12. előadás: Függvények integrálhatósága

Szabó Szilárd

Motiváció

Sok gyakorlati kérdés megválaszolásához szükség van egy kívánt értéket véges összegekkel való közelítő eljárásokra.

Példa

Nem egyenes szakaszok (illetve, lapok) által határolt sík-(illetve, tér-)idomok terület-(illetve, térfogat)-számítása.

Ezek az eljárások a matematikában az integrálszámítás körébe tartoznak.

Intervallumok felosztása

Definíció

Egy rögzített $[a, b]$ intervallum egy felosztása:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b.$$

Ekkor x_k-t a k-adik osztópontnak, $I_k = [x_{k-1}, x_k]$-t a k-adik rész-intervallumnak hívjuk.

Jelölés

$\mathcal{P} = (I_1, \ldots, I_N)$.

Minden határon túl finomodó felosztás-sorozatok

Definíció

A $\mathcal{P}$ felosztás finomsága a

$$\Delta\mathcal{P} = \max_{1 \le k \le N} (x_k - x_{k-1})$$

érték.

Minden $i \in \mathbf{N}$ esetén legyenek $\mathcal{P}_i$ felosztásai az $[a, b]$ intervallumnak.

Definíció

Azt mondjuk, hogy a $\{\mathcal{P}_i\}_{i \in \mathbf{N}}$ felosztás-sorozat minden határon túl finomodó, ha

$$\lim_{i \to \infty} \Delta\mathcal{P}_i = 0.$$

Alsó és felső Riemann-féle összegek

Legyen

$$f : [a, b] \to \mathbf{R}$$

egy korlátos valós függvény.

Jelölés

Legyen $m_k = \inf_{x \in I_k} f(x)$, $M_k = \sup_{x \in I_k} f(x)$.

Definíció

Az f függvény $\mathcal{P}$ felosztáshoz tartozó alsó, illetve felső Riemann-féle összege:

$$s_{\mathcal{P}} = \sum_{k=1}^{N} m_k (x_k - x_{k-1})$$

$$S_{\mathcal{P}} = \sum_{k=1}^{N} M_k (x_k - x_{k-1}).$$

Egyenlőtlenségek Riemann-féle összegek között

Állítás

Minden $\mathcal{P}$ felosztásra teljesül, hogy $s_{\mathcal{P}} \leq S_{\mathcal{P}}$.

Bizonyítás

Mivel minden k esetén $m_k \leq M_k$ és $x_k - x_{k-1} > 0$, azért nyilvánvaló.

Állítás

Ha egy $\mathcal{P}$ felosztásból egy $\mathcal{P}'$ felosztás véges sok osztópont hozzávételével keletkezik, akkor

$$s_{\mathcal{P}} \leq s_{\mathcal{P}'} \leq S_{\mathcal{P}'} \leq S_{\mathcal{P}}.$$

Egyenlőtlenségek Riemann-féle összegek között, bizonyítás

Bizonyítás

Teljes indukcióval, elég azt az esetet vizsgálni, amikor $\mathcal{P}'$ $\mathcal{P}$-ből egyetlen új $\xi \in]x_{k-1}, x_k[$ osztópont hozzávételével keletkezik. Legyen

$$m' = \inf\{f(x),\ x \in [x_{k-1}, \xi]\}, \quad m'' = \inf\{f(x),\ x \in [\xi, x_k]\}$$

Nyilván ekkor

$$m' \geq m_k, \quad m'' \geq m_k.$$

A megfelelő Riemann-féle összegekben a k-adiktól eltekintve minden tag azonos, és

$$\begin{aligned} s_{\mathcal{P}'} - s_{\mathcal{P}} &= m'(\xi - x_{k-1}) + m''(x_k - \xi) - m_k(x_k - x_{k-1}) \\ &= (m' - m_k)(\xi - x_{k-1}) + (m'' - m_k)(x_k - \xi) \geq 0. \end{aligned}$$

Becslés Riemann-féle összegek különbségére

Legyen $\delta > 0$ és $\mathcal{P}$ egy δ-nál finomabb felosztás. Legyen

$$K = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

Állítás

Tegyük fel, hogy $\mathcal{P}'$ a $\mathcal{P}$-ből N új osztópont hozzávételével keletkezik. Ekkor

$$|s_{\mathcal{P}'} - s_{\mathcal{P}}| < 2KN\delta, \quad |S_{\mathcal{P}'} - S_{\mathcal{P}}| < 2KN\delta.$$

Bizonyítás

Ismét elegendő az $N = 1$ esetet belátni. Ezt az előző bizonyítás képletének felhasználásával tehetjük meg:

$$\begin{aligned} |s_{\mathcal{P}'} - s_{\mathcal{P}}| &\leq |m'|(\xi - x_{k-1}) + |m''|(x_k - \xi) + |m_k|(x_k - x_{k-1}) \\ &\leq K(\xi - x_{k-1}) + K(x_k - \xi) + K(x_k - x_{k-1}) \\ &= 2K(x_k - x_{k-1}) < 2K\delta. \end{aligned}$$

Különböző felosztásokhoz tartozó Riemann-féle összegek

Állítás

Bármely $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ felosztások esetén

$$s_{\mathcal{P}_1} \leq S_{\mathcal{P}_2}.$$

Bizonyítás

Tekintsük azon $\mathcal{P}_3$ felosztást, amelyet $\mathcal{P}_1$ és $\mathcal{P}_2$ osztópontjainak egyesítésével nyerünk. Ekkor $\mathcal{P}_3$ mind $\mathcal{P}_1$-ből, mind $\mathcal{P}_2$-ből megkapható véges sok új osztópont hozzávételével. Ezért:

$$s_{\mathcal{P}_1} \leq s_{\mathcal{P}_3} \leq S_{\mathcal{P}_3} \leq S_{\mathcal{P}_2}.$$

Alsó és felső integrál létezése

Legyen az f függvény rögzített és a $\mathcal{P}$ felosztás változó. Jelölje

$$\{s_{\mathcal{P}}\}_{\mathcal{P}}, \quad \{S_{\mathcal{P}}\}_{\mathcal{P}}$$

az összes lehetséges $\mathcal{P}$ felosztáshoz tartozó alsó, illetve felső Riemann-féle összegek halmazát.

Állítás

Az $\{s_{\mathcal{P}}\}_{\mathcal{P}}$ halmaznak létezik a h legkisebb felső korlátja. Hasonlóan, az $\{S_{\mathcal{P}}\}_{\mathcal{P}}$ halmaznak létezik a H legnagyobb alsó korlátja. Továbbá: $h \leq H$.

Definíció

Az Állításban szereplő h, illetve H értékeket f Riemann-féle alsó, illetve felső integráljának nevezzük.

Alsó és felső integrál létezése, bizonyítás

Bizonyítás

Egy tetszőleges rögzített $\mathcal{P}_0$ felosztás esetén $S_{\mathcal{P}_0}$ felső korlátja az $\{s_{\mathcal{P}}\}_{\mathcal{P}}$ halmaznak, tehát utóbbinak létezik legkisebb felső korlátja. Ugyanígy, $s_{\mathcal{P}_0}$ alsó korlátja az $\{S_{\mathcal{P}}\}_{\mathcal{P}}$ halmaznak, tehát utóbbinak létezik legnagyobb alsó korlátja. Mivel az $\{s_{\mathcal{P}}\}_{\mathcal{P}}$ halmaz bármely eleme alsó korlátja az $\{S_{\mathcal{P}}\}_{\mathcal{P}}$ halmaznak, azért $h \leq H$.

Konvergencia az alsó és felső integrálhoz

Állítás

Bármely, minden határon túl finomodó $\{\mathcal{P}_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ felosztás-sorozat esetén

$$\lim_{i\to\infty} s_{\mathcal{P}_i} = h, \quad \lim_{i\to\infty} S_{\mathcal{P}_i} = H.$$

Bizonyítás

Rögzítsünk valamely $\varepsilon > 0$ értéket, és legyen $\mathcal{P}_0$ egy rögzített olyan felosztás, amelyre $h - s_{\mathcal{P}_0} < \varepsilon/3$. Legyen $\mathcal{P}_0$ osztópontjainak száma N, és

$$\delta = \frac{\varepsilon}{4KN}.$$

Minden δ-nál finomabb $\mathcal{P}$ felosztás esetén legyen $\mathcal{P}'$ a $\mathcal{P}$ és $\mathcal{P}_0$ osztópontjainak egyesítésével nyert felosztás. Ekkor:

$$s_{\mathcal{P}'} \geq s_{\mathcal{P}_0}.$$

Konvergencia az alsó és felső integrálhoz, bizonyítás

Bizonyítás (folyt.)

Továbbá, ekkor $\mathcal{P}'$ megkepható $\mathcal{P}$-ből legfeljebb N új osztópont közbeiktatásával, tehát

$$s_{\mathcal{P}'} - s_{\mathcal{P}_0} < 2KN\delta = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Emiatt:

$$\begin{aligned} h - s_{\mathcal{P}} &= (h - s_{\mathcal{P}_0}) + (s_{\mathcal{P}_0} - s_{\mathcal{P}'}) + (s_{\mathcal{P}'} - s_{\mathcal{P}}) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + 0 + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Integrálható függvények

Definíció

Egy $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *korlátos függvény* *Riemann-integrálható*, *ha* $h = H$. *Ekkor ezt a közös értéket* f*-nek az* $[a, b]$*-n vett* *integráljának* *nevezzük. Jelölése:*

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Jelölés

Ha $a < b$ *és* f *Riemann-integrálható* $[a, b]$*-on, akkor*

$$\int_a^a f(x)dx = 0, \quad \int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

Integrálhatóság jellemzése

Állítás

Egy f *korlátos függvény akkor és csak akkor Riemann-integrálható* $[a,b]$*-n, ha valamely (vagy bármely) minden határon túl finomodó* $\{\mathcal{P}_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ *felosztás-sorozat esetén*

$$\lim_{i\to\infty} s_{\mathcal{P}_i} = \lim_{i\to\infty} S_{\mathcal{P}_i}.$$

Bizonyítás

Láttuk, hogy bármely minden határon túl finomodó $\{\mathcal{P}_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ *felosztás-sorozat esetén a két határérték* h*-hoz, illetve* H*-hoz tart.*

Téglányösszegek

Legyen $\mathcal{P}$ egy felosztás. Minden $1 \leq k \leq N$ esetén válasszunk egy $\xi_k \in I_k$ elemet.

Definíció

A $\mathcal{P}$ felosztáshoz és $\xi_k \in I_k$ választásokhoz tartozó téglányösszeg vagy integrál-közelítő összeg a

$$\sigma_{\mathcal{P}} = \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

kifejezés.

Minden $\mathcal{P}$ felosztás és $\xi_k \in I_k$ választás esetén

$$s_{\mathcal{P}} \leq \sigma_{\mathcal{P}} \leq S_{\mathcal{P}}.$$

Téglányösszegek és alsó, illetve felső Riemann-féle összegek

Állítás

Minden $\mathcal{P}$ felosztás esetén

$$s_{\mathcal{P}} = \inf_{\xi_k}\{\sigma_{\mathcal{P}}\}, \quad S_{\mathcal{P}} = \sup_{\xi_k}\{\sigma_{\mathcal{P}}\},$$

ahol az inf*-ot és a* sup*-ot az összes $\xi_1, \dots, \xi_N$ választásra vesszük.*

Bizonyítás

Rögzítsünk egy tetszőleges $\varepsilon > 0$ értéket. Minden k esetén létezik olyan $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ amelyre $f(\xi_k) < m_k + \frac{\varepsilon}{b-a}$. Innen:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) &< \sum_{k=1}^{N}\left(m_k + \frac{\varepsilon}{b-a}\right)(x_k - x_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{N} m_k(x_k - x_{k-1}) + \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{k=1}^{N}(x_k - x_{k-1}) \\ &= s_{\mathcal{P}} + \varepsilon.\end{aligned}$$

Téglányösszegek és Riemann-integrál

Állítás

Egy f korlátos függvény akkor és csak akkor Riemann-integrálható $[a, b]$-n I integrállal, ha valamely minden határon túl finomodó $\{\mathcal{P}_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ felosztás-sorozat és minden hozzá vett $\xi_1, \dots, \xi_N$ választás esetén

$$\lim_{i\to\infty} \sigma_{\mathcal{P}_i} = I.$$

Egyenletesen folytonos függvények

Legyen I egy tetszőleges (zárt vagy nyílt, véges vagy valamelyik irányban végtelen) intervallum és $f : I \to \mathbf{R}$ egy valós függvény.

Definíció

Azt mondjuk, hogy f egyenletesen folytonos I-n, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, hogy valahányszor $x, y \in I$ teljesíti a $|x - y| < \delta$ feltételt, mindannyiszor teljesül

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Megjegyzés

A különbség a folytonosság definíciójához képest az, hogy itt nem rögzítjük előre az x pontot, hanem mind x mind y szabadon változhat I-ben.

Ebből azonnal látszik, hogy minden egyenletesen folytonos függvény egyúttal folytonos is.

Korlátos, zárt intervallumon folytonos függvény egyenletesen folytonos

Legyen most $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ és $I = [a, b]$.

Állítás

Ha f folytonos $[a, b]$-on, akkor egyenletesen folytonos is.

Bizonyítás

Tegyük fel az ellenkezőjét: létezik olyan $\varepsilon_0 > 0$, amelyre minden $\delta = \frac{1}{n}$ esetén léteznek $x_n, y_n \in [a, b]$ amelyre $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ és

$$|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0.$$

Ekkor létezik olyan n' részsorozata $\mathbf{N}$-nek, amelyre $x_{n'}$ és $y_{n'}$ konvergálnak valamely $x^* \in [a, b]$ és $y^* \in [a, b]$ értékekhez. Mivel $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ azért $x^* = y^*$. Másrészt, f folytonossága miatt

$$\lim_{n' \to \infty} f(x_{n'}) = f(x^*), \quad \lim_{n' \to \infty} f(y_{n'}) = f(y^*).$$

Ez ellentmond annak, hogy $|f(x_{n'}) - f(y_{n'})| \geq \varepsilon_0$.

Korlátos, zárt intervallumon folytonos függvény Riemann-integrálható

Tétel

Ha f folytonos $[a, b]$-on, akkor ott Riemann-integrálható.

Bizonyítás

Rögzítsünk egy tetszőleges $\varepsilon > 0$ értéket. Ekkor, mivel f egyenletesen folytonos, azért létezik olyan $\delta > 0$, hogy minden $|x - y| < \delta$ esetén teljesül

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Legyen $\mathcal{P}$ egy tetszőleges, δ-nál finomabb felosztása $[a, b]$-nak. Bolzano tétele miatt f felveszi szélsőértékeit minden I_k részintervallumon.

Korlátos, zárt intervallumon folytonos függvény Riemann-integrálható, bizonyítás

Bizonyítás (folyt.)

Innen

$$
\begin{aligned}
S_{\mathcal{P}} - s_{\mathcal{P}} &= \sum_{k=1}^{N} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) \\
&< \sum_{k=1}^{N} \frac{\varepsilon}{b-a}(x_k - x_{k-1}) \\
&= \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^{N} (x_k - x_{k-1}) \\
&= \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Tehát, minden $\varepsilon > 0$ esetén $H - h < \varepsilon$, azaz $h = H$.

Korlátos, zárt intervallumon monoton függvény Riemann-integrálható

Tétel

Ha f monoton $[a, b]$-on, akkor ott Riemann-integrálható.

Bizonyítás

Feltehető, hogy pl. f monoton növekvő. Ekkor $M_k = f(x_k), m_k = f(x_{k-1})$, s így minden $\mathcal{P}$ felosztás esetén

$$\begin{aligned} S_{\mathcal{P}} - s_{\mathcal{P}} &= \sum_{k=1}^{N} (f(x_k) - f(x_{k-1}))(x_k - x_{k-1}) \\ &\leq \sum_{k=1}^{N} (f(x_k) - f(x_{k-1}))\Delta_{\mathcal{P}} = (f(b) - f(a))\Delta_{\mathcal{P}}. \end{aligned}$$

Amennyiben tehát $\Delta_{\mathcal{P}} < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$, akkor

$$S_{\mathcal{P}} - s_{\mathcal{P}} < \varepsilon.$$

Állandó függvény Riemann-integrálja

Legyen minden $x \in [a, b]$ esetén $f(x) = c$.

Állítás

Ekkor

$$\int_a^b f(x)dx = c(b-a).$$

Bizonyítás

Minden $\mathcal{P}$ felosztás esetén $m_k = c = M_k$ minden $1 \leq k \leq N$-re, így

$$\begin{aligned} s_{\mathcal{P}} = S_{\mathcal{P}} &= \sum_{k=1}^{N} c(x_k - x_{k-1}) \\ &= c\sum_{k=1}^{N}(x_k - x_{k-1}) \\ &= c(b-a). \end{aligned}$$

A Riemann-integrál monotonitása

Legyen $a < b$ és minden $x \in [a, b]$ esetén $f(x) \geq 0$.

Állítás

Ekkor

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

Bizonyítás

Minden $\mathcal{P}$ *felosztás esetén* $m_k \geq 0$ *minden* $1 \leq k \leq N$*-re, ahonnan*

$$\int_a^b f(x)dx = h \geq \sum_{k=1}^{N} m_k(x_k - x_{k-1}) = 0.$$

Véges sok pontban különböző függvények Riemann-integrálja

Állítás

Ha f Riemann-integrálható $[a, b]$-on, és g olyan valós függvény $[a, b]$-on, amelyre léteznek olyan $a \leq c_1 < \cdots < c_n \leq b$ értékek, hogy minden $x \notin \{c_1, \ldots, c_n\}$ esetén $f(x) = g(x)$, akkor g is Riemann-integrálható $[a, b]$-on, és

$$\int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Bizonyítás

Elég a $n = 1$ esetet belátni, onnan teljes indukcióval következik. Legyen $\mathcal{P}$ egy tetszőleges felosztása $[a, b]$-nek, amelyre c_1 nem osztópont. Legyen k az az érték, amelyre $c_1 \in I_k$ és legyenek K_f, K_g az $|f|$ és $|g|$ maximumai $[a, b]$-on.

Véges sok pontban különböző függvények Riemann-integrálja, folyt.

Bizonyítás (folyt.)

Ekkor,

$$|S_{\mathcal{P}}(g) - S_{\mathcal{P}}(f)| \leq (K_g + K_f)(x_k - x_{k-1}),$$

és hasonlóan $|s_{\mathcal{P}}(g) - s_{\mathcal{P}}(f)|$-re. Tehát, rögzített $\varepsilon > 0$ esetén

$$\delta = \frac{\varepsilon}{K_g + K_f}$$

választással élve, minden δ-nál finomabb $\mathcal{P}$ esetén

$$|S_{\mathcal{P}}(g) - S_{\mathcal{P}}(f)| < \varepsilon,$$

és hasonlóan $|s_{\mathcal{P}}(g) - s_{\mathcal{P}}(f)|$-re. Innen látjuk, hogy g alsó és felső Riemann-integrálja f integráljától ε-nál kevésbé térnek el. Minthogy ez minden $\varepsilon > 0$ esetén igaz, azért g integrálható $[a, b]$-on, és a két függvény integrálja $[a, b]$-on egyenlő.

Nyílt intervallumon korlátos függvény Riemann-integrálja

Legyen

$$f :]a, b[\to \mathbf{R}$$

korlátos függvény.

Definíció

Az f függvény egy kiterjesztése $[a, b]$-re egy olyan

$$\bar{f} : [a, b] \to \mathbf{R}$$

függvény, amelyre minden $x \in]a, b[$ esetén $\bar{f}(x) = f(x)$. Azt mondjuk, hogy f Riemann-integrálható $]a, b[$-on, ha valamely (vagy akármely) $\bar{f}$ kiterjesztése Riemann-integrálható. Ekkor, f integrálja $]a, b[$-on:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \bar{f}(x)dx$$

Mivel bármely két különböző $\bar{f}$ kiterjesztés egymástól legfeljebb két pontban különbözik, azért az előző állítás miatt ez jól értelmezett.

Riemann-integrálhatóság részintervallumon

Állítás

Tegyük fel, hogy f *Riemann-integrálható* $[a, b]$*-on és* $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$*. Ekkor* f *Riemann-integrálható* $[\alpha, \beta]$*-on is.*

Bizonyítás

Rögzített $\varepsilon > 0$ *esetén válasszunk olyan* $\delta > 0$ *értéket, amelyre* $[a, b]$ *bármely,* δ*-nál finomabb* $\mathcal{P}$ *felosztása esetén*

$$S_{\mathcal{P}} - s_{\mathcal{P}} < \varepsilon.$$

Ekkor, $[\alpha, \beta]$ *akármelyik* δ*-nál finomabb* $\mathcal{P}'$ *felosztása kiterjeszthető új osztópontok felvételével* $[a, b]$ *egy* δ*-nál finomabb* $\mathcal{P}$ *felosztásává. Könnyen látható, hogy*

$$S_{\mathcal{P}'} - s_{\mathcal{P}'} \leq S_{\mathcal{P}} - s_{\mathcal{P}}.$$

Riemann-integrálhatóság intervallumok egyesítésén

Állítás

Legyenek $a < b < c$ és tegyük fel, hogy f Riemann-integrálható $[a, b]$-on és $[b, c]$-on. Ekkor f Riemann-integrálható $[a, c]$-on is, és

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$

Bizonyítás

Legyenek $\mathcal{P}_1$ és $\mathcal{P}_2$ felosztásai $[a, b]$-nak és $[b, c]$-nak. Képezzük $[a, c]$-nak azt a $\mathcal{P}_0$ felosztását, amelynek osztópontjai $\mathcal{P}_1$ és $\mathcal{P}_2$ osztópontjainak egyesítése. Ekkor, amint $\mathcal{P}_1$ és $\mathcal{P}_2$ minden határon túl finomodik, úgy ugyanez igaz $\mathcal{P}_0$-ra is. Továbbá, minden $\mathcal{P}_0$-hoz tartozó téglányösszeg megkapható egy $\mathcal{P}_1$-hez és egy $\mathcal{P}_2$-höz tartozó téglányösszeg összegeként. Minthogy utóbbiak tetszőleges ξ_k választások esetén rendre $\int_a^b f(x)dx$-hez és $\int_b^c f(x)dx$-hez tartanak, kapjuk a kívánt összefüggést.

A Riemann-integrál linearitása, I.

Tegyük fel, hogy f Riemann-integrálható $[a, b]$-on, és legyen $c \in \mathbf{R}$ tetszőleges.

Állítás

Ekkor cf is Riemann-integrálható $[a, b]$-on, és

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx.$$

Bizonyítás

Azonnal következik a

$$m_k(cf) = cm_k(f), \quad M_k(cf) = cM_k(f)$$

összefüggésekből.

A Riemann-integrál linearitása, II.

Tegyük fel, hogy az f és g függvények Riemann-integrálhatók $[a, b]$-on.

Állítás

Ekkor $f + g$ is Riemann-integrálható $[a, b]$-on, és

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

Bizonyítás

Az $f + g$ függvény akármelyik $\mathcal{P}$ felosztáshoz és ξ_k választáshoz tartozó téglányösszege megkapható az f és g függvények ugyanazon $\mathcal{P}$ felosztáshoz és ξ_k választáshoz tartozó téglányösszegeinek összegeként. Mivel utóbbiak tetszőleges ξ_k választások esetén rendre $\int_a^b f(x)dx$-hez és $\int_a^b g(x)dx$-hez tartanak, amint $\mathcal{P}$ minden határon túl finomodik, így kapjuk a kívánt összefüggést.

Riemann-integrálható függvények szorzata és hányadosa integrálható

Tegyük fel, hogy az f és g függvények Riemann-integrálhatók $[a, b]$-on.

Állítás

Ekkor, az fg függvény Riemann-integrálható $[a, b]$-on. Továbbá, ha létezik olyan $m > 0$, amelyre minden $x \in [a, b]$ esetén $g(x) \geq m$, akkor $\frac{f}{g}$ is Riemann-integrálható $[a, b]$-on.