

Második A3 szigorlat
2017. május 23., 10:15-11:45

ELMÉLETI KÉRDÉSEK (3×10 PONT)

1. (i) Valós függvény véges x_0 -beli, ill. $x_0 = \pm\infty$ -beli határértékének *definíciója*, három nevezetes valós határérték *felsorolása, jellemzése* (5 pont); (ii) a véges x_0 -beli határértékre vonatkozó *Bernoulli–L'Hospital-tétel* szabatos kimondása (5 pont).
2. (i) Valós függvény-sor, annak egyenletes konvergenciája, konvergencia-tartományának *definíciói* (5 pont); (ii) a függvény-sor egyenletes konvergenciájára vonatkozó *Weierstraß-kritérium* (tétel) szabatos kimondása (5 pont).
3. (i) Egy $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektormező skalár-potenciálosságának, vektor-potenciálosságának *definíciói*, indokolja meg: lehet-e egy nem-konstans vektormező egyszerre skalár- és vektorpotenciális is? (5 pont); (ii) A *Picard–Lindelöf-tétel* szabatos kimondása (5 pont).

FELADATOK (7×10 PONT)

1. Ábrázolja a komplex síkon az $A := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z^3) = 0\} \subset \mathbb{C}$ halmazt (10 pont)!
2. Végezze el az $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény teljes vizsgálatát, ahol is $f_n(x) := x^3 e^{-nx}$ és $n \in \mathbb{N}$ rögzített pozitív egészszám (10 pont)!
3. (i) Bizonyítsa be a Weierstraß-kritérium segítségével, hogy a $\sum_{n=1}^{+\infty} x^3 e^{-nx}$ függvény-sor egyenletesen konvergens $\mathbb{R}^+$ -on (4 pont)! (ii) Mutassa meg, hogy valójában $\sum_{n=1}^{+\infty} x^3 e^{-nx} = \frac{x^3}{e^x - 1}$, amennyiben $x \in \mathbb{R}^+$ (3 pont)! (iii) Számítsa ki a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{e^x - 1}$ és a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{e^x - 1}$ határértékeket (3 pont)!
4. A 2-3. feladatok eredményeit és a $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$ formulát felhasználva számítsa ki az alapvető fontosságú $\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx$ integrál¹ értékét (10 pont)!
5. Határozza meg az $e^{\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}}$ exponencializált mátrixot (10 pont)!
6. Mennyi a $\gamma(t) := \begin{pmatrix} \cos^3 t \\ \sin^3 t \\ \cos(2t) \end{pmatrix}$ térgörbe $t \in [0, 2\pi]$ darabjának ívhossza (10 pont)?
7. Keresse meg az $y''' - y'' = 12x^2 + 6x$ egyenlet általános megoldását (10 pont)!

¹A kvantumelmélet szerint ez az integrál adja meg azt az energiamennyiséget, amit egy abszolút fekete test a teljes elektromágneses spektrumon elsugároz.