Definíciók és tételek (A1 Biomérnök)

Sorozatok

. Az (a_n) sorozat *konvergál az A számhoz*, ha minden $\varepsilon > 0$ van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \geq N$ esetén $|a_n - A| < \varepsilon$.

. Az (a_n) sorozat *Cauchy sorozat*, ha minden $\varepsilon > 0$ van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n, m \geq$ $\geq N$ esetén $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

- Minden sorozatnak van monoton részsorozata.
- Ha egy sorozat monoton és korlátos akkor konvergens.
- (**Bolzano-Weierstrass**) Minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.
- A valós Cauchy sorozatok éppen a valós konvergens sorozatok.

Egyváltozós valós függvények:

. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvény határértéke az $a \in \dot{\mathcal{D}(f)}$ pontban a A szám*, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $\delta > 0$ szám, hogy minden $x \in \mathcal{D}(f)$ $|x - a| \leq \delta$ esetén $|f(x) - A| < \varepsilon$.

. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény *folytonos az $a \in \mathcal{D}(f)$ pontban*, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $\delta > 0$ szám, hogy minden $x \in \mathcal{D}(f)$ $|x - a| \leq \delta$ esetén $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény *egyenletesen folytonos a $\mathcal{D}(f)$ halmazon*, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $\delta > 0$ szám, hogy minden $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(f)$ $|x_1 - x_2| \leq \delta$ esetén $|f(x_1) -$ $- f(x_2)| < \varepsilon$.

. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény *differenciálható az $a \in \operatorname{int}\mathcal{D}(f)$ pontban*, ha

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

határérték létezik és véges. (Jelölés: $f'(a)$.)

. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in \mathcal{D}(f)$ pontban *lokális maximuma (minimuma)* van, ha van olyan $\delta > 0$, hogy minden olyan $x \in \mathcal{D}(f)$, melyre $|x - a| < \delta$ $f(x) \leq f(a)$ $(f(x) \geq f(a))$.

. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek a $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény *primitív függvénye* a $\mathcal{D}(f)$-en, ha ott értelmezve van, a belső pontokban deriválható és $F' = f$.

. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ az $[a, b]$ intervallumon értelmezett, korlátos függvény $F \in \mathcal{F}$ az $[a, b]$ intervallum egy $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ felosztása. Jelölje

$$s(f, F) := \sum_{i=1}^{n} \left(\inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \right) (x_i - x_{i-1}) \text{ illetve } s(f) := \sup_{F \in \mathcal{F}} s(f, F),$$

az f függvény F felosztáshoz tartozó *alsó közelítő összegét* illetve *alsó Darboux integrálját*. Hasonlóképpen jelölje

$$S(f, F) := \sum_{i=1}^{n} \left(\sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \right) (x_i - x_{i-1}) \text{ és } s(f) := \inf_{F \in \mathcal{F}} s(f, F),$$

az f függvény F felosztáshoz tartozó *felső közelítő összegét* és *felső Darboux integrálját*. Az f függvény $[a, b]$-*n integrálható* ha $s(f) = S(f)$.

- **Átviteli elv**: Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény az $a \in \mathcal{D}(f)$ pontban pontosan akkor folytonos, ha minden $(x_n) \subset \mathcal{D}(f)$, sorozat és $x_n \to a$ esetén $f(x_n) \to f(a)$.

- **Heine tétel**: Korlátos és zárt intervallumon folytonos függvény egyenletesen folytonos.

- **Bolzano tétel**: Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos és $f(a) \leq c \leq f(b)$, akkor van olyan $x \in [a, b]$, hogy $f(x) = c$.

- **Weierstrass tétel**: Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos, akkor vannak olyan $x_{\max}, x_{\min} \in [a, b]$ pontok, hogy $f(x_{\max}) = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ és $f(x_{\min}) = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

- **Lagrange középérték tétel**: Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos és a belső pontokban differenciálható, akkor van olyan $\xi \in (a, b)$, hogy
$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

- **Taylor tétel**: Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n-szer differenciálható és a derivált függvények az $[a, a + h] \subset \mathcal{D}(f)$ intervallumon folytonosak, akkor van olyan $\xi \in (a, a + h)$, hogy teljesül az
$$f(a + h) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} h^i + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} h^n$$
egyenlőség.

- **Tétel az inverzfüggvényről**: Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenciálható az $x_0 \in \mathcal{D}(f)$ pontban és $f'(x_0) \neq 0$, akkor f invertálható az x_0 pont egy kis környezetében, az $y_0 = f(x_0)$ pontban f^{-1} deriválható és
$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

- **Közvetett függvény differenciálása**: Ha $g : [c, d] \to [a, b]$ differenciálható az $x_0 \in \in (c, d)$ pontban és $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenciálható az $g(x_0) \in (a, b)$ pontban, akkor $f \circ g$ differenciálható az x_0 pontban és $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$.

- **Newton-Leibnitz formula**: Ha az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ $[a, b]$-n integrálható, és létezik valamely F primitív függvénye (a, b)-n, ami folytonos [a,b]-n, akkor
$$\int_a^b f(x)\mathrm{dx} = F(b) - F(a).$$

- **Parciális integrálás**: Tegyük fel $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenciálhatóak (a, b)-n és f', g' folytonosak $[a, b]$-n. Ekkor
$$\int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{dx} = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{dx}.$$

- **Integrálás helyettesítéssel**: Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ $[a, b]$-n folytonos, és $g : [c, d] \to [a, b]$ differenciálható függvény, amely folytonos $[c, d]$-n, továbbá $g(c) = a$ és $g(d) = b$. Ekkor $f \circ g : [c, d] \to \mathbb{R}$ integrálható, és
$$\int_a^b f(x)\mathrm{dx} = \int_c^d (f \circ g)(y)g'(y)\mathrm{dy}.$$