

Első A3 szigorlat
2017. május 16., 10:15-11:45

ELMÉLETI KÉRDÉSEK (3×10 PONT)

1. (i) Komplex szám algebrai és trigonometrikus alakjainak *definíciói*, a két alak közti áttérési formulák megadása (5 pont); (ii) az *algebra alaptételének* szabatos kimondása, egy trigonometrikus alakban adott komplex szám n -edik hatványának és n -edik gyökének kiszámítása (*Moivre tétele*) (5 pont).
2. (i) Kettős és hármas Riemann-integrál transzformációjának (másnéven változó-helyettesítés) *definíciója* (5 pont); (ii) a kettős és hármas Riemann-integrál transzformációjára vonatkozó *tétel* szabatos kimondása (5 pont).
3. (i) Egy $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény Lipschitz-tulajdonságának *definíciója* (5 pont); (ii) A skalárpotenciális vektormező görbementi integráljára vonatkozó *tétel* szabatos kimondása (5 pont).

FELADATOK (7×10 PONT)

1. Írja fel az $\frac{1}{1+\sqrt{i}}$ komplex számokat (i) algebrai alakban (5 pont) és (ii) trigonometrikus alakban (5 pont)!
2. Határozza meg az $f'(0)$ derivált értékét, amennyiben $f(x) := x(x-1)(x-2)\dots(x-2017)$ (10 pont)!
3. Mennyi az $f(x) := \frac{x^2}{2}$ parabola $[0, 1]$ -feletti darabjának ívhossza (10 pont)?
4. Számítsa ki a $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{2017}$ mátrixot (10 pont)!
5. Mivel egyenlő az $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+(x^2+y^2)^2} dx dy$ kettős improprius integrál (10 pont)?
6. Adja meg a $\gamma(t) := \begin{pmatrix} 3t \\ 3t^2 \\ 2t^3 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ térgörbe $P(\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4})$ és $Q(6, 12, 16)$ pontjait összekötő darabjának ívhosszát (10 pont)!
7. Keresse meg az $xy' = y(\log y - \log x)$ egyenlet általános megoldását (10 pont)!