Feladatok az A1 (VBK) tárgy hallgatói számára
13. hét

1. Mennyi a megadott integrálok értéke?

   a) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$

   b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

   c)$^{\text{hf}}$ $\displaystyle\int_{-8}^{\infty} \frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$

   d) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+4x+3}\,dx$

   e)$^{\text{hf}}$ $\displaystyle\int_0^{\infty} xe^{-x^2}\,dx$

2. Mekkora a síkidom területe, melynek határai:

   a) $f(x) = x^2+1$ parabola, az y-tegely és az $y = 2x+1$ egyenes
   b) $f(x) = \sqrt{x}$ függvény, az y-tegely és a függvény $x_0 = 8$ pontjába húzott érintőegyenes
   c)$^{\text{hf}}$ $f(x) = 4 - x^2$ parabola és az x-tegely
   d)$^{\text{hf}}$ $f(x) = x^2$ és $g(x) = -x^2 + 2$

3. Számítsuk ki a paraméteres görbe adott darabja alatti területet:

   a) $\left.\begin{aligned} x &= a\cos t \\ y &= b\sin t \end{aligned}\right\}$, $t \in [0, 2\pi]$ egyenletű, a és b féltengelyű elliszis
   b)$^{\text{hf}}$ $(t^2, (1-t)^2)$, $t \in [0,1]$ görbe

4. Számítsuk ki a megadott görbedarabok ívhosszát:

   a) $f(x) = \ln(1-x^2)$, $x \in [0, 0.5]$
   b)$^{\text{hf}}$ $f(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$, $x \in [1,2]$
   c)$^{\text{hf}}$ $(2\cos(t), 2\sin(t))$, $t \in [0,\pi]$ 2 sugarú félkör
   d) $(t - \sin(t), 1 - \cos(t))$, $t \in [0,\pi]$ ciklois
   e)$^{\text{hf}}$ $(e^t\cos(t), e^t\sin(t))$, $t \in [0, \pi/2]$ spirál

5.$^{\text{hf}}$ Számoljuk ki az r sugarú gömb térfogatát és felszínét!

6. Számítsuk ki a megadott görbedarabok megforgatásából keletkezett forgástest felszínét ill. térfogatát:

   a) $f(x) = \sin(x)$, $x \in [0,\pi]$ térfogatát és felszínét
   b)$^{\text{hf}}$ $f(x) = \ln(x)$, $x \in [1,2]$ térfogatát
   c)$^{\text{hf}}$ $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0,1]$ felszínét
   d)$^{\text{hf}}$ $f(x) = 2x$, $x \in [1,3]$ csonkakúp felszínét és térfogatát

Emlékeztető

– A *Newton-Leibniz-szabály*: Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrálható, és F egy primitív függvénye, akkor $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b := F(b) - F(a).$

– Egy $[a,\infty]$ intervallumon értelmezett f függvény improprius integrálja $\int\limits_a^\infty f(x)\ dx = \lim\limits_{\omega\to\infty}\int\limits_a^\omega f(x)\ dx$, ha a határérték létezik. Egy $(a,b]$ intervallumon értelmezett f függvény improprius integrálja $\int\limits_a^b f(x)\ dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_{a+\varepsilon}^b f(x)\ dx$, ha a határérték létezik.

– Integrálszámítás alkalmazásai különböző geometriai mennyiségek kiszámolására:

1. Az $f(x)$ és $g(x)$ grafikonok által közrezárt síkidom területe:$\int_a^b f(x) - g(x)dx$, ahol $f(a) = g(a)$ és $f(b) = g(b)$
2. Az $(x(t), y(t))$, $t \in [a,b]$ paraméteres görbedarab alatti terület nagysága:$\int_a^b y(t)\dot{x}(t)dt$
3. Az $r(\varphi)$, $\varphi \in [a,b]$ polárkoordinátás megadású görbe által határolt szektortartomány területe:$\int_a^b \frac{r^2(\varphi)}{2}d\varphi$
4. Az $y = f(x)$, $x \in [a,b]$ grafikondarab ívhossza:$\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}dx$
5. Az $(x(t), y(t))$, $t \in [a,b]$ paraméteres görbedarab ívhossza:$\int_a^b \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}dt$
6. Az $y = f(x)$, $x \in [a,b]$ grafikondarab megforgatásával keletkezett forgástest térfogata:$\int_a^b \pi f(x)^2 dx$
7. Az $y = f(x)$, $x \in [a,b]$ grafikondarab megforgatásával keletkezett forgástest felszíne:$\int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}dx$