4. előadás: Számsorozatok 1.

Szabó Szilárd

Függvények

Legyenek A, B rögzített halmazok.
Függvény: olyan $\Gamma_f \subset A \times B$ részhalmaz, amelyre minden $a \in A$ esetén létezik egy és csak egy $b \in B$ úgy, hogy $(a, b) \in \Gamma_f$.
Hagyományos jelöléssel való kapcsolat:

$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ a &\mapsto b = f(a). \end{aligned}$$

Adott f függvény

- gráfja: Γ_f;
- értelmezési tartománya: $D_f = A$;
- értékkészlete: azon $b \in B$ elemek R_f halmaza, amelyekhez létezik olyan $a \in A$, hogy $(a, b) \in \Gamma_f$.

Függvények tulajdonságai, inverz függvény

- Ha $R_f = B$, akkor f-et szürjektívnek hívjuk.
- Ha bármely $a_1 \neq a_2 \in A$ esetén $f(a_1) \neq f(a_2)$, akkor f-et injektívnek hívjuk.
- Ha f injektív és szürjektív is, akkor azt mondjuk hogy f bijektív (kölcsönösen egyértelmű).
- Ha f bijektív, akkor minden $b \in B$-hez létezik pontosan egy olyan $a \in A$, amelyre $b = f(a)$. Ekkor tehát értelmezhetjük f inverz függvényét:

$$\begin{aligned} f^{-1} &: B \to A \\ &b \mapsto \text{ az egyetlen olyan } a \in A, \text{amelyre } b = f(a). \end{aligned}$$

Ha f bijektív, akkor f^{-1} is az.

Összetett függvények

Legyenek A, B, C rögzített halmazok és

$$f : A \to B, \quad g : B \to C$$

függvények. Ekkor értelmezhetjük a következő függvényt

$$\begin{aligned} g \circ f : A &\to C \\ a &\mapsto g(f(a)). \end{aligned}$$

$g \circ f$: f és g összetett (komponált) függvénye.

Valós számok (Dedekind-féle felépítés)

A racionális számok halmaza nem teljes $\rightsquigarrow$ $\mathbf{R}$ valós számok.
$\mathbf{Q}$-ban egy szelet egy olyan $\emptyset \neq X \subset \mathbf{Q}$, amelyre minden $r \in X$ és $q \in \mathbf{Q}$ esetén ha $q < r$ akkor $q \in X$ is igaz.
Valós számok $\mathbf{R}$ halmaza: $\mathbf{Q}$ összes X szeletének halmaza.

Jelölés

$X \in \mathbf{R}$ helyett $x \in \mathbf{R}$-et használunk.

Minden $r \in \mathbf{Q}$-hez tekinthetjük $\mathbf{Q}$ következő szeletét:

$$\{q \in \mathbf{Q} : \quad q \leq r\}.$$

Ezáltal $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$.
Legyen adott két valós szám: $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, azaz $\mathbf{Q}$-ban két szelet: $X_1, X_2 \subset \mathbf{Q}$. Azt mondjuk, hogy $x_1 < x_2$ ha $X_1 \subset X_2$. Ez egy rendezést határoz meg $\mathbf{R}$-en.

Számsorozatok

Egy olyan f függvényt, amelynek értelmezési tartománya $\mathbf{N}$ (esetleg $\mathbf{N}^+ = \mathbf{N} \setminus \{0\}$), és értékkészlete részhalmaza a valós számok $\mathbf{R}$ halmazának, végtelen számsorozatnak nevezünk.

Jelölés

$f(n) = a_n, \quad (a_n)_{n\in\mathbf{N}}, \quad (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots).$

Példa

- $a_n = \frac{1}{n}$ *minden* $n \in \mathbf{N}^+$*-ra;*
- $$\left(1, -\frac{1}{2}, \ldots, (-1)^{n+1}\frac{1}{n}, \ldots\right)$$

Monoton sorozatok

Azt mondjuk, hogy egy $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ számsorozat monoton növekvő, ha minden n esetén $a_n \leq a_{n+1}$. Hasonlóan, $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ számsorozat monoton csökkenő, ha minden n esetén $a_n \geq a_{n+1}$. Továbbá, $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ monoton, ha monoton növekvő vagy monoton csökkenő. Azt mondjuk, hogy egy $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ számsorozat szigorúan monoton növekvő (illetve csökkenő), ha minden n esetén $a_n < a_{n+1}$ (illetve $a_n > a_{n+1}$). Végül, $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ szigorúan monoton, ha szigorúan monoton növekvő vagy szigorúan monoton csökkenő (e két lehetőség legfeljebb egyike teljesülhet).
Minden szigorúan monoton sorozat egyúttal monoton is.

Példa

- $a_n = \frac{1}{n} (n \geq 1)$ *szigorúan monoton csökkenő.*
- $b_n = 1$ *monoton csökkenő és monoton növekvő is, de nem szigorúan monoton.*
- $c_n = (-1)^n$ *nem monoton.*

Korlátos számhalmazok, sorozatok

Legyen $H \subset \mathbf{R}$.

- H felülről korlátos, ha létezik olyan $K \in \mathbf{R}$, amelyre minden $x \in H$-ra teljesül, hogy $x \le K$. Egy ilyen K: egy felső korlát.
- H alulról korlátos, ha létezik olyan $k \in \mathbf{R}$, amelyre minden $x \in H$-ra teljesül, hogy $k \le x$. Egy ilyen k: egy alsó korlát.
- H korlátos, ha felülről korlátos és alulról korlátos.

Egy $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ végtelen számsorozat

- felülről korlátos, ha R_f felülről korlátos;
- alulról korlátos, ha R_f alulról korlátos;
- korlátos, ha R_f korlátos.

Legkisebb felső és legnagyobb alsó korlát

Legyen $H \subset \mathbf{R}$ felülről korlátos. Ekkor $K \in \mathbf{R}$ legkisebb felső korlátja H-nak, ha

- K felső korlátja H-nak,
- és minden más $M \neq K$ felső korlátjára H-nak igaz, hogy $K < M$.

Hasonlóan értelmezhető egy alulról korlátos számhalmaz legnagyobb alsó korlátja.

Tétel

Minden $H \subset \mathbf{R}$ felülről (illetve alulról) korlátos számhalmaznak létezik legkisebb felső (illetve legnagyobb alsó) korlátja $\mathbf{R}$-ben.

Legkisebb felső korlát szerkesztése

Legyen $H = \{x_i\}_{i \in I}$. Minden $x_i \in \mathbf{R}$ valamely X_i szelethez tartozik. Legyen ekkor

$$X = \cup_{i \in I} X_i.$$

Ekkor X egy szelete $\mathbf{Q}$-nak, és a hozzá tartozó $x \in \mathbf{R}$ valós szám a keresett legkisebb felső korlát.

Konvergencia

Legyen $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ egy számsorozat és $a \in \mathbf{R}$. Azt mondjuk, hogy a_n tart vagy konvergál a-hoz, ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $N \in \mathbf{N}$ (ε-tól függő) küszöbszám, amelyre minden $n > N$ esetén

$$\left|a_n - a\right| < \varepsilon.$$

Jelölés

$$a_n \to a \ (n \to \infty), \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Egy $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sorozat konvergens, ha létezik olyan $a \in \mathbf{R}$ amelyre $a_n \to a$ $(n \to \infty)$.
Minden állandó $a_n = a$ sorozat nyilvánvalóan tart a-hoz.

Példa konvergens sorozatra

Legyen $a_n = \frac{1}{n}$ $(n \geq 1)$. Megmutatjuk, hogy

$$\frac{1}{n} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen rögzített. Legyen ekkor

$$N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil .$$

Látjuk, hogy minden $n > N$ esetén

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \left| \frac{1}{n} \right| < \left| \frac{1}{N} \right| \leq \varepsilon.$$

Ugyanez a gondolatmenet mutatja azt is, hogy $b_n = (-1)^n \frac{1}{n}$ $(n \geq 1)$ is tart 0-hoz.

Konvergencia a végtelenbe

Azt mondjuk, hogy a_n tart vagy konvergál $+\infty$-be, ha minden $K \in \mathbf{R}$-hez létezik olyan $N \in \mathbf{N}$ (K-tól függő) küszöbszám, amelyre minden $n > N$ esetén

$$a_n > K.$$

Hasonlóan, a_n tart vagy konvergál $-\infty$-be, ha minden $K \in \mathbf{R}$-hez létezik olyan $N \in \mathbf{N}$ (K-tól függő) küszöbszám, amelyre minden $n > N$ esetén

$$a_n < K.$$

Példák végtelenbe konvergáló sorozatra

- Az $a_n = n$ sorozat konvergál $+\infty$-be.
- A $b_n = -n^2$ sorozat konvergál $-\infty$-be.
- A $c_n = (-1)^n n$ sorozat nem konvergál sem $+\infty$-be sem $-\infty$-be.

Monoton és korlátos sorozatok konvergenciája

Tétel

Minden monoton és korlátos $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sorozat konvergens.

Bizonyítás

Tegyük fel például, hogy $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ monoton növekvő. Jelöljük a-val a legkisebb felső korlátját. Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Tegyük fel, hogy valamely $\varepsilon > 0$ ellenpéldát ad a konvergenciára, azaz minden N-hez van olyan $n > N$ amelyre

$$a - a_n = |a_n - a| \geq \varepsilon.$$

A monotonitás miatt ekkor minden N-re

$$a - a_N \geq a - a_n \geq \varepsilon$$

is teljesülne.

Monoton és korlátos sorozatok konvergenciája 2.

Bizonyítás (vége)

Előbbi egyenlőtlenség átrendezéséből azt kapnánk, hogy minden N-re teljesül

$$a_N \leq a - \varepsilon.$$

Ebből viszont az következnék, hogy $a - \varepsilon$ is felső korlátja lenne (a_n)-nek, ellentmondva a választásának.

Konvergens sorozatok korlátossága

Tétel

Minden konvergens $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sorozat korlátos (de nem feltétlenül monoton!).

Bizonyítás

Legyen például $\varepsilon = 1$; definíció szerint van olyan $N \in \mathbf{N}$ amelyre minden $n > N$ esetén

$$|a_n - a| < 1.$$

Ebből látjuk, hogy minden $n > N$ esetén

$$|a_n| < |a| + 1.$$

Ekkor

$$K = \max(|a_1|, \ldots, |a_N|, |a| + 1)$$

választással minden $n \in \mathbf{N}$ esetén

$$|a_n| < K.$$

Műveletek sorozatokkal

Legyenek $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ és $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sorozatok. Ekkor e két sorozat összege az

$$(a_n + b_n)_{n\in\mathbf{N}}$$

sorozat; különbségük:

$$(a_n - b_n)_{n\in\mathbf{N}};$$

szorzatuk pedig az

$$(a_n b_n)_{n\in\mathbf{N}}$$

sorozat. Továbbá, amennyiben $b_n \neq 0$ teljesül minden $n \in \mathbf{N}$ esetén, a két sorozat hányadosa

$$\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbf{N}}.$$

Többek között, ha $b_n = b$ minden n esetén, akkor a szorzat:

$$(b a_n)_{n\in\mathbf{N}}.$$

Konvergencia viselkedése összegre és különbségre

Legyenek $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ és $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ konvergens sorozatok, amelyek rendre a-hoz illetve b-hez tartanak, ahol $a, b \in \mathbf{R}$.

Tétel

- *Az* $(a_n + b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *sorozat konvergens, és*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b.$$

- *Az* $(a_n - b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *sorozat konvergens, és*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a - b.$$

Konvergencia viselkedése szorzatra és hányadosra

Megtartjuk az eddigi feltételeinket.

Tétel

- *Az* $(a_n b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *sorozat konvergens, és*

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab.$$

Többek között, ha b *állandó sorozat akkor*

$$\lim_{n\to\infty} a_n b = ab.$$

- *Ha minden* n *esetén* $b_n \neq 0$ *és* $b \neq 0$ *akkor az* $(a_n/b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *sorozat konvergens, és*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

Végtelenbe tartó sorozatok szorzata és hányadosa

Tétel

- *Ha* $a_n \to +\infty$ *és* $b_n \to b > 0$ *akkor* $a_n b_n \to +\infty$.
- *Ha* $a_n \to +\infty$ *és* $b_n \to b < 0$ *akkor* $a_n b_n \to -\infty$.
- $|a_n| \to \infty$ *akkor és csak akkor, ha* $\frac{1}{a_n} \to 0$.