13. előadás: Határozatlan integrál, Newton–Leibniz tétel, integrálási technikák

Szabó Szilárd

Integrálfüggvény

Legyen $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ integrálható függvény.

Definíció

Ekkor f integrálfüggvénye az a $F : [a, b] \to \mathbf{R}$ függvény, amelyre

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Állítás

Ekkor F folytonos, továbbá differenciálható minden olyan $x \in]a, b[$ pontban, ahol f folytonos, és ott

$$F'(x) = f(x).$$

Az integrálfüggvény folytonossága és differenciálhatósága

Bizonyítás

Folytonosság:

$$
\begin{aligned}
|F(x+h) - F(x)| &= \left| \int_x^{x+h} f(t)dt \right| \\
&\leq \int_x^{x+h} |f(t)|dt \\
&\leq Kh.
\end{aligned}
$$

Differenciálhatóság:

$$
\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt,
$$

és minden $\varepsilon > 0$ *esetén létezik olyan* $\delta > 0$ *hogy ha* $|t - x| < \delta$ *akkor* $f(t) \in]f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon[$.

Primitív függvény

Definíció

Azt mondjuk, hogy F az f primitív függvénye, ha F folytonos $[a,b]$-on és differenciálható $]a,b[$-on, továbbá minden $x \in]a,b[$ esetén $F'(x) = f(x)$.

Az előző állítás miatt: minden folytonos f esetén annak F integrálfüggvénye primitív függvénye.

Állítás

Legyen f egy függvény és F, G két primitív függvénye. Ekkor $F - G = c$ valamely $c \in \mathbf{R}$ állandóra. Fordítva, ha F primitív függvénye f-nek és $F - G = c$ állandó, akkor G is primitív függvénye f-nek.

Bizonyítás

A differenciál-számítás főtételéből azonnal következik.

Határozatlan integrál, Newton–Leibniz tétel

Definíció

Egy f függvény primitív függvényeinek halmazát f határozatlan integráljának nevezzük.

Tétel (Newton–Leibniz)

Ha $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ integrálható függvény, és F egy primitív függvénye, akkor

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

Jelölés

$$F(b) - F(a) = [F(x)]_{x=a}^{b}.$$

A Newton–Leibniz tétel bizonyítása

Bizonyítás

Minden $\mathcal{P}$ felosztás esetén

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{N} (F(x_k) - F(x_{k-1})).$$

A Lagrange-féle középértéktétel miatt minden $1 \leq k \leq N$-re létezik olyan $\xi_k \in I_k$, hogy

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = F'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Tehát, minden $\mathcal{P}$ felosztás esetén $F(b) - F(a)$ megegyezik f-nek a $\mathcal{P}$-hez és a $(\xi_1, \ldots, \xi_N)$ választásokhoz tartozó integrál-közelítő összegével. Ezek határértéke tetszőleges $(\xi_1, \ldots, \xi_N)$ esetén:

$$\lim_{\Delta\mathcal{P} \to 0} \left(\sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \right) = \int_a^b f(t)dt.$$

Helyettesítéses integrálás

Tétel

Legyen $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *folytonos függvény,* $\alpha \neq \beta \in \mathbf{R}$, *és* $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ *vagy* $\varphi : [\beta, \alpha] \to [a, b]$ *olyan folytonosan differenciálható függvény, amelyre*

$$\varphi(\alpha) = a \quad \text{és} \quad \varphi(\beta) = b.$$

Ekkor

$$\int_a^b f(t)dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)du.$$

Helyettesítéses integrálás, bizonyítás

Bizonyítás

Tegyük fel például, hogy $\alpha < \beta$ és tekintsük a következő függvényeket:

$$F(v) = \int_a^{\varphi(v)} f(t)dt, \qquad G(v) = \int_\alpha^v f(\varphi(u))\varphi'(u)du$$

ahol $v \in [\alpha, \beta]$. A lánc-szabály miatt

$$F'(v) = \frac{dF}{d\varphi}(\varphi(v)) \cdot \frac{d\varphi}{dv}(v) = f(\varphi(v))\varphi'(v).$$

Másrészt, mivel f és φ folytonosak, azért

$$G'(v) = f(\varphi(v))\varphi'(v) = F'(v).$$

A differenciál-számítás főtétele szerint $F - G$ állandó. Mivel $F(\alpha) = G(\alpha) = 0$, azért $F = G$. Helyettesítve $v = b$-t, kapjuk a kívánt állítást.

Lineáris változó-helyettesítés

Állítás

Ha

$$\int f(x)dx = F(x) + c,$$

akkor minden $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbf{R}$ *esetén*

$$\int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + c.$$

Bizonyítás

Alkalmazzuk a

$$\varphi(u) = au + b$$

helyettesítést.

Polinomiális függvény-helyettesítés

Állítás

Ha φ integrálható, valamint φ' mindenhol létezik és integrálható, akkor minden $k \neq -1$ esetén

$$\int \varphi^k(u)\varphi'(u)du = \frac{\varphi^{k+1}(u)}{k+1} + c.$$

Ha létezik olyan $m > 0$, amelyre minden u esetén $|\varphi(u)| \geq m$, akkor

$$\int \frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)}du = \ln|\varphi(u)| + c.$$

Bizonyítás

Alkalmazzuk az

$$f(x) = x^k$$

helyettesítést.

Exponenciális függvény-helyettesítés

Állítás

Ha φ integrálható, akkor

$$\int e^{\varphi(u)}\varphi'(u)du = e^{\varphi(u)} + c.$$

Bizonyítás

Alkalmazzuk az

$$f(x) = e^x$$

helyettesítést.

Parciális integrálás

Tétel

Ha f, g deriváltjaikkal együtt folytonosak, akkor

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx.$$

Bizonyítás

Mivel

$$(fg)' = f'g + fg',$$

azért $f'g + fg'$ egy primitív függvénye fg. Innen:

$$\int_a^b f'(x)g(x) + f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_{x=a}^b.$$

Ezt átrendezve kapjuk a kívánt eredményt.