1. előadás: Halmazelmélet, számfogalom, teljes indukció

Szabó Szilárd

Halmazok

Halmaz: alapfogalom, bizonyos elemek (matematikai objektumok) összessége.
Egy halmaz akkor adott, ha minden objektumról eldönthető, hogy hozzátartozik-e, továbbá ha bármely két elemről eldönthető, hogy azonosak-e.
Tartalmazás: az A halmaz részhalmaza a B halmaznak, ha A minden eleme egyúttal eleme B-nek is.
Az A és B halmazok egyenlők, ha A részhalmaza B-nek és B is részhalmaza A-nak (azaz, pontosan ugyanazok az elemeik).
A szigorú részhalmaza B-nek, ha A részhalmaza B-nek de A nem egyenő B-vel.
Üres halmaz: az a $\emptyset$ halmaz, amelynek egyetlen szóba jöhető objektum sem eleme.
A és B diszjunkt, ha nincs közös elemük.

Halmazokkal kapcsolatos jelölések

- Halmazok: $A, B, X, \ldots$;
- elemek: $c, d, \ldots$;
- c hozzátartozik A-hoz: $c \in A$;
- c nem tartozik hozzá A-hoz: $c \notin A$;
- A részhalmaza B-nek: $A \subseteq B$;
- A nem részhalmaza B-nek: $A \nsubseteq B$;
- A egyenlő B-vel: $A = B$;
- A nem egyenlő B-vel: $A \neq B$;
- A szigorú részhalmaza B-nek: $A \subset B$;
- A nem szigorú részhalmaza B-nek: $A \not\subset B$.

Halmazok megadási módja

Rögzítsünk egy olyan U halmazt (univerzum), amely tartalmazza az összes vizsgálható objektumot. Legyen továbbá F valamely egyértelműen eldönthető logikai feltétel U elemein.
Ekkor F-hez hozzárendelhető egy halmaz a következő módon:

$$A = \{a \in U| \quad a \text{ teljesíti } F\text{-et}\}.$$

Példa

$U = \mathbf{Z}$ az összes egész szám halmaza, F: egy adott egész szám osztható 2-vel. Ekkor a megfelelő A halmaz:

$$A = \{n \in \mathbf{Z}| \quad n \textit{ osztható } 2\textit{-vel}\}$$

a páros egész számok halmaza.

Műveletek halamzokkal

A és B egyesítése (uniója): azon $A \cup B$ halmaz, amelynek valamely c objektum akkor és csak akkor eleme, ha $c \in A$ vagy pedig $c \in B$ teljesül.
A és B metszete: azon $A \cap B$ halmaz, amelynek valamely c objektum akkor és csak akkor eleme, ha $c \in A$ és egyúttal $c \in B$ is teljesül.
A és B diszjunkt, ha $A \cap B = \emptyset$.
Az egyesítés és metszet-képzés általánosítható halmazok tetszőleges I halmazzal indexezett $\{A_i\}_{i \in I}$ családjára is, jelölés:

$$\cup_{i \in I} A_i, \quad \cap_{i \in I} A_i.$$

A és B különbsége: azon $A \setminus B$ halmaz, amelynek valamely c objektum akkor és csak akkor eleme, ha $c \in A$ de ugyanakkor $c \notin B$.
A komplementere (U-ra nézve): $\bar{A} = U \setminus A$.

de Morgan-azonosságok

Az alábbi tulajdonságok bármely A és B halmazok esetén fennállnak:

- $\bar{\bar{A}} = A$;
- $\overline{\bar{A} \cap \bar{B}} = A \cup B$;
- $\overline{\bar{A} \cup \bar{B}} = A \cap B$.

Általánosabban, minden I halmazzal indexezett $\{A_i\}_{i \in I}$ családra

- $\overline{\cup_{i \in I} A_i} = \cap_{i \in I} \overline{A_i}$;
- $\overline{\cap_{i \in I} A_i} = \cup_{i \in I} \overline{A_i}$.

Halmazok direkt szorzata

Tetszőleges két x, y elemből alkotott (x, y) párt, ahol a sorrendjük számít, rendezett elempárnak nevezünk.
Tetszőleges A, B halmazok esetén azon (a, b) rendezett elempárok halmazát, amelyre $a \in A$ és $b \in B$, A és B direkt (Descartes-)szorzatának hívjuk:

$$A \times B = \{(a, b) | \quad a \in A \text{ és } b \in B\}.$$

Példa

$$\{0, 1\} \times \{1, 2\} = \{(0, 1), (0, 2), (1, 1), (1, 2)\}.$$

Amennyiben $B = A$, akkor $A \times B = A \times A$-t A második direkt hatványának nevezzük. Hasonlóan értelmezzük a harmadik, negyedik, s. í. t. magasabb direkt hatványokat.

Relációk, ekvivalencia-relációk

Legyen A egy halmaz. Egy két-változós reláció A-n egy tetszőleges R részhalmaza $A \times A$-nak.

Egy R két-változós relációról azt mondjuk, hogy

- reflexív, ha minden $a \in A$ esetén $(a, a) \in R$;
- szimmetrikus, ha valahányszor $(a, b) \in R$, mindannyiszor $(b, a) \in R$ is teljesül;
- tranzitív, ha valahányszor $(a, b) \in R$ és $(b, c) \in R$, mindannyiszor $(a, c) \in R$ is teljesül.

Egy ekvivalencia-reláció A-n egy olyan R két-változós reláció A-n, amely reflexív, szimmetrikus és tranzitív.

Jelölés

Ha R egy ekvivalencia-reláció, akkor $(a, b) \in R$-et gyakran így jelöljük: $a \sim_R b$, vagy ha nem okozhat tévedést, akkor egyszerűbben: $a \sim b$.

Ekvivalencia-relációk és osztályfelbontások

Példa

- *A legszűkebb ekvivalencia-reláció A-n az egyenlőségi reláció:* $a \sim b$ *akkor és csak akkor, ha* $a = b$.
- *A legbővebb ekvivalencia-reláció A-n a triviális reláció: minden* $a, b \in A$ *esetén* $a \sim b$.

További példák megértéséhez hasznos a következő:

Állítás

Egy adott A halmazon adott ekvivalencia-relációhoz hozzárendelhető A egy

$$A = \cup_{i \in I} A_i$$

felbontása valamely $A_i \subseteq A$ *egymással páronként diszjunkt részhalmazainak egyesítésére. Továbbá, minden fenti alakú felbontáshoz található egy ekvivalencia-reláció A-n, és e két eljárás egymás inverzei.*

Ekvivalencia-relációk és osztályfelbontások, bizonyítás

Ha R egy ekvivalencia-reláció, akkor minden $a \in A$ elemhez hozzárendelhetjük A-nak az

$$A_a = \{b \in A| \quad a \sim b\}$$

részhalmazát. Ekkor a reflexivitás miatt $a \in A_a$, a szimmetria miatt ha $b \in A_a$ akkor $a \in A_b$, végül pedig a tranzitivitás miatt ha $b \in A_a$ és $c \in A_b$ akkor $c \in A_a$. Ezekből az következik, hogy két A_a illetve A_b részhalmaz vagy egyenlő, vagy egymástól diszjunkt, harmadik eset nem lehetséges. Kiválasztva minden ilyen A_a halmazból egyetlen $i \in A_a$ elemet, megkapjuk a kívánt felbontást. Az ellenkező irányú eljárás hasonló módon működik: egy

$$A = \cup_{i \in I} A_i$$

felbontáshoz rendeljük hozzá azt a relációt, amelyre $a \sim b$ akkor és csak akkor teljesül, ha $A_a = A_b$. Könnyen belátható, hogy ez az eljárás az előző inverze.

Természetes számok

Axiomatikus felépítés: Giuseppe Peano (1858–1932).

Természetes számok axiómái: $\mathbf{N}$ halmaz ellátva egy $0 \in \mathbf{N}$ elemmel és egy $r : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ rákövetkezési függvénnyel $(r(n) = n + 1)$, amelyek teljesítik a következőket:

1. r injektív;
2. $0 \notin R_r$;
3. ha $V \subseteq \mathbf{N}$ olyan, hogy $0 \in V$ továbbá minden $n \in V$-re $r(n) \in V$ is teljesül, akkor $V = \mathbf{N}$.

Természetes számok egy modellje:

- $0 = \emptyset$;
- $1 = r(0)$ legyen a $\{0\} = \{\emptyset\}$ halmaz;
- $2 = r(1)$ legyen a $\{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ halmaz;
- általánosan, minden már megszerkesztett $n \in \mathbf{N}$ elemre legyen $r(n) = n \cup \{n\}$.

Teljes indukció elve

A 3. axióma másnéven a teljes indukció bizonyítási módszere: ha bebizonyítjuk, hogy valamely állítás

1. igaz $n = 0$-ra
2. és ha igaz n-re akkor igaz $(n + 1)$-re is,

akkor az adott állítást beláttuk minden $n \in \mathbf{N}$-re.

Példa teljes indukciós bizonyításra

Bebizonyítjuk, hogy minden $n \in \mathbf{N}$-re

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

1. $n = 0$-ra mindkét oldal 0,
2. ha n-re igaz, akkor

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + n + (n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= (n+1)\left(\frac{n}{2} + 1\right) \\ &= (n+1)\frac{n+2}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}, \end{aligned}$$

tehát $(n+1)$-re is igaz.

Természetes számok tulajdonságai

Rendezési reláció egy A halmazon: olyan $<$ reláció, amelyre

- $a < a$ semelyik $a \in A$ esetén sem teljesül;
- minden $a_1 \neq a_2 \in A$ esetén $a_1 < a_2$ és $a_2 < a_1$ közül pontosan az egyik teljesül;
- $<$ tranzitív.

$\mathbf{N}$-en létezik egy rendezés: $n < m$ akkor és csak akkor, ha $m = r(r(\cdots r(n)\cdots))$ valahány r alkalmazásával.
$\mathbf{N}$-en létezik egy kétváltozós összeadás művelet:

$$\mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N}$$
$$(n, m) \mapsto n + m.$$

Egész számok bevezetése

A természetes számok körében nem végezhető el a kivonás $\rightsquigarrow$ egész számok.
Tekintsük az $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ halmazt, és vezessük be rajta a következő ekvivalencia-relációt:

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c.$$

Az egész számok $\mathbf{Z}$ halmaza: az $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ halmazon a $\sim$-re vett ekvivalencia-osztályok halmaza.
Rendezés $\mathbf{Z}$-n:

$$(a, b) < (c, d) \Leftrightarrow a + d < b + c.$$

Egy n természetes szám ellentettje: $(0, n)$ ekvivalencia-osztálya; jelölés: $-n$. $(0, 0)$ osztálya: 0.

Műveletek egész számokkal

Összeadás $\mathbf{Z}$-n:

$$(a, b) + (c, d) = (a + b, c + d)$$

Minden egész számnak létezik vagy $(n, 0)$ vagy $(0, n)$ alakú reprezentánsa, ahol $n \in \mathbf{N}$.
Ebből a szokásos módon származik a szorzás művelete:

$$\begin{aligned}
(n, 0) \times (m, 0) &= (nm, 0) \\
(n, 0) \times (0, m) &= (0, nm) \\
(0, n) \times (m, 0) &= (0, nm) \\
(0, n) \times (0, m) &= (nm, 0).
\end{aligned}$$

Racionális számok bevezetése

Az egész számok körében nem végezhető el az osztás $\rightsquigarrow$ racionális számok.
A $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ halmazon vezessük be a következő ekvivalencia-relációt:

$$(p, q) \sim (t, u) \Leftrightarrow pu = qt.$$

Racionális számok: $\mathbf{Q}$ halmaz, amelynek elemei az ekvivalencia-osztályok.

Jelölés

- $(p, q) = \frac{p}{q}$;
- $(0, q)$ *osztálya:* 0;
- (q, q) *osztálya:* 1.

Műveletek racionális számokkal

$\mathbf{Q}$-n létezik egy rendezés:

$$(p, q) < (t, u) \Leftrightarrow pu < qt.$$

Továbbá, $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^+ \cup \{0\} \cup \mathbf{Q}^-$, ahol $\mathbf{Q}^+$ (illetve $\mathbf{Q}^-$) azon elemek halmaza, amelyek > 0 (illetve < 0).
$\mathbf{Q}$-n értelmes az összeadás, kivonás, szorzás. Osztás: ha $(t, u) \neq 0$, azaz $t \neq 0$, akkor

$$(p, q) : (t, u) = (p, q) \cdot (u, t) = (pu, qt).$$

Valós számok

A racionális számoknak létezik (lényegében) egyértelmű tizedes-tört alakjuk, amely periodikus.
Hozzávéve **Q**-hoz a nem-periodikus tizedes-törteket is, kapjuk a valós számok **R** halmazát.
R-ben értelmezett:

- összeadás
- kivonás
- szorzás
- osztás 0-tól különböző számmal.

Ezek a műveletek teljesítik a szokásos azonosságokat, pl.:

$$a + b = b + a$$
$$ab = ba$$
$$(a + b)c = ac + bc.$$