5. előadás: Számsorozatok 2. — Nevezetes sorozatok

Szabó Szilárd

Konvergencia viselkedése hatványozásra

Legyenek $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ és $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ konvergens sorozatok, amelyek rendre a-hoz illetve b-hez tartanak, ahol $a_n, a \in \mathbf{R}_+$, $b_n, b \in \mathbf{R}$.

Tétel

Ekkor a

$$\left(a_n^{b_n}\right)$$

$\varepsilon > 0$ *sorozat konvergens, és*

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = a^b.$$

Cauchy-sorozatok

Definíció

Egy $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *sorozat* *Cauchy-sorozat*, *ha minden* $\varepsilon > 0$*-hoz található olyan* $N = N(\varepsilon) \in \mathbf{N}$, *amelyre minden* $n, m \geq N$ *esetén*

$$|a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Állítás

Egy $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha Cauchy.*

Konvergens sorozat Cauchy

Bizonyítás

Ha $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *konvergál a-hoz, akkor válasszunk* N*-et a konvergencia definíciójában* $\frac{\varepsilon}{2}$*-höz. Ekkor minden* $n, m \geq N$ *esetén*

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

A másik irány mély, és ekvivalens azzal, hogy $\mathbf{R}$ *teljes.*

A rendőr-elv (véges határérték)

Legyenek adottak az $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ és $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sorozatok.

Tétel

Ha minden n esetén teljesülnek az

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

egyenlőtlenségek, az (a_n) és (c_n) sorozatok konvergensek, valamint

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = a,$$

akkor

$$\lim_{n\to\infty} b_n = a.$$

A rendőr-elv (végtelen határérték)

Legyenek adottak az $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ és $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sorozatok, és tegyük fel hogy minden n esetén teljesül az

$$a_n \leq b_n$$

egyenlőtlenség.

Tétel

- *Ha*

  $$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty,$$

  akkor

  $$\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty.$$

- *Ha*

  $$\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty,$$

  akkor

  $$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

Példa rendőr-elvre

Megmutatjuk, hogy a

$$b_n = \frac{\sin(n)}{n}$$

sorozat konvergál 0-hoz. Legyen ehhez

$$a_n = -\frac{1}{n}, \quad c_n = \frac{1}{n}.$$

Mivel minden n-re

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin(n)}{n} \leq \frac{1}{n}$$

és

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

azért a rendőr-elv alapján

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0.$$

Kamatos kamat

Tegyük fel, hogy egy bizonyos pénzintézetben lekötött összegekre $100p\%$-os a kamatláb, azaz, a lekötött összeg helyett egy év után az $(1+p)$-szeresét kapjuk vissza. (Feltesszük, hogy nincs kezelési költség). Ha fél év után kivesszük, akkor $(1+\frac{p}{2})$-szörösét kapjuk vissza. Ha most ezt ismét lekötjük fél évre, akkor ennek leteltével ennek az új összegnek kapjuk vissza az $(1+\frac{p}{2})$-szörösét, ami tehát az eredeti összegünk $(1+\frac{p}{2})^2$-szerese. Hasonlóan látjuk, hogy ha minden hónapban újra lekötjük a teljes addig felhalmozott összeget, akkor egy év elteltével az eredeti összegünk a

$$\left(1+\frac{p}{12}\right)^{12}$$

szorosára növekszik.

Kérdés

Létezik-e az alábbi határérték?

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{p}{n}\right)^{n}$$

A természetes logaritmus alapja

Tétel

Az

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

sorozat monoton növekvő és felülről korlátos. Többek közt, létezik az

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

határérték.

$e = 2,718\ldots$, neve: a természetes logaritmus alapja.

A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség

Tetszőleges $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{R}_+$ esetén legyen

$$A_n(a_1, \ldots, a_n) = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n},$$

e számok számtani közepe, és

$$G_n(a_1, \ldots, a_n) = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$$

e számok mértani közepe.
Szükségünk van a következő segédállításra.

Állítás
Minden $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{R}_+$ *esetén*

$$A_n(a_1, \ldots, a_n) \geq G_n(a_1, \ldots, a_n).$$

A természetes logaritmus alapja, monotonitás

Megmutatjuk, hogy e_n monoton növekvő. Alkalmazzuk az Állítást az

$$a_1 = \cdots = a_n = 1 + \frac{1}{n}, \quad a_{n+1} = 1$$

számokra:

$$\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1} \geq \sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}.$$

Átrendezve, és mindkét oldalt $(n+1)$-edik hatványra emelve, kapjuk:

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \geq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

A természetes logaritmus alapja, korlátosság

Megmutatjuk, hogy e_n felülről korlátos. Alkalmazzuk az Állítást az

$$a_1 = \cdots = a_n = 1 + \frac{1}{n}, \quad a_{n+1} = a_{n+2} = \frac{1}{2}$$

számokra:

$$\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+2} \geq \sqrt[n+2]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{4}}.$$

A bal oldalon álló érték 1, ezért mindkét oldalt $(n+2)$-edik hatványra emelve, kapjuk hogy:

$$1 \geq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{4},$$

azaz átrendezés után

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq 4.$$

A természetes logaritmus alapjának hatványai

Tétel

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n = e^\alpha.$$

Bizonyítás

Tegyük fel az egyszerűség kedvéért, hogy $\alpha > 0$ *és legyen* $m = n/\alpha$*. Ekkor* $m \to \infty$ *ahogy* $n \to \infty$*, és*

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n &= \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m\alpha}\\ &= \left(\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right)^\alpha\\ &\to e^\alpha \quad (n\to\infty).\end{aligned}$$

A binomiális tétel

Bármely $0 \leq k \leq n$ egészekre legyen

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 1}$$

(n, k) binomiális együtthatója.

Tétel

Bármely $a, b \in \mathbf{R}$ és $n \in \mathbf{N}$ esetén teljesül

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

A binomiális tétel bizonyítása

Bizonyítás

Tekintsük az n-tényezős

$$(a+b)(a+b)\cdots(a+b)$$

szorzatot. A zárójelek felbontása után $a^k b^{n-k}$ *együtthatója az a szám lesz, ahányféleképpen n egymástól megkülönböztethetetlen elemből k számú különbözőt ki lehet választani. Ez pedig éppen*

$$\binom{n}{k},$$

mert az első elemet n-féleképpen választhatjuk, a másodikat $(n-1)$*-féleképpen, s.í.t. a k-adikat* $(n-k+1)$*-féleképpen, ám így minden k-ast annyiszor számolunk, ahányféle különböző sorrendbe állíthatók, azaz* $k!$*-szor.*

Nevezetes sorozatok I.

Tétel

Minden $p < 0$ *esetén*

$$\lim_{n \to \infty} n^p = 0$$

és minden $p > 0$ *esetén*

$$\lim_{n \to \infty} n^p = +\infty.$$

Bizonyítás

Ha $p < 0$ *és* $\varepsilon > 0$ *akkor legyen*

$$N(\varepsilon) = \left\lceil \varepsilon^{\frac{1}{p}} \right\rceil \in \mathbf{N}.$$

Ha $p > 0$ *és* $K > 0$ *akkor legyen*

$$N(K) = \left\lceil K^{\frac{1}{p}} \right\rceil \in \mathbf{N}.$$

Nevezetes sorozatok II.

Tétel

Minden $x > 0$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1.$$

Bizonyítás

Tegyük fel, hogy $x > 1$ (a $x = 1$ eset nyilvánvaló, a $x < 1$ eset pedig a $x > 1$ eset reciproka). Legyen $x_n = \sqrt[n]{x} - 1 > 0$; ekkor

$$1 + nx_n < (1 + x_n)^n = x$$

a binomiális tétel miatt, amiből átrendezéssel

$$0 < x_n < \frac{x-1}{n}.$$

A rendőr-elvet alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$x_n \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Nevezetes sorozatok III.

Tétel

Teljesül

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Bizonyítás

Legyen $x_n = \sqrt[n]{n} - 1 > 0$*; ekkor a binomiális tétel szerint*

$$\frac{n(n-1)}{2} x_n^2 \le (1 + x_n)^n = n.$$

Ebből $(n \ge 2)$ *esetén átrendezéssel*

$$0 < x_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}} \le \sqrt{\frac{4}{n}} = 2n^{-\frac{1}{2}},$$

és a rendőr-elv alapján

$$x_n \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Nevezetes sorozatok IV.

Tétel

Minden $p \in \mathbf{R}$ és $x > 0$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{(1+x)^n} = 0.$$

Bizonyítás

Rögzítsünk egy olyan $k \in \mathbf{N}$ számot, amelyre $k > p$. A binomiális tétel alapján minden $n > 2k$ esetén

$$(1+x)^n > \binom{n}{k} x^k = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 1} x^k > \left(\frac{n}{2}\right)^k \frac{x^k}{k!},$$

ami átrendezés után

$$0 < \frac{n^k}{(1+x)^n} < \frac{2^k k!}{x^k}.$$

Nevezetes sorozatok IV.(folyt.)

Bizonyítás (vége)

Innen

$$0 < \frac{n^p}{(1+x)^n} < \frac{2^k k!}{x^k} n^{p-k}.$$

A jobb oldalon a tört egy rögzített érték, és mivel $p - k < 0$ *ebből a rendőr-elv alapján kapjuk a tételt.*

Nevezetes sorozatok V.

Tétel

Teljesül

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty.$$

Bizonyítás

Alkalmazzuk a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget az

$$a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, \ldots, a_n = \frac{1}{n}$$

számokra:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n!}} \leq \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{n}.$$

Ennek reciproka:

$$\sqrt[n]{n!} \geq \frac{n}{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}},$$

ezért a rendőr-elv miatt elég megmutatni, hogy a jobb oldal a végtelenbe tart.

Nevezetes sorozatok V.(folyt.)

Bizonyítás (folyt.)

Legyen $k \in \mathbf{N}$ *az egyetlen olyan egész szám, amelyre*

$$2^k \leq n < 2^{k+1}.$$

Ekkor

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} &\leq 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^k} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}-1}\right) \\ &< 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^k} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right), \end{aligned}$$

ahol az alsó sorban minden $\frac{1}{2^l}$ *éppen* 2^l*-szer szerepel.*

Nevezetes sorozatok V.(folyt.)

Bizonyítás (folyt.)

Így tehát

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} < 1 + 1 + \cdots + 1 = k + 1,$$

ahonnan

$$\frac{n}{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}} > \frac{2^k}{k+1} \to +\infty \quad (n \to \infty)$$

mert ahogy $n \to \infty$ *úgy* k *is tart a végtelenbe.*