3. előadás: Komplex számok 2.

Szabó Szilárd

Irányszög

Legyen adott algebrai alakban egy $z = a + bi \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$.
Ekkor z irányszögének vagy argumentumának nevezzük azt a $\varphi \in \mathbf{R}$ szöget, amellyel a pozitív x-tengelyt elforgatva a 0 kezdőpontú, a z-nek megfelelő ponton keresztül haladó félegyeneshez jutunk.
Jelölés:

$$\varphi = \arg(z).$$

Fontos észrevétel: az $\arg(z)$ értéke csupán $2n\pi$ (ahol $n \in \mathbf{Z}$) alakú számok hozzádaása erejéig jól meghatározott.

Komplex szám trigonometriai alakja, konjugálás

Vegyük észre, hogy

$$\cos(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin(\varphi) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

ahonnan átrendezéssel:

$$a = |z| \cos(\varphi), \quad b = |z| \sin(\varphi).$$

Szokás használni a $|z| = r$ jelölést. Ekkor tehát:

$$z = r\left(\cos(\varphi) + \sin(\varphi)\mathrm{i}\right).$$

Ez $z \in \mathbf{C}$ trigonometriai alakja.
Mintogy $\cos(-\varphi) = \cos(\varphi)$ és $\sin(-\varphi) = -\sin(\varphi)$, kapjuk:

$$\bar{z} = r\left(\cos(-\varphi) + \sin(-\varphi)\mathrm{i}\right).$$

Szorzás trigonometriai alakban

Legyenek

$$z_1 = r_1 \left(\cos(\varphi_1) + \sin(\varphi_1)\mathrm{i}\right) \quad z_2 = r_2 \left(\cos(\varphi_2) + \sin(\varphi_2)\mathrm{i}\right)$$

trigonometriai alakban adott nem 0 komplex számok. Ekkor

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \sin(\varphi_1 + \varphi_2)\mathrm{i}\right).$$

Valóban, már láttuk, hogy

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|,$$

tehát csak azt kell megmutatni, hogy

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2).$$

Ez következik abból, hogy a $(0, 1, z_1)$ és $(0, z_2, z_1 z_2)$ csúcsú háromszögek hasonlóak, mert a második háromszög oldalhosszai rendre r_2-szeresei az első háromszög megfelelő oldalainak.

Inverz-számítás és osztás trigonometriai alakban

Legyen

$$z = r\left(\cos(\varphi) + \sin(\varphi)\mathrm{i}\right) \neq 0.$$

Ekkor

$$z^{-1} = r^{-1}\left(\cos(-\varphi) + \sin(-\varphi)\mathrm{i}\right),$$

amint az azonnal következik a szorzás alakjából:

$$1 = 1(\cos(0) + \sin(0)\mathrm{i}) = rr^{-1}\left(\cos(\varphi - \varphi) + \sin(\varphi - \varphi)\mathrm{i}\right).$$

Többek között, eddigi jelöléseinkkel

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \sin(\varphi_1 - \varphi_2)\mathrm{i}\right).$$

Hatványozás (de Moivre-képletek)

Ha

$$z = r\left(\cos(\varphi) + \sin(\varphi)i\right) \neq 0,$$

és $n \in \mathbf{Z}$, akkor

$$z^n = r^n\left(\cos(n\varphi) + \sin(n\varphi)i\right).$$

Bizonyítás: $n > 0$-ra teljes indukcióval z trigonometriai alakjából a szorzás szabályának segítségével; $n < 0$-ra teljes indukcióval z^{-1} trigonometriai alakjából.

Komplex n-edik gyökök

Legyen

$$z = r\,(\cos(\varphi) + \sin(\varphi)\mathrm{i}) \neq 0$$

rögzített, és keressük az összes olyan

$$w = t\,(\cos(\psi) + \sin(\psi)\mathrm{i})$$

komplex számot, amelyre

$$w^n = z.$$

Az ilyen $w \in \mathbf{C}$ számok neve: z komplex n-edik gyökei.

Az n-edik gyökök trigonometriai alakja

Minden $z \neq 0$ komplex számnak n különböző komplex n-edik gyöke van, amelyek abszolút-értéke és argumentuma:

$$t = \sqrt[n]{r}, \quad \psi = \frac{\varphi + 2k\pi}{n},$$

ahol $0 \leq k \leq n - 1$.

Az n-edik gyökök trigonometriai alakja, bizonyítás

A de Moivre-képletek értelmében,

$$w^n = t^n \left(\cos(n\psi) + \sin(n\psi)\mathrm{i}\right).$$

Ahhoz, hogy $w^n = z$ legyen, pontosan az kell, hogy $t^n = r$ és

$$n\psi - \varphi = 2k\pi$$

teljesüljön valamely $k \in \mathbf{Z}$-ra, vagyis

$$\psi = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}.$$

Azonban k-t $(k+n)$-re cserélve ebben a képletben, ugyanazt a $w \in \mathbf{C}$ gyököt kapjuk. A különböző gyököket tehát a $0 \le k \le n-1$ értékek származtatják.

Polinomok és gyökeik

Legyen

$$P(w) = a_0 w^n + a_1 w^{n-1} + \cdots + a_n$$

egy nem azonosan 0 komplex együtthatós n-edfokú polinom (azaz, $a_0, \ldots, a_n \in \mathbf{C}$, $a_0 \neq 0$). Egy $w_0 \in \mathbf{C}$ gyöke P-nek, ha $P(w_0) = 0$. Ha w_0 gyöke P-nek, akkor létezik olyan Q polinom, amelyre

$$P(w) = (w - w_0)Q(w).$$

Láttuk: minden $z \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ esetén a

$$w^n - z$$

polinomnak w-ben n különböző gyöke van. Ellenben, $z = 0$ esetén a

$$w^n$$

polinomnak mindössze $w_0 = 0$ a gyöke.

Gyök multiplicitása és az algebra alaptétele

A P polinom w_0 gyökének multiplicitása az a legmagasabb m érték, amelyre még létezik olyan R polinom, hogy

$$P(w) = (w - w_0)^m R(w).$$

Ekkor $1 \leq m \leq n$; amennyiben w_0 nem gyöke P-nek, akkor megállapodás szerint $m = 0$.
Ebben az értelemben a w^n polinom $w_0 = 0$ gyökének multiplicitása n. Általánosabban igaz:
Az algebra alaptétele: minden komplex együtthatós n-edfokú polinomnak létezik multiplicitással számolva pontosan n gyöke.
Azaz: léteznek olyan $w_1, \ldots, w_n \in \mathbf{C}$ nem feltétlenül különböző számok, amelyre

$$P(w) = a_0(w - w_1) \cdots (w - w_n).$$

Egy általános P polinom gyökei azonban már nem fejezhetők ki az együtthatóiból algebrai műveletek segítségével.