Negyedik A3 szigorlat

2017. június 6., 10:15-11:45

Elméleti kérdések (3×10 pont)

1. (i) Egyváltozós valós függvény $x_0 \in \mathbb{R}$ pontbeli folytonosságának és határértékének *definíciói*, kapcsolatuk (5 pont); (ii) Egyváltozós valós függvényből származó görbe ívhosszának, forgástest térfogatának, palástja felszínének kiszámítása (*tételek*) (5 pont).

2. (i) Determináns *definíciója* (axiomatikus bevezetés) (5 pont); (ii) Négyzetes mátrix invertálhatóságának szükséges és elégséges feltétele (*tétel*) (5 pont).

3. (i) Adott intervallumon értelmezett függvények lineáris függetlenségének, ill. Wronski-determinánsának *definíciói*, kapcsolatuk (5 pont); (ii) az állandó együtthatós, homogén, lineáris differenciál-egyenletek megoldásának algoritmusa (*tétel*) (5 pont).

Feladatok (7×10 pont)

1. A $p \in \mathbb{R}$ paraméter mely értékére lesz az $f(x) := \begin{cases} x^{\frac{1}{1-x}} & \text{ha } x \neq 1, x > 0 \\ p & \text{ha } x = 1 \end{cases}$ valós függvény folytonos az $x = 1$ pontban (10 pont)?

2. Legyen $x > 1$ és $g(x) := \log_x \mathrm{e}$. Létezik-e a g függvénynek maximuma az $(1, +\infty) \subset \mathbb{R}$ intervallumon (10 pont)?

3. Számítsa ki az $f(x) := \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ függvény $[0, +\infty)$ fölötti darabjának x-tengely körüli megforgatásával kapott forgástest (i) térfogatát (5 pont); (ii) ill. a forgástest (xy) síkkal vett metszetének a területét (5 pont)!

4. (i) Keresse meg a rögzített $K \in \mathbb{R}^+$ kerületű (vagyis össz-élhosszúságú) lehetséges téglatestek között a maximális térfogatút (5 pont); (ii) mutassa meg, hogy bármely téglatest V térfogata és K kerülete között fennáll a $V \leqq \frac{K^3}{1728}$ egyenlőtlenség és az egyenlőség esete pontosan akkor valósul meg, ha a téglatest kocka (5 pont)!

5. Határozza meg az $\begin{pmatrix} \frac{-1+\sqrt{5}}{4} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} & \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \end{pmatrix}$ mátrix (i) inverzét (5 pont); ill. (ii) a mátrix sajátértékeit (5 pont)!

6. Mennyi a $\mathbf{v}(\mathbf{r}) := r^{-2}\mathbf{r}$ vektormező $\gamma(t) := \begin{pmatrix} \cos^3 t \\ \sin^3 t \\ \cos(2t) \end{pmatrix}$ irányított térgörbe $t \in [0, 2\pi]$ darabjára vett integrálja (10 pont)?

7. Írja fel a $3x^2 + 6xy^2 + (6x^2y + 4y^3)y' = 0$ egyenlet általános megoldását $u(x, y(x)) = c$ implicit alakban (10 pont)!