14. előadás: Racionális törtfüggvények integrálása

Szabó Szilárd

Polinomok maradékos osztása

Legyenek P, Q valós együtthatós polinomok valamely x határozatlanban. Feltesszük, hogy $\deg(Q) > 0$.

Tétel

Létezik pontosan egy olyan A polinom valamint pontosan egy olyan R polinom, amelyre $\deg(R) < \deg(Q)$ *és*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = A(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}.$$

Bizonyítás

Az ismert maradékos osztási eljárással, 10 *helyébe x-et helyettesítve.*

A nevező gyöktényezős felbontása

Innentől feltesszük, hogy $\deg(P) < \deg(Q) = N$.
Az algebra alaptétele szerint léteznek olyan $w_1, \ldots, w_N \in \mathbf{C}$ nem feltétlenül különböző számok és $a_0 \in \mathbf{R}$, amelyre

$$Q(x) = a_0(x - w_1) \cdots (x - w_N).$$

Mivel Q valós együtthatós, azért minden w gyökére $\bar{w}$ is gyöke, és w és $\bar{w}$ multiplicitása megegyezik. Vegyük észre, hogy

$$(x - w)(x - \bar{w}) = x^2 - 2\Re(w)x + |w|^2$$

szintén valós együtthatós. Legyen $q = -2\Re(w), s = |w|^2$, ekkor a polinom diszkriminánsa

$$q^2 - 4s < 0.$$

A nevező gyöktényezős felbontása, folyt.

Csoportosítva az azonos gyököket és párosítva a konjugált gyökpárokat, kapjuk a következő felbontást:

$$Q(x) = a_0(x-w_1)^{m_1}\cdots(x-w_\kappa)^{m_\kappa}(x^2+q_1x+s_1)^{n_1}\cdots(x^2+q_\lambda x+s_\lambda)^{n_\lambda},$$

ahol

- $a_0 \in \mathbf{R}$ a Q főegyütthatója,
- $w_1, \ldots, w_\kappa \in \mathbf{R}$ a különböző valós gyökök, rendre $m_1, \ldots, m_\kappa$ multiplicitással,
- a $x^2 + q_l x + s_l$ másodfokú tényezők páronként különbözők, n_l multiplicitásúak, és minden l-re $q_l^2 - 4s_l < 0$.

Továbbá, a fokok egyenlősége miatt

$$N = m_1 + \cdots + m_\kappa + 2(n_1 + \cdots + n_\lambda).$$

Racionális törtfüggvény részlettörtekre bontása

Tétel

Ekkor P/Q egyértelműen felbomlik a következő alakú ún. részlettörtek vagy parciális törtek összegére:

- *minden* $1 \le k \le \kappa$ *és* $1 \le m \le m_k$ *esetén*

$$\frac{a_{k,m}}{(x - w_k)^m}$$

  valamely $a_{k,m} \in \mathbf{R}$*-re;*

- *minden* $1 \le l \le \lambda$ *és* $1 \le n \le n_k$ *esetén*

$$\frac{b_{l,n} + c_{l,n}x}{(x^2 + q_l x + s_l)^n}$$

  valamely $b_{l,n}, c_{l,n} \in \mathbf{R}$*-re.*

A határozatlan együtthatók módszere

Módszer az $a_{k,m}, b_{l,n}, c_{l,n} \in \mathbf{R}$ megtalálására: a kívánt

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{k,m} \frac{a_{k,m}}{(x-w_k)^m} + \sum_{l,n} \frac{b_{l,n} + c_{l,n}x}{(x^2+q_lx+s_l)^n}$$

egyenlet mindkét oldalát beszorozzuk Q-val, így kapunk egy polinom-egyenletet. Ez akkor és csak akkor teljesül, ha mindkét oldalon x minden hatványának azonos az együtthatója. A bal oldalon x^k együtthatója meghatározott P által; a jobb oldalon pedig lineáris kifejezés a keresett együtthatókban. A kapott lineáris egyenletrendszert megoldjuk az $a_{k,m}, b_{l,n}, c_{l,n}$ ismeretlenekben.

Valós gyökökhöz tartozó részlettörtek integrálása

Láttuk:

$$\int \frac{a}{(x-w)}\mathrm{d}x = a\ln|x-w| + c,$$
$$\int \frac{a}{(x-w)^m}\mathrm{d}x = \frac{a}{(1-m)(x-w)^{m-1}} + c \quad \text{ha } m > 1.$$

Konjugált gyökpárokhoz tartozó részlettörtek integrálása, I.

Mivel

$$x^2 + qx + s = \left(x + \frac{q}{2}\right)^2 - \frac{q^2}{4} + s$$

azért az $y = \frac{x+\frac{q}{2}}{\sqrt{s-\frac{q^2}{4}}}$ helyettesítéssel

$$\begin{aligned}\int \frac{b}{x^2 + qx + s}\mathrm{d}x &= \frac{b}{s - \frac{q^2}{4}} \int \frac{1}{y^2+1}\sqrt{s - \frac{q^2}{4}}\mathrm{d}y \\ &= \frac{b}{\sqrt{s - \frac{q^2}{4}}}\arctan(y) + c \\ &= \frac{b}{\sqrt{s - \frac{q^2}{4}}}\arctan\left(\frac{x + \frac{q}{2}}{\sqrt{s - \frac{q^2}{4}}}\right) + c.\end{aligned}$$

Konjugált gyökpárokhoz tartozó részlettörtek integrálása, II.

Legyen most $c \neq 0$, ekkor

$$\begin{aligned}\int \frac{b+cx}{x^2+qx+s}\mathrm{d}x &= \frac{c}{2}\int \frac{2x+\frac{2b}{c}}{x^2+qx+s}\mathrm{d}x \\ &= \frac{c}{2}\int \frac{2x+q}{x^2+qx+s}+\frac{\frac{2b}{c}-q}{x^2+qx+s}\mathrm{d}x \\ &= \frac{c}{2}\ln(x^2+qx+s)+\frac{c}{2}\int \frac{\frac{2b}{c}-q}{x^2+qx+s}\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

utóbbi integrál pedig már olyan alakú, mint az előző pontban.

Konjugált gyökpárokhoz tartozó résztörtek integrálása, III.

Amennyiben $n \geq 2$, akkor

$$\int \frac{b_{l,n} + c_{l,n}x}{(x^2 + q_l x + s_l)^n}$$

meghatározása egy rekurzió ismételt alkalmazásával visszavezethető a

$$\int \frac{b + cx}{x^2 + qx + s} \mathrm{d}x$$

meghatározására.

Exponenciális függvény racionális törtfüggvényének integrálása

Állítás

Exponenciális függvény racionális törtfüggvényének integrálása a $t = e^x$ *helyettesítéssel visszavezethető racionális törtfüggvény integrálására.*

Bizonyítás

Legyenek P, Q *polinomok,* $\deg(P) < \deg(Q)$. *Ekkor* $x = \ln(t)$ *miatt* $\dot{x}(t) = \frac{1}{t}$ *és*

$$\int \frac{P(e^x)}{Q(e^x)} dx = \int \frac{P(t)}{tQ(t)} dt.$$

Szögfüggvények racionális törtfüggvényének integrálása

Állítás

Szögfüggvények racionális törtfüggvényének integrálása a $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ *helyettesítéssel visszavezethető racionális törtfüggvény integrálására.*

Bizonyítás

A

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2},$$
$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$
$$\dot{x}(t) = 2\frac{d\arctan(t)}{dt} = \frac{2}{1+t^2}.$$

szögfüggvény-azonosságok miatt minden $a, b \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$*-re* $\sin(ax)$ *és* $\cos(bx)$ *helyettesíthető* t *egy racionális törtfüggvényével.*