

FELADATOK AZ A1 (VBK) TÁRGY HALLGATÓI SZÁMÁRA

1. hét

1. Így szokás halmazokat definiálni: $\{x \in \text{alaphalmaz} \mid \text{feltételek } x\text{-re}\}$. Definiáljuk:
- a) 1-nél kisebb pozitív valós számok halmaza, b) racionális; irracionális számok halmaza,
 c) a négyzetszámok halmaza, d) a második síknegyed pontjai,
 e)^{hf} páros számok halmaza, f)^{hf} prímszámok halmaza,
 g)^{hf} az egységsugarú gömbön belüli pontok, h)^{hf} harmadfokú polinomok halmaza.

2. Legyen A, B és C három halmaz. Fejezzük ki a

$$D = A - (A - (B - (B - C)))$$

halmazt az A, B és C halmazokkal, és az unió és metszet műveletekkel. Ez alapján döntsük el, hogy mivel egyenlő D az alábbi esetekben:

- a) a három halmaz páronként diszjunkt, b) pontosan két diszjunkt van köztük,
 c)^{hf} nincs köztük kettő diszjunkt.

3. Igazoljuk az alábbi állításokat teljes indukcióval minden pozitív egész számra!

- a) $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, b) $\sum_{n=1}^k n(n!) = (k+1)! - 1$
 c)^{hf} $\prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{1}{(i+1)^2}\right) = \frac{n+2}{2n+2}$ d) $\sqrt{k} < \sum_{j=1}^k \frac{1}{\sqrt{j}} < 2\sqrt{k}$, ahol $k \geq 2$
 e)^{hf} $\frac{(2t)!}{(t!)^2} < 4^{t-1}$, ahol $t \geq 5$

4. A síkot n egyenessel részekre bontottuk.

- a) Mutassuk meg, hogy az így kapott síkrészek két színnel kiszínezhetők úgy, hogy az él mentén érintkező részek különböző színűek.
 b)^{hf} Igazoljuk, hogy ha az egyenesek között nincsenek párhuzamosak, és mindegyik metszéspont pontosan két egyeneshez tartozik, akkor a síkrészek száma $\frac{n^2+n+2}{2}$.

5. Legyen $z = 1 - 4i$. Mi lesz $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, \bar{z} , $|z|$, $\arg z$?

6. Írjuk a következő komplex számokat $a + ib$ alakba!

- a) $(1 + 4i)(4 - 2i)$ b) i^7 c) $\frac{3 - 2i}{-2 + i}$ d) $\frac{3 - 2i}{3i}$
 e)^{hf} i^{2009} f)^{hf} $\frac{1}{i}$ g)^{hf} $\frac{2 - i}{i - 1}$ h)^{hf} $(2 + i)^{37}(2 - i)^{38}$

Emlékeztető

- Logikai jelek: \forall minden; \exists létezik; $\exists!$ létezik egyetlen; \wedge és; \vee vagy; \neg nem; \Rightarrow következik; \Leftrightarrow ekvivalens;

Halmazok: \mathbb{N} természetes számok; \mathbb{Z} egészek; \mathbb{Q} racionálisok; \mathbb{R} valós számok; \emptyset üres halmaz;
 $\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, $\prod_{i=1}^n a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$.

- MINDEN feladat, amit a gyakorlaton nem beszélünk meg, házi feladat. Az eleve házi feladatnak szánt feladatok ^{hf} jellel vannak megjelölve.

- A követelmények leírása, a félév anyaga és beosztása, gyakorló feladatok, zárthelyi eredmények és sok egyéb hasznos információ található a tantárgy weblapjain. Ezeket az alábbi helyen keresztül érhetik el: http://www.math.bme.hu/~geom/Oktatas_2015-16-2/index.html