0, A_0A_2, A_0A_1 élek egyenesével vett metszéspontjai. Jelölje $\mathfrak{H}_p^{(q,r)}$ az S_1, T_1, Q_1, A_0 pontok által meghatározott horoszféra darabot (lásd 10.ábra).
- Legyen a hiperszféra alap hipersíkja (tehát amelytől pontjai állandó

távolságra vannak) $P_0P_1P_2$ sík. Legyenek S_2, V_2, R_2 rendre a hiperszféra A_0P_0, A_1P_1, A_2P_2 élek egyenesével vett metszéspontjai. Jelölje $\mathcal{H}_p^{(q,r)}$ azt a hiperszféra darabot, amelyet a hiperszféra felülete, az alap hipersík, és P_0P_1, P_1P_2, P_2P_0 szakaszokra állított, az alap hipersíkra merőleges hipersíkok határolnak (lásd 10. ábra).

- Legyenek a szférák olyanok, hogy metszik egymást és metszetgörbéje átmegy az orthoszkém valamely élén $A_0A_1, A_0A_2, A_1A_2, A_0P_0, A_1P_1, A_2P_2$ közül, ez alapján 6 esetet különböztetünk meg (lásd 5. ábra).

2. Lemma. *Ha a fenti feltételeknek eleget tevő horo- és hiperszféra lefedi az adott orthoszkém minden élet, akkor az orthoszkém minden pontját is lefedi.*

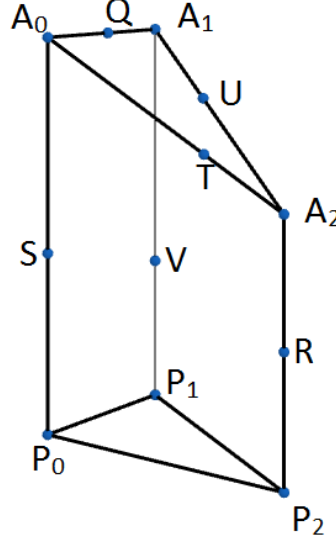
Bizonyítás. *Ezzel ekvivalens, hogy a modellben a szféráknak megfelelő ellipszoidok lefedik a modellbeli poliédert. A feltételek miatt az ellipszoidok tengelye a modellben közös, éppen z -tengely. Ez azt jelenti, hogy az ellipszoidok metszetgörbéje, az $[x, y]$ síkkal párhuzamos kör, illetve nyilván az ellipszoidok bármely $[x, y]$ síkkal párhuzamos síkmetszete is kör (ez az egyenleteikből is könnyen látszik). Tehát a két ellipszoid uniójának $[x, y]$ síkkal párhuzamos síkmetszete kör. Az orthoszkém $[x, y]$ síkkal párhuzamos síkmetszetei háromszögek vagy négyszögek. Az ellipszoidok az orthoszkém minden élet lefedik, azaz bármely $[x, y]$ síkkal párhuzamos síkmetszetben a kör lefedi a három- vagy négyszög csúcsait. Azonban a kör konvex, így ha a csúcsokat lefedi, akkor az általuk meghatározott teljes három- vagy négyszöget is. Tehát az orthoszkém bármely $[x, y]$ síkkal párhuzamos síkmetszetét lefedik az ellipszoidok síkmetszetei, vagyis az ellipszoidok lefedik az orthoszkémet. $\square$*

Tehát pontosan azok az elrendezések fedik le $\mathcal{F}_p^{(q,r)}$ -t, amelyek az éleket lefedik. Ha ez teljesül, akkor $\mathfrak{H}_p^{(q,r)}$ és $\mathcal{H}_p^{(q,r)}$ szimmetriacsoport általi képei a hiperbolikus tér egy hip-hor fedését adják, ezt jelöljük $\mathcal{C}_p^{(q,r)}$ -el.

4. Definíció. *A $\mathcal{C}_p^{(q,r)}$ hip-hor fedés sűrűsége:*

$$\delta(\mathcal{C}_p^{(q,r)}) = \frac{\text{Vol}(\mathcal{H}_p^{(q,r)}) + \text{Vol}(\mathfrak{H}_p^{(q,r)})}{\text{Vol}(\mathcal{F}_p^{(q,r)})}$$

Az is látszik, hogy ha az $[x, y]$ síkkal párhuzamos síkmetszet kör nem megy át a síkmetszet sokszög csúcsán, hanem tartalmazza a sokszöget, akkor nagyobb sűrűségű fedést kapunk, így azzal az esettel nem foglalkozunk, ha az ellipszoidok nem az éleken metszik egymást. Ha a valamelyik élén metszik egymást, akkor hat esetet különböztethetünk meg, ahogy azt már említettük.



5. ábra. Tipikus egyszeresen csonkolt Coxeter orthoszkém, az éleken a szférák metszéspontjai a 6 esetnek megfelelően

3. Lemma. *A háromdimenziós egyszeresen csonkolt Coxeter orthoszkém $P_0A_0A_2P_2$ és $P_0A_0A_1P_1$ lapjai kétdimenziós egyszeresen csonkolt Coxeter orthoszkémek.*

Bizonyítás. *A modellben nyilvánvalóan ezek a lapok is derékszögű trapézként jelennek meg, illetve a modellben A_0P_0 is 1 hosszú, tehát azt kell belátnunk (a 2-dimenzióban látottaknak megfelelően), hogy $z_1 = 1 - y^2$ és $z_2 = 1 - x^2 - y^2$ (hiszen P_0P_2 hossza $x^2 + y^2$). Könnyen ellenőrizhető, hogy (27), (28)-ba, illetve (30), (31)-be $z_1 = 1 - y^2$ és $z_2 = 1 - x^2 - y^2$ összefüggéseket behelyettesítve azonosságokat kapunk. Tehát a megfelelő oldallapok valóban kétdimenziós egyszeresen csonkolt Coxeter orthoszkémek. $\square$*

5.1. Legritkább fedés, ha a metszéspont az A_0A_2 élen fekszik

Az A_0A_2 él menejen át a szférák metszetgörbájén, azaz legyen a metszéspont $T(t) = (1, tx, ty, tz_2 + (1 - t))$, $(t \in [0, 1])$ az A_0A_2 él pontja (lásd 5. ábra). T koordinátáit a horo-, illetve hiperszféra egyenletébe helyettesítve

megkaphatjuk S_1 és S_2 pontokat:

$$\frac{2(tx)^2 + 2(ty)^2}{1 - s_1} + \frac{(2(tz_2 + (1 - t)) - (s_1 + 1))^2}{(1 - s_1)^2} = 1 \quad (32)$$

$$(tx)^2 + (ty)^2 + \frac{(tz_2 + (1 - t))^2}{s_2^2} = 1 \quad (33)$$

Ahonnán $s_2(t) = \frac{tz_2 + 1 - t}{\sqrt{1 - t^2(x^2 + y^2)}}$, $s_1(t) = \frac{t(x^2 + y^2 + 2(z_2 - 1)^2) + 2(z_2 - 1)}{t(x^2 + y^2) + 2(z_2 - 1)}$

- Ha az A_1 pontot a horoszféra tartalmazza.
Határozzuk meg t értékét, ha a horoszféra átmegy A_1 -en, az egyenletbe $A_1(0, y, z_1)$ behelyettesítésével.

$$\frac{2y^2}{1 - s_1(t)} + \frac{(2z_1 - (s_1(t) + 1))^2}{(1 - s_1(t))^2} = 1 \quad (34)$$

$$s_1(t) = \frac{t(x^2 + y^2 + 2(z_2 - 1)^2) + 2(z_2 - 1)}{t(x^2 + y^2) + 2(z_2 - 1)} = \frac{y^2 + 2z_1^2 - 2z_1}{y^2 + 2z_1 - 2} \quad (35)$$

A fenti egyenlet megoldása a keresett t^* , ha t ennél nagyobb, akkor létezik a horoszférának metszéspontja A_1A_2 -vel, legyen ez U_1 . U_1 -et, és a hiperszféra A_1A_2 -vel való U_2 metszéspontja megkapható, ha a szférák egyenleteibe helyettesítjük $U_1 = (1, u_1x, y, u_1z_2 + (1 - u_1)z_1)$ és $U_2 = (1, u_2x, y, u_2z_2 + (1 - u_2)z_1)$ paraméterezéseket.

$$\frac{2(u_1x)^2 + 2(y)^2}{1 - s_1(t)} + \frac{(2(u_1z_2 + (1 - u_1)z_1) - (s_1(t) + 1))^2}{(1 - s_1(t))^2} = 1 \quad (36)$$

$$(u_2x)^2 + (y)^2 + \frac{(u_2z_2 + (1 - u_2)z_1)^2}{s_2^2(t)} = 1 \quad (37)$$

Ahonnán $u_2(t)$, $u_1(t)$ kifejezhető, és azt látjuk ezen egyváltozós valós függvények vizsgálatánál, hogy így U_1 z -koordinátája: $u_1(t)z_2 + (1 - u_1(t))z_1$ mindig nagyobb, mint U_2 z -koordinátája: $u_2(t)z_2 + (1 - u_2(t))z_1$ (lásd 6. ábra). Mivel a szférák konvexek, így azon pontok A_1A_2 -n, amelyek z -koordinátája a kettő közé esik, nincsenek egyik szférában sem, tehát azok nem fedik le A_1A_2 élt.

- Ha az A_1 pontot a hiperszféra tartalmazza.
Határozzuk meg t értékét, ha a hiperszféra átmegy A_1 -en, az egyenletbe

$A_1(0, y, z_1)$ behelyettesítésével.

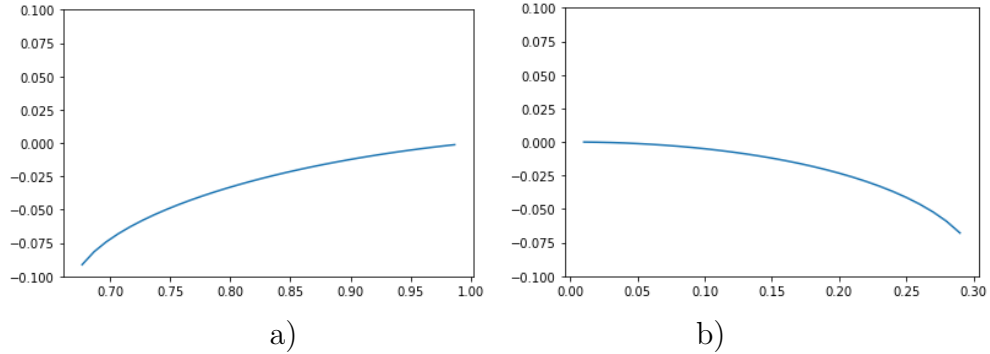
$$(ty)^2 + \frac{z_1^2}{s_2^2} = 1 \quad (38)$$

$$s_2(t) = \frac{tz_2 + 1 - t}{\sqrt{1 - t^2(x^2 + y^2)}} = \frac{z_1}{\sqrt{1 - (ty)^2}} \quad (39)$$

A fenti egyenlet megoldása a keresett t^* , ha t ennél kisebb, akkor létezik a hiperszférának metszéspontja A_0A_1 -el, legyen ez Q_2 . Q_2 -t, és a horoszféra A_0A_1 -vel való Q_1 metszéspontja megkapható, ha a szférák egyenleteibe helyettesítjük $Q_1 = (1, 0, q_1y, q_1z_1 + (1 - q_1))$ és $Q_2 = (1, 0, q_2y, q_2z_1 + (1 - q_2))$ paraméterezéseket.

$$\frac{2(q_1y)^2}{1 - s_1(t)} + \frac{(2(q_1z_1 + (1 - q_1) - (s_1(t) + 1)))^2}{(1 - s_1(t))^2} = 1 \quad (40)$$

$$(q_2y)^2 + \frac{(q_2z_1 + (1 - q_2))^2}{s_2^2(t)} = 1 \quad (41)$$



6. ábra. a) U_2 és U_1 z -koordinátájának különbsége $\mathcal{F}_5^{(4,4)}$ esetben b) Q_2 és Q_1 z -koordinátájának különbsége $\mathcal{F}_5^{(4,4)}$ esetben

Ahonnán $q_2(t)$, $q_1(t)$ kifejezhető, és azt látjuk ezen egyváltozós valós függvények vizsgálatánál, hogy így Q_1 z -koordinátája: $q_1(t)z_1 + (1 - q_1(t))$ mindig nagyobb, mint Q_2 z -koordinátája: $q_2(t)z_1 + (1 - q_2(t))$ (lásd 6. ábra). Mivel a szférák konvexek, így azon pontok A_0A_1 -n, amelyek z -koordinátája a kettő közé esik, nincsenek egyik szférában sem, tehát azok nem fedik le A_0A_1 élt ebben az esetben sem.

Tehát ebben az esetben nem valósul meg hip-hor fedés.

5.2. Legritkább fedés, ha a metszéspont az A_0A_1 élen fekszik

Az A_0A_1 él menejen át a szférák metszetgörbájén, azaz legyen a metszéspont $Q(q) = (1, 0, qy, qz_1 + (1 - q))$, $(q \in [0, 1])$ az A_0A_1 él pontja (lásd 5. ábra). Q kooordinátáit a horo-, illetve hiperszféra egyenletébe helyettesítve megkaphatjuk S_1 és S_2 pontokat:

$$\frac{2(qy)^2}{1 - s_1} + \frac{(2(qz_1 + (1 - q)) - (s_1 + 1))^2}{(1 - s_1)^2} = 1 \quad (42)$$

$$(qy)^2 + \frac{(qz_1 + (1 - q))^2}{s_2^2} = 1 \quad (43)$$

Ahonnán $s_2(q) = \frac{qz_1 + 1 - q}{\sqrt{1 - q^2y^2}}$, $s_1(q) = \frac{q(y^2 + 2(z_1 - 1)^2) + 2(z_1 - 1)}{qy^2 + 2(z_1 - 1)}$

Ha tekintjük a modell metszetét $P_0A_0A_1P_1$ síkkal, akkor a 3. Lemma miatt a 2-dimenziós esetet kapjuk vissza (az ellipszoidok z -tengelyen átmenő síkmetszetei ellipszisek), tehát ahogy ott láttuk, a szférák lefedik A_0A_1 élt.

A 3. lemma egyszerű következménye, hogy A_1 csúcs hiperbolikus magassága mindig nagyobb, mint A_2 csúcsé. Ugyanis felírva a távolságokat:

$$\cosh(d(A_1P_1)) = \frac{\sqrt{1 - y^2}}{\sqrt{1 - y^2 - z_1^2}}, \cosh(d(A_2P_2)) = \frac{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}{\sqrt{1 - x^2 - y^2 - z_2^2}}, \quad (44)$$

majd a lemmában látott összefüggéseket z_1, z_2 -re behelyettesítve $\cosh(d(A_1P_1)) = \frac{1}{y} > \cosh(d(A_2P_2)) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ trivialitás adódik. Tehát mivel hiperszféra felülete az alapsíktól egyenlő távolságra lévő pontokat tartalmaz, lefedik A_2 csúcsot is, mivel A_1 -et is lefedte. Vagyis a hiperszféra lefedik A_1P_1 , A_2P_2 , és a konvexitás miatt A_1A_2 éleket.

Az ellipszoidok nyilvánvalóan lefedik A_0P_0 élt is, hiszen a hiperszféra ellipszoidjának legnagyobb és a horoszféra ellipszoidjának legkisebb z -koordinátájú pontja a szimmetria miatt ezen az élen van. Előbbi nagyobb, utóbbi pedig kisebb tehát mint O z -koordinátája, így előbbi ellipszoid magasabban metszi az élt, mint az utóbbi, vagyis lefedik azt.

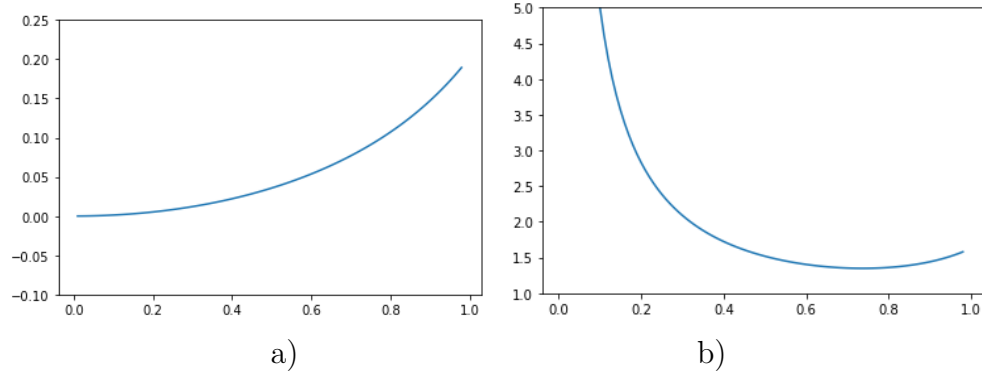
Határozzuk meg a szférák metszéspontját A_0A_2 éllel úgy, hogy egyenleteikbe behelyettesítjük $T_1 = (1, t_1x, t_1y, t_1z_2 + (1 - t_1))$ és $T_2 = (1, t_2x, t_2y, t_2z_2 +$

$(1 - t_2))$ paraméterezéseket.

$$\frac{2(t_1x)^2 + 2(t_1y)^2}{1 - s_1(q)} + \frac{(2(t_1z_2 + (1 - t_1)) - (s_1(q) + 1))^2}{(1 - s_1(q))^2} = 1 \quad (45)$$

$$(t_2x)^2 + (t_2y)^2 + \frac{(t_2z_2 + (1 - t_2))^2}{s_2^2(q)} = 1 \quad (46)$$

Ahonnán $t_2(q)$, $t_1(q)$ kifejezhető, és azt látjuk ezen egyváltozós valós függvények vizsgálatánál, hogy így T_1 z -koordinátája: $t_1(q)z_2 + (1 - t_1(q))$ mindig kisebb, mint T_2 z -koordinátája: $t_2(q)z_2 + (1 - t_2(q))$ (lásd 7. ábra). A szférák konvexek és a hiperszféra lefedi A_2 -t, a horoszféra lefedi A_0 -t, tehát együtt lefedik A_0A_2 élt.



7. ábra. a) T_2 és T_1 z -koordinátájának különbsége $\mathcal{F}_4^{(6,3)}$ esetben b) $\delta(\mathcal{C}_4^{(6,3)})(q)$

Tehát ebben az esetben mindig megvalósul a hip-hor fedés, amelynek így meghatározhatjuk a sűrűségét. $Q(q)$, $T_1(q)$, $S_1(q)$ segítségével a hiperbolikus távolságok felírásával, (11), (12)-t alkalmazva megkapható $Vol(\mathfrak{H}_p^{(q,r)})$. $S_2(t)$ és P_0 hiperbolikus távolságának kiszámításával, illetve $P_0P_1P_2$ hiperbolikus háromszög területének meghatározásával, (15)-öt alkalmazva megkapható $Vol(\mathcal{H}_p^{(q,r)})$. Ezek a térfogatok, és így a sűrűségek is q -tól függő, egyváltozós függvények, melyek valós függvényvizsgálatával adódnak a minimális sűrűségek, ezeket tartalmazza az alábbi táblázat:

Orthoszkém típusa	δ_{min}	q
$\mathcal{F}_5^{(4,4)}$	1.5063648	0.7638933
$\mathcal{F}_6^{(4,4)}$	1.5801968	0.7819052
$\mathcal{F}_7^{(4,4)}$	1.6471573	0.7936508

Orthoszkém típusa	δ_{min}	q
$\mathcal{F}_4^{(6,3)}$	1.3482413	0.7369142
$\mathcal{F}_5^{(6,3)}$	1.4432379	0.7655641
$\mathcal{F}_6^{(6,3)}$	1.5178400	0.7814085

Orthoszkém típusa	δ_{min}	q
$\mathcal{F}_7^{(3,6)}$	2.0237064	0.8402203
$\mathcal{F}_8^{(3,6)}$	2.0764303	0.8487021
$\mathcal{F}_9^{(3,6)}$	2.1373066	0.8551360

5.3. Legritkább fedés, ha a metszéspont az A_1A_2 élen fekszik

Az A_1A_2 él menejen át a szférák metszetgörbájén, azaz legyen a metszéspont $U(u) = (1, ux, y, uz_2 + (1 - u)z_1), (u \in [0, 1])$ az A_1A_2 él pontja (lásd 5. ábra). U koordinátáit a horo-, illetve hiperszféra egyenletébe helyettesítve megkaphatjuk S_1 és S_2 pontokat:

$$\frac{2(ux)^2 + 2(y)^2}{1 - s_1} + \frac{(2(uz_2 + (1 - u)z_1) - (s_1 + 1))^2}{(1 - s_1)^2} = 1 \quad (47)$$

$$(ux)^2 + (y)^2 + \frac{(uz_2 + (1 - u)z_1)^2}{s_2^2} = 1 \quad (48)$$

Ahonnán $s_2(u)$, $s_1(u)$ kifejezhető a korábbiakhoz hasonlóan.

A_0A_1 él egyenese a horoszféra ellipszoidjának belsejében halad, hiszen ha ez lenne, akkor az él egyenese érintője kell, hogy legyen az ellipszoidnak A_0 -ban, ami nem lehet, mert ekkor az él a modellen kívül haladna. Tehát az ellipszoid $[x, z]$ síkkal párhuzamos síkmetszetei tartalmazzák A_0A_1 egyenes valamely pontját. Ha ez ez a sík a $P_1A_1A_2P_2$, akkor egyrészt az ellipszoiddal való metszet létezik, mert U ezen a síkon van, másrészt ezen a síkon van A_1 is, tehát az ellipszoid A_1 csúcsot is tartalmazza. Ez azt jelenti, hogy a horoszféra lefedi A_0A_1 élt. Meghatározható a horoszféra metszés pontja A_0A_1 él egyenesével, az egyenletébe $Q_1 = (1, 0, qy, qz_1 + (1 - q))$ paraméterezés behelyettesítésével:

$$\frac{2(qy)^2}{1 - s_1(u)} + \frac{(2(qz_1 + (1 - q)) - (s_1(u) + 1))^2}{(1 - s_1(u))^2} = 1 \quad (49)$$

Ahonnán $q(u)$, kifejezhető, ezzel $Q_1(u)$ pont megkapható

Láttuk, hogy A_2 hiperbolikus magassága kisebb mint A_1 -é, tehát A_2 hiperbolikus magassága kisebb, mint A_1A_2 él bármely pontjának hiperbolikus magassága, így U -nak is. Tehát a szférák konvexitása miatt a hiperszféra lefedi A_2U -t, a horoszféra pedig UA_1 -et, tehát együtt lefedik A_1A_2 -t. Ugyanúgy mint az előző esetben itt is könnyen látszik, hogy a szférák együtt lefedik A_0P_0 -t.

Határozzuk meg a szférák metszéspontját A_0A_2 éllel úgy, hogy egyenleteikbe behelyettesítjük $T_1 = (1, t_1x, t_1y, t_1z_2 + (1 - t_1))$ és $T_2 = (1, t_2x, t_2y, t_2z_2 + (1 - t_2))$ paraméterezéseket. Illetve határozzuk meg a szférák metszéspontját P_1A_1 éllel úgy, hogy egyenleteikbe behelyettesítjük $V_1 = (1, 0, y, v_1z_1)$ és $V_2 = (1, 0, y, v_2z_1)$ paraméterezéseket.

$$\frac{2(t_1x)^2 + 2(t_1y)^2}{1 - s_1(u)} + \frac{(2(t_1z_2 + (1 - t_1)) - (s_1(u) + 1))^2}{(1 - s_1(u))^2} = 1 \quad (50)$$

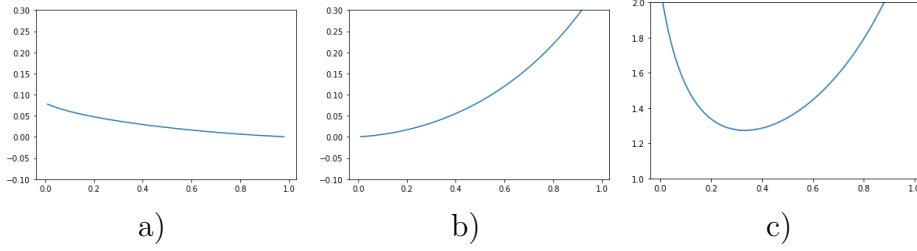
$$(t_2x)^2 + (t_2y)^2 + \frac{(t_2z_2 + (1 - t_2))^2}{s_2^2(u)} = 1 \quad (51)$$

$$\frac{2y^2}{1 - s_1(u)} + \frac{(2(v_1z_1) - (s_1(u) + 1))^2}{(1 - s_1(u))^2} = 1 \quad (52)$$

$$y^2 + \frac{(v_2z_1)^2}{s_2^2(u)} = 1 \quad (53)$$

Ahonnán $t_2(u)$, $t_1(u)$, $v_2(u)$, $v_1(u)$ kifejezhető, és azt látjuk ezen egyváltozós valós függvények vizsgálatánál, hogy így T_1 z -koordinátája: $t_1(u)z_2 + (1 - t_1(u))$ mindig kisebb, mint T_2 z -koordinátája: $t_2(u)z_2 + (1 - t_2(u))$. A szférák konvexek és a hiperszféra lefedi A_2 -t, a horoszféra lefedi A_0 -t, tehát együtt lefedik A_0A_2 élt. Továbbá az is kiderül a függvényvizsgálatból, hogy V_1 z -koordinátája: $v_1(u)z_1$ mindig kisebb, mint V_2 z -koordinátája: $v_2(u)z_1$. A szférák konvexek és a hiperszféra lefedik P_1 -et, a horoszféra lefedik A_1 -et, tehát együtt lefedik P_1A_1 élt.

Tehát ebben az esetben mindig megvalósul a hip-hor fedés, amelynek így meghatározhatjuk a sűrűségét. $Q_1(u)$, $T_1(u)$, $S_1(u)$ segítségével a hiperbolikus távolságok felírásával, (11), (12)-t alkalmazva megkapható $Vol(\mathfrak{H}_p^{(q,r)})$. $S_2(u)$ és P_0 hiperbolikus távolságának kiszámításával, illetve $P_0P_1P_2$ hiperbolikus háromszög területének meghatározásával, (15)-öt alkalmazva megkapható $Vol(\mathcal{H}_p^{(q,r)})$. Ezek a térfogatok, és így a sűrűségek is u -tól függő, egyváltozós függvények, melyek valós függvényvizsgálatával adódnak a minimális sűrűségek, ezeket tartalmazza az alábbi táblázatok:



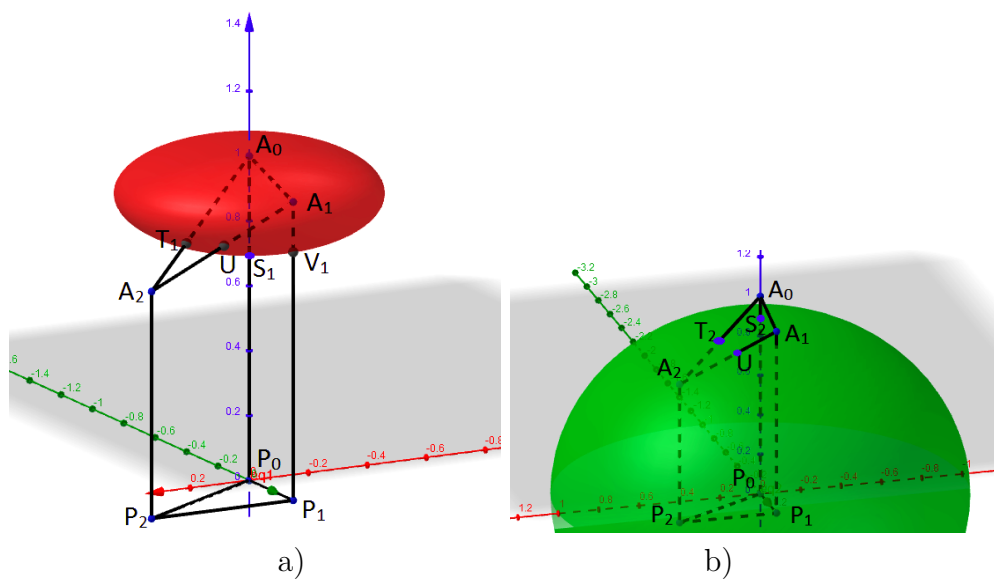
8. ábra. a) T_2 és T_1 z -koordinátájának különbsége $\mathcal{F}_7^{(3,6)}$ esetben b) V_2 és V_1 z -koordinátájának különbsége $\mathcal{F}_7^{(3,6)}$ esetben c) $\delta(\mathcal{C}_7^{(3,6)})(u)$

Orthoszkém típusa	δ_{min}	u
$\mathcal{F}_5^{(4,4)}$	1.32751357	0.3852174
$\mathcal{F}_6^{(4,4)}$	1.37006317	0.3748641
$\mathcal{F}_7^{(4,4)}$	1.40632671	0.3713670

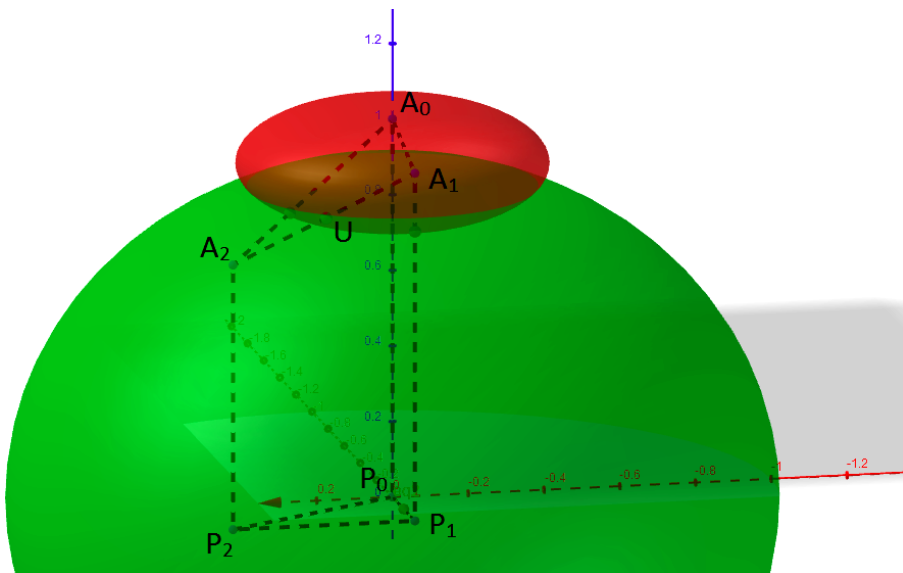
Orthoszkém típusa	δ_{min}	u
$\mathcal{F}_4^{(6,3)}$	1.5028918	0.3591
$\mathcal{F}_5^{(6,3)}$	1.63580132	0.326699
$\mathcal{F}_6^{(6,3)}$	1.72728141	0.3141772

Orthoszkém típusa	δ_{min}	u
$\mathcal{F}_7^{(3,6)}$	1.27297329	0.3324288
$\mathcal{F}_8^{(3,6)}$	1.288832	0.3337034
$\mathcal{F}_9^{(3,6)}$	1.3065421	0.3358650

Mint látni fogjuk, ebben az esetben kapjuk a legkisebb sűrűségeket, így ekkor érdemes vizsgálni bizonyos lokális fedéseket. Vagyis $\mathcal{F}_p^{(q,r)}$ p paraméterét is változtatjuk ($6 < p < 7$, $p \in \mathbb{R}$ tartományban), és ekkor vizsgáljuk az orthoszkém hip-hor fedését a fent leírtaknak megfelelően. Azonban ekkor nem fog teljesülni a lapszögekre vonatkozó feltétel, tehát a generált szimmetriacsoportot az orthoszkémre alkalmazva, annak képei nem fogják kitölteni a hiperbolikus teret. A fent leírt számítások ekkor ugyanúgy működnek, a sűrűsége kapott kétváltozós függvénynek numerikus számításokkal meghatározhatjuk a szélsőértékét. Azt kapjuk, hogy ekkor a hip-hor fedés minimális sűrűsége $p \approx 6.459617$ esetén $\delta \approx 1.268853$ lesz, azonban ez a hip-hor fedés nem terjeszthető ki a teljes hiperbolikus térre.



9. ábra. a) A horoszféra elhelyezése $\mathcal{F}_7^{(3,6)}$ -on a 3. esetnek megfelelően b) A hiperszféra elhelyezése $\mathcal{F}_7^{(3,6)}$ -on a 3. esetnek megfelelően



10. ábra. $\mathcal{F}_7^{(3,6)}$ legkisebb, ≈ 1.27297 -es sűrűséget produkáló hip-hor lefedése

5.4. Legritkább fedés, ha a metszéspont az A_0P_0 élen fekszik

Láttuk, hogy a hiperszféra ellipszoidjának legnagyobb, a horoszféra ellipszoidjának legkisebb z -koordinátájú pontja van az z -tengeylen, tehát A_0P_0 élen a szimmetria miatt. Vagyis ekkor a szférák érintik egymást, így ekkor nyilvánvalóan nem valósul meg hip-hor fedés.

5.5. Legritkább fedés, ha a metszéspont az A_1P_1 élen fekszik

Az A_1P_1 él menejen át a szférák metszetgörbájén, azaz legyen a metszéspont $V(v) = (1, 0, y, vz_1)$, $(v \in [0, 1])$ az A_1P_1 él pontja (lásd 5. ábra). Ennek az esetnek a vizsgálata az 1.esethez hasonlóan történik. A szférák egyenleteibe V -t helyettesítve $S_1(v)$ és $S_2(v)$ pontok megkaphatók. Meghatározhatjuk azt a v^* -ot, amikor a horoszféra megy át A_2 -n, illetve v^{**} -ot, amikor a hiperszféra. Ha $v^* < v < v^{**}$, akkor a szférák nem fedik le A_2 csúcsot. Ha $v^* > v$, akkor $R_1 = (1, x, y, r_1z_2)$ és $R_2 = (1, x, y, r_2z_2)$ paraméterezéseket behelyettesítve a szférák egyenleteibe megkaphatjuk, hogy azok hol metszik A_2P_2 élt. A horoszféra $R_1(v)$ és a hiperszféra $R_2(v)$ metszéspontjára egyváltozós függvények valós függvényvizsgálatával azt láthatjuk, hogy előbbi z -koordinátája mindig nagyobb, mint utóbbié, tehát a szférák nem fedik le A_2P_2 élt. Ha $v^{**} > v$, akkor $U_1 = (1, u_1x, y, u_1z_2 + (1 - u_1)z_1)$ és $U_2 = (1, u_2x, y, u_2z_2 + (1 - u_2)z_1)$ paraméterezéseket behelyettesítve a szférák egyenleteibe megkaphatjuk, hogy azok hol metszik A_1A_2 élt. A horoszféra $U_1(v)$ és a hiperszféra $U_2(v)$ metszéspontjára egyváltozós függvények valós függvényvizsgálatával azt láthatjuk, hogy előbbi z -koordinátája mindig nagyobb, mint utóbbié, tehát a szférák nem fedik le A_1A_2 élt. Tehát ebben az esetben nem valósul meg hip-hor fedés.

5.6. Legritkább fedés, ha a metszéspont az A_2P_2 élen fekszik

Az A_2P_2 él menejen át a szférák metszetgörbájén, azaz legyen a metszéspont $R(r) = (1, x, y, rz_2)$, $(r \in [0, 1])$ az A_2P_2 él pontja (lásd 5. ábra). Ennek az esetnek a vizsgálata a 2.esethez hasonlóan történik. A szférák egyenleteibe R -et helyettesítve $S_1(r)$ és $S_2(r)$ pontok megkaphatók. Az A_0A_1 és

A_2P_2 éleket lefedik a szférák, ezt úgy mint a 2. esetben a modell $P_0A_0A_2P_2$ síkmetszetével visszavezethetjük a 2-dimenziós esetre, majd alkalmazhatjuk a 3. lemmát. A_0P_0 élt is lefedik a szférák, ezt úgy, mint az eddigi esetekben könnyen láthatjuk. A_0A_1 és A_1A_2 éleket pedig a horoszféra fedi le, ezt úgy mint a 3. esetben a horoszféra ellipszoidjának $P_1A_1A_2P_2$ síkkal vett metszetéből láthatjuk. Tehát éppen az esetben mindig megvalósul a hip-hor fedés, amelynek így meghatározhatjuk a sűrűségét.

A horoszféra egyenletébe $Q_1 = (1, 0, qy, qz_1 + (1-q))$ és $T_1 = (1, tx, ty, tz_2 + (1-t))$ paraméterezéseket behelyettesítve kiszámolhatjuk a horoszféra metszéspontjait A_0A_1 és A_0A_2 élek egyeneseivel: $Q_1(r)$, $T_1(r)$. $Q_1(r)$, $T_1(r)$, $S_1(r)$ segítségével a hiperbolikus távolságok felírásával, (11), (12)-t alkalmazva megkapható $Vol(\mathfrak{H}_p^{(q,r)})$. $S_2(r)$ és P_0 hiperbolikus távolságának kiszámításával, illetve $P_0P_1P_2$ hiperbolikus háromszög területének meghatározásával, (15)-öt alkalmazva megkapható $Vol(\mathcal{H}_p^{(q,r)})$. Ezek a térfogatok, és így a sűrűségek is r -től függő, egyváltozós függvények, melyek valós függvényvizsgálatával adódnak a minimális sűrűségek, ezeketet tartalmazzák az alábbi táblázatok:

Orthoszkém típusa	δ_{min}	r
$\mathcal{F}_5^{(4,4)}$	1.8383911	0.8114832
$\mathcal{F}_6^{(4,4)}$	2.3821677	0.7332720
$\mathcal{F}_7^{(4,4)}$	3.0569894	0.7025236

Orthoszkém típusa	δ_{min}	r
$\mathcal{F}_4^{(6,3)}$	1.8001704	0.5691964
$\mathcal{F}_5^{(6,3)}$	2.6568700	0.4548009
$\mathcal{F}_6^{(6,3)}$	3.7545505	0.4352664

Orthoszkém típusa	δ_{min}	r
$\mathcal{F}_7^{(3,6)}$	2.3638149	0.9370251
$\mathcal{F}_8^{(3,6)}$	2.8225160	0.9017895
$\mathcal{F}_9^{(3,6)}$	3.3687338	0.8821157

5.7. Térbeli eredmények összefoglalása

A háromdimenziós esetekben kapott eredményeket az alábbi két tételben foglaljuk össze.

4. Tétel. A $\mathbb{H}^3$ térben az egyszerűen csonkolt Coxeter orthoszkémekhez tartozó hip-hor fedések közül $\mathcal{C}_7^{(3,6)}$ fedési elrendezés (lásd 5.3 fejezet) adja a legkisebb sűrűségű fedést, ≈ 1.27297 -es sűrűséggel. Az itt kapott konfigurációhoz tartozó ≈ 1.27297 -es sűrűség kisebb mint az eddig ismert legritkább, FEJES TÓTH LÁSZLÓ, BÖRÖCZKY KÁROLY nevéhez tartozó, ≈ 1.280 -as sűrűségű fedés a 3-dimenziós hiperbolikus térben.

5. Tétel. A $\mathbb{H}^3$ térben $\delta(\mathcal{C}_p^{(3,6)})$ ($6 < p < 7, p \in \mathbb{R}$) minimumát $p \approx 6.45962$ esetén éri el, ≈ 1.268853 -as sűrűséggel, azonban az ehhez tartozó hip-hor fedés nem terjeszthető ki a teljes hiperbolikus térre.

A fedési és pakolási elrendezések megadására és azok legkisebb és legnagyobb sűrűségének meghatározására működik az általunk használt eljárás magasabb dimenziókban is, ahol azonban a térfogatszámítás nehézségeivel kell szembenézni. Mint azt a 3.1 fejezetben említettük, az 5-dimenziós hiperbolikus térben létezik még analóg, egyszerűen csonkolt Coxeter orthoszkémek által generált kövezés. Ennek az esetnek a vizsgálata további érdekes kérdés lehet.

Az n -dimenziós hiperbolikus térben az optimális hip-hor fedés és pakolás kérdése, az elrendezés szimmetriájára vonatkozó feltevés nélkül, nyitott. Hasonlóan az n -dimenziós hiperbolikus térben ($n \geq 3$) az optimális fedés és pakolás elrendezése kongruens hiperszférákkal vagy azonos típusú horoszférákkal, nem tisztázott. Továbbá általában is a homogén Thurston geometriákban az optimális gömbelrendezések a matematika egy nagy, nyitott kérdéskörét alkotják, és számos izgalmas és megválaszolatlan kérdést tartogatnak számunkra.

Hivatkozások

- [1] BEZDEK, K.: Sphere Packings Revisited, *Eur. J. Combin.*, **27/6** (2006), 864–883.
- [2] BOLYAI, J.: *Appendix, Scientiam Spatii absolute verum exhibens;...*, Marosvásárhely, (1831).
- [3] BÖHM, J, HERTEL, E.: *Polyedergeometrie in n-dimensionalen Räumen konstanter Krümmung*, Birkhäuser, Basel (1981).
- [4] ifj. BÖRÖCZKY KÁROLY: Kövezések, elhelyezések és fedések a hiperbolikus térben
- [5] BÖRÖCZKY, K.: Gömbelhelyezések állandó görbületű terekben I. *Math. Lapok* **25** (1974) 265–306.
- [6] BÖRÖCZKY, K.: Gömbelhelyezések állandó görbületű terekben II. *Math. Lapok* **26** (1975) 67–90.
- [7] BÖRÖCZKY, K.: Packing of spheres in spaces of constant curvature. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **32** (1978) 243–261.
- [8] BÖRÖCZKY, K. – FLORIAN, A.: Über die dichteste Kugelpackung im hyperbolischen Raum. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **15** (1964) 237–245.
- [9] BÖRÖCZKY, K. JR.: *Finite packing and covering*. Cambridge University Press (2004).
- [10] COXETER H. S. M: Discrete groups generated by reflections. *Ann. Math.* **35** (1934) 588–621.
- [11] COXETER H. S. M: Regular honeycombs in hyperbolic space. *Proceedings of the international Congress of Mathematicians, Amsterdam III* (1954) 155–169.
- [12] FEJES TÓTH L.: *Regular Figures*, Pergamon Press (1964).
- [13] FEJES TÓTH, G. – KUPERBERG, W. Packings and Covering. *Handbook of Convex Geometry*, P. M. Gruber, J. M. Wills (eds.) North Holland (1993), 799–860.

- [14] FEJES TÓTH G.: Covering the plane by convex discs. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **23** (1972) 263–270.
- [15] Á.G.HORVÁTH ÉS J. SZIRMAI: Nemeuklideszi geometriák modelljei *Typotex Kiadó (Budapest)*, 2004.
- [16] HALES T. C. – FERGUSON, S. P.: The Kepler conjecture. *Discrete and Computational Geometry* **36(1)** (2006) 1–269.
- [17] HEPPES, A. – MOLNÁR, J.: Neuere Ergebnisse in der discreten Geometrie. *Mat. Lapok* **11** (1961) 330–355.
- [18] HORVÁTH, J. – TEMESVÁRI H. Á.: Über die Enge von Kugelpackungen und Dicke von Punktsystemen in hyperbolischen Räumen. *Math. Pannonica* **8/1** (1997) 137–154.
- [19] HORVÁTH, Á. G. Formulas on hyperbolic volume *Aequat.Math.*, **83** (2012), 97–116.
- [20] JOHNSON, N. W. – KELLERHALS, R. – RATCLIFFE, J. G. – TSCHANTS, S. T.: The Size of a Hyperbolic Coxeter Simplex, *Transform. Groups*, **4/4** (1999), 329–353.
- [21] IM HOF, H.-C.: A class of hyperbolic Coxeter groups, *Expo. Math.*, (1985) **3** , 179–186.
- [22] IM HOF, H.-C.: Napier cycles and hyperbolic Coxeter groups, *Bull. Soc. Math. Belgique*, (1990) **42** , 523–545.
- [23] KELLERHALS, R.: On the volume of hyperbolic polyhedra, *Math. Ann.*, (1989) **245** , 541–569.
- [24] KELLERHALS, R.: The Dilogarithm and Volumes of Híperbolic Polytopes, *AMS Mathematical Surveys and Monographs*, (1991) **37** , 301–336.
- [25] KELLERHALS, R.: Ball packings in spaces of constant curvature and the simplicial density function, *J. Reine Angew. Math.*, (1998) **494** , 189–203.

- [26] KEPLER, J.: Strena seu de nive sexangula. *Frankfurt, Germany: Tampach* (1611) *Reprinted in Gesammelte Werke* (Ed. M. Caspar and F. Hammer), **4** Oxford, England: Clarendon Press, (1966).
- [27] KOZMA, R. T. – SZIRMAI, J.: Optimally dense packings for fully asymptotic Coxeter tilings by horoballs of different types, *Monatsh. Math.*, **168/1** (2012), 27–47.
- [28] KOZMA, R. T. – SZIRMAI, J.: New Lower Bound for the Optimal Ball Packing Density of Hyperbolic 4-space, *Discrete Comput. Geom.*, (2014), DOI: 10.1007/s00454-014-9634-1.
- [29] KOZMA, R. T. – SZIRMAI, J.: The structure and visualization of optimal horoball packings in 3-dimensional hyperbolic space, *Submitted Manuscript*, (2016), arXiv: 1601.03620, (Melléklet: <http://homepages.math.uic.edu/~rkozma/SVOHP.html>).
- [30] KOZMA, R. T. – SZIRMAI, J.: New horoball packing density lower bound in hyperbolic 5-space, *Geometriae Dedicata*, (2019), DOI: 10.1007/s10711-019-00473-x, arXiv:1809.05411.
- [31] KOZMA, R. T. – SZIRMAI, J.: Horoball Packing Density Lower Bounds in Higher Dimensional Hyperbolic n -space for $6 \leq n \leq 9$, *Submitted Manuscript*, (2019), arXiv:1907.00595.
- [32] LAGRANGE, J.-L.: Recherches d’arithmétique. *Nouv. Mém. Acad. Roy. Soc. Belles Lettres (Berlin)* (1773) 265–312. *Reprinted in Oeuvres*, **3**, 693–758.
- [33] LANNÉR F.: On complexes with transitive groups of automorphisms. *Medd. Lunds Univ. Mat. Sem.* **11** (1950) 1–71.
- [34] MOLNÁR, E. – SZIRMAI, J.: Top dense hyperbolic ball packings and coverings for complete Coxeter orthoscheme groups, *Publications de L’institut Mathématique*, **103(117)** (2018), 129–146, DOI: 10.2298/PIM1817129M.
- [35] E. MOLNÁR: Polyhedron complexes with simply transitive group actions and their realizations, *Acta Math. Hung.*, **59/1-2** (1991), 175–216.

- [36] E. MOLNÁR: The projective interpretation of the eight 3-dimensional homogeneous geometries, *Beitr. Algebra Geom.*, **38** (1997), 261–288.
- [37] ROGERS, C. A.: *Packing and Covering*. Cambridge, England: Cambridge University Press, (1964).
- [38] SZIRMAI, J.: Horoball packings to the totally asymptotic regular simplex in the hyperbolic n -space, *Aequat. Math.*, **85** (2013), 471–482, DOI: 10.1007/s00010-012-0158-6.
- [39] SZIRMAI, J.: Horoball packings and their densities by generalized simplicial density function in the hyperbolic space, *Acta Math. Hung.*, **136/1-2** (2012), 39–55, DOI: 10.1007/s10474-012-0205-8.
- [40] SZIRMAI, J.: A candidate to the densest packing with equal balls in the Thurston geometries. *Beitr. Algebra Geom.*, **55/2** (2014), 441–452, DOI 10.1007/s13366-013-0158-2.
- [41] SZIRMAI, J.: The optimal hyperball packings related to the smallest compact arithmetic 5-orbifolds, *Kragujevac Journal of Mathematics*, **40/2** (2016), 260–270, DOI:10.5937/KgJMath1602260S, arXiv: 1306.4221.
- [42] SZIRMAI, J.: The p -gonal prism tilings and their optimal hypersphere packings in the hyperbolic 3-space, *Acta Math. Hung.*, **111(1-2)** (2006), 65–76
- [43] SZIRMAI, J.: Upper bound of density for packing of congruent hyperballs in hyperbolic 3-space, *Submitted Manuscript*, (2019)
- [44] SZIRMAI, J.: The least dense hyperball covering to the regular prism tilings in the hyperbolic n -space, *Ann. Mat. Pur. Appl.* (2016) **195/1**, 235–248, DOI: 10.1007/s10231-014-0460-0.
- [45] SZIRMAI, J.: Hyperball packings in hyperbolic 3-space, *Matematički Vesnik*, **70/3**, (2018), 211–221, arXiv: 1405.0248.
- [46] SZIRMAI, J.: Decomposition method related to saturated hyperball packings, *Ars Mathematica Contemporanea*, **16**, (2019), 349–358, DOI: 10.26493/1855-3974.1485.0b1, arXiv: 1709.04369.

- [47] SZIRMAI, J.: Horoball packings related to the 4-dimensional hyperbolic 24 cell honeycomb $\{3, 4, 3, 4\}$, *Filomat*, **32/1** (2018), 87-100, DOI: 10.2298/FIL1801087S, arXiv: 1502.02107.
- [48] SZIRMAI, J.: Packings with horo- and hyperballs generated by simple frustum orthoschemes, *Acta Math. Hungar.* **152 (2)**, (2017), 365-382, DOI:10.1007/s10474-017-0728-0.
- [49] SZIRMAI, J.: Density upper bound of congruent and non-congruent hyperball packings generated by truncated regular simplex tilings, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo Series 2*, **67** (2018), 307-322, DOI: 10.1007/s12215-017-0316-8, arXiv:1510.03208.
- [50] SZIRMAI, J.: Hyperball packings related to octahedron and cube tilings in hyperbolic space, *Submitted manuscript* (2018), arXiv: 1709.04369.
- [51] SZIRMAI, J.: Congruent and non congruent hyperball packings related to doubly truncated Coxeter orthoschemes in hyperbolic 3-space, *Submitted manuscript* (2018).
- [52] VERMES, I.: Ausfüllungen der hyperbolischen Ebene durch kongruente Hyperzykelbereiche, *Period. Math. Hungar.* (1979) **10/4**, 217–229.
- [53] VERMES, I.: Über reguläre Überdeckungen der Bolyai-Lobatschewskischen Ebene durch kongruente Hyperzykelbereiche, *Period. Math. Hungar.* (1981) **25/3**, 249–261.
- [54] VERMES, I.: Über eine Ungleichung bezüglich der Dichte der regulären Ausfüllungen der hyperbolischen Ebene durch kongruente Hyperzykelbereiche, *Studia Sci. Math. Hungar.* (1986) **21**, 29–33.
- [55] VERMES, I.: Bemerkungen zum Problem der dünnsten Überdeckungen der hyperbolischen Ebene durch kongruente Hyperzykelbereiche, *Studia Sci. Math. Hungar.* (1988) **23**, 1–6.
- [56] VERMES, I.: Kreisunterdeckungen auf einem Hyperzykelbereich in der hyperbolischen Ebene, *Studia Sci. Math. Hungar.* (1991) **26**, 111–114.