2. előadás: Komplex számok 1.

Szabó Szilárd

A komplex számok halmaza

A valós számkörben nem minden polinomiális egyenlet megoldható, például:

$$x^2 + 1 = 0.$$

Vezessünk be formálisan egy i gyökét a fenti polinomnak:

$$\mathrm{i}^2 = -1.$$

i neve: képzetes egység. Fontos: $\mathrm{i} \notin \mathbf{R}$.
A komplex számok $\mathbf{C}$ halmaza álljon a

$$z = a + b\mathrm{i}$$

alakú elemekből, ahol $a, b \in \mathbf{R}$ tetszőlegesek.
Minden $a \in \mathbf{R}$ valós számra gondolhatunk úgy, mint komplexre:

$$a + 0\mathrm{i} \in \mathbf{R} \subset \mathbf{C}.$$

Egy $z = 0 + b\mathrm{i}$ alakú komplex számot tisztán képzetesnek nevezünk.

Algebrai alak, valós és képzetes rész

Legyen
$$z = a + bi$$
tetszőleges komplex szám. Ezt a felírást z algebrai alakjának nevezzük.
Továbbá, a-t z valós részének, b-t pedig z képzetes részének hívjuk. Jelöléssel:
$$a = \Re(z), \quad b = \Im(z).$$
A $0 \in \mathbf{C}$ komplex szám:
$$0 = 0 + 0\mathrm{i}.$$
Két komplex szám z, w megegyezik (jelölése: $z = w$) akkor és csak akkor, ha
$$\Re(z) = \Re(w), \quad \Im(z) = \Im(w).$$

Komplex számok összeadása és ellentettje

Legyenek

$$z = a + bi \quad w = c + di$$

algebrai alakban adott komplex számok. Ekkor z és w összege:

$$z + w = (a + c) + (b + d)\mathrm{i}.$$

Azaz,

$$\Re(z + w) = \Re(z) + \Re(w), \quad \Im(z + w) = \Im(z) + \Im(w).$$

Minden $z \in \mathbf{C}$ számhoz létezik egy és csak egy olyan $-z \in \mathbf{C}$, amelyre

$$z + (-z) = 0;$$

$-z$ neve: z ellentettje. Konkrétan,

$$\Re(-z) = -\Re(z), \quad \Im(-z) = -\Im(z).$$

Komplex számok szorzása

Legyenek

$$z = a + b\mathrm{i} \quad w = c + d\mathrm{i}$$

algebrai alakban adott komplex számok. Ekkor z és w szorzata:

$$\begin{aligned} zw &= (a + b\mathrm{i})(c + d\mathrm{i}) \\ &= ac + bc\mathrm{i} + ad\mathrm{i} + bd\mathrm{i}^2 \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)\mathrm{i}. \end{aligned}$$

Komplex konjugálás, abszolút érték

Legyen

$$z = a + bi$$

tetszőleges komplex szám. Ekkor z komplex konjugáltja:

$$\bar{z} = a - bi.$$

Továbbá, z abszolút értéke:

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{z\bar{z}} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbf{R}_+ \cup \{0\}. \end{aligned}$$

Minden $z \neq 0$ esetén $|z| > 0$.

Komplex számok inverze, osztás

Minden $z \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ számhoz létezik egy és csak egy olyan $z^{-1} \in \mathbf{C}$ (z inverze), amelyre

$$zz^{-1} = 1.$$

Valóban, $z = a + b\mathrm{i}$ esetén

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}\mathrm{i}$$

megfelel:

$$\begin{aligned}
&(a + b\mathrm{i})\left(\frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}\mathrm{i}\right) = \\
&= \left(\frac{a^2}{a^2 + b^2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2}\right) + \left(\frac{ba}{a^2 + b^2} - \frac{ab}{a^2 + b^2}\right)\mathrm{i} = \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Az osztás az eddigi műveletekre vezethető vissza: $w \neq 0$-ra

$$\frac{z}{w} = zw^{-1}.$$

Komplex számok műveleti azonosságai

Teljesülnek:

- $z + 0 = z$
- $z + w = w + z$
- $(z + w) + u = z + (w + u)$
- $1z = z$
- $0z = 0$
- $zw = wz$
- $(zw)u = z(wu)$
- $z(w + u) = zw + zu$
- $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$
- $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$
- $\overline{z^{-1}} = \bar{z}^{-1}$
- $(zw)^{-1} = z^{-1}w^{-1}$

Műveleti azonosság bizonyítása

Lássuk be például a $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$ azonosságot:

$$\begin{aligned}
\overline{zw} &= \overline{(ac - bd) + (ad + bc)\mathrm{i}} \\
&= (ac - bd) - (ad + bc)\mathrm{i} \\
&= (ac - (-b)(-d)) + (a(-d) + (-b)c)\mathrm{i} \\
&= (a - b\mathrm{i})(c - d\mathrm{i}) \\
&= \bar{z}\bar{w}.
\end{aligned}$$

Műveleti azonosság következménye

Az előző lap azonosságának felhasználásával:

$$\begin{aligned} |zw|^2 &= zw\overline{zw} \\ &= zw\bar{z}\bar{w} \\ &= z\bar{z}w\bar{w} \\ &= |z|^2|w|^2. \end{aligned}$$

Amiből továbbá:

$$1 = |1|^2 = \left|zz^{-1}\right|^2 = |z|^2\left|z^{-1}\right|^2,$$

azaz

$$\left|z^{-1}\right| = \frac{1}{|z|}$$

Komplex számok ábrázolása

Tekintsük a sík Descartes-féle derékszögű koorináta-rendszerét. Feleltessük meg a $z = a + bi \in \mathbf{C}$ számnak a

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$$

pontot.

$\mathbf{C}$	$\mathbf{R}^2$
komplex számok összeadása	vektorok összeadása
komplex konjugálás	x-tengelyre tükrözés
0	$\vec{0}$
abszolút érték	$\vec{0}$-tól mért távolság
inverz-képzés + konjugálás	inverzió az egységkörre

A komplex számok szorzásának vektoriális értelmét a trigonometriai alakjuk bevezetése után fogjuk látni.